Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Classe

der

k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.

1883. Heft II.

München.
Akademische Buchdruckerei von F. Straub.
1883.

In Commission bei G. Franz.

Herr Bauer bespricht und legt vor:

a) eine Abhandlung „Ueber die Hesse'sche Determinante der Hesse'schen Fläche einer Fläche dritter Ordnung,"

welche in die Denkschriften aufgenommen wird; ferner:

b) eine Abhandlung „Von den gestaltlichen Verhältnissen der parabolischen Curve auf einer Fläche dritter Ordnung."

In der Reihe von Modellen von Flächen dritter Ordnung, durch deren Herausgabe Herr Rodenberg sich ein sehr wesentliches Verdienst um das Studium dieser Flächen erworben hat, befindet sich ein Modell (Mod. Nr. 7 der Reihe, das eine sogenannte „inverse" Fläche mit drei Knoten darstellt), auf welchem die parabolische Curve unrichtig verzeichnet ist und in der von Herrn Rodenberg seinen Modellen beigegebenen Erklärung ist der Verlauf der Curve auch der Zeichnung auf dem Modelle gemäss beschrieben.[1] Diess

1) Herr Rodenberg sagt nämlich daselbst S. 17: „Letztere Linien (Verbindungslinien zweier Knoten) zählen als parabolische Curve wiederum doppelt, der Rest besteht aus 7 Ovalen, welche elliptisch gekrümmte Partien einschliessen. Von diesen Ovalen ist eins zum isolirten Punkt geworden, in welchem sich drei unäre Geraden kreuzen. Die übrigen Ovale werden durch die drei Seitentheile der Hesse'schen Fläche ausgeschnitten, je zwei berühren eine Gerade der parabolischen Curve.

gibt mir Veranlassung, hier einige Bemerkungen über den Verlauf der parabolischen Curve auf einer Fläche dritter Ordnung mit Knotenpunkten folgen zu lassen.

1. Bei einer allgemeinen Fläche mit 27 reellen Geraden gibt es bekanntlich ein Doppelsechs von Geraden mit imaginären Asymptotenpunkten, während die übrigen 15 Geraden reelle Asymptotenpunkte besitzen. [1]) Indem wir die jetzt übliche Bezeichnung der Geraden beibehalten, wie sie auch auf den Rodenberg'schen Modellen in Anwendung gekommen ist, bezeichnen wir die 12 Geraden mit imaginären Asymptotenpunkten durch

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1' & 2' & 3' & 4' & 5' & 6', \end{matrix}$$

während die 15 übrigen Geraden durch je zwei Zahlen 12, 13, . . . 56 bezeichnet sind. Diese letzteren 15 Geraden bilden auf der Fläche 15 Dreiecke; unter diesen gibt es 10, welchen je eines der 10 Ovale eingeschrieben ist, aus denen die parabolische Curve der allgemeinen Fläche mit 27 Geraden besteht, [2]) während die 5 übrigen Dreiecke keine solche Ovale einschliessen, und wenn die Fläche in eine Diagonalfläche übergeht, die Pentaederebenen derselben bestimmen. Wir wählen die Indices der Geraden so, dass diese 5 Dreiecke durch die Geraden

$$\left.\begin{matrix} 12, & 34, & 56 \\ 13, & 25, & 46 \\ 14, & 26, & 35 \\ 15, & 24, & 36 \\ 16, & 23, & 45 \end{matrix}\right\} \text{A}$$

gebildet werden, welche Bezeichnung nach dem Vorgange Klein's auch von Rodenberg beibehalten ist. Dann erhält

1) F. Klein, Ueber Flächen dritter Ordnung. Math. Ann. VI, § 11.
2) F. Klein a. a. O.

man die Geraden, welche die 10 Dreiecke bilden, welchen Ovale der parabolischen Curve eingeschrieben sind, indem man in den Dreiecken A die Indices von irgend zweien ihrer Geraden auf andere Weise combinirt, nämlich

$$\left.\begin{array}{llllll} 12, & 35, & 46; & 12, & 36, & 45, \\ 13, & 26, & 45; & 13, & 24, & 56, \\ 14, & 25, & 36; & 14, & 23, & 56, \\ 15, & 23, & 46; & 15, & 26, & 34, \\ 16, & 24, & 35; & 16, & 25, & 34. \end{array}\right\} \text{B.}$$

Auf der Diagonalfläche werden diese Tripel von denjenigen Geraden gebildet, die sich zu dreien in einem „Ovalpunkt“ schneiden und die Diagonalebenen des Pentaeders der Fläche bestimmen. Vertauscht man andererseits die Indices zweier Geraden in einem der Dreiecke B auf die zwei möglichen Arten, so erhält man ein anderes Dreieck B und ein Dreieck A. Wir werden von dieser Bemerkung im Folgenden mehrfach Gebrauch machen.

2. Nehmen wir nun an, dass auf der Fläche sich ein Knotenpunkt bilde, so ist sofort ersichtlich, dass auf jeder Geraden, welche durch den Knoten hindurchgeht, die zwei Asymptotenpunkte im Knoten zusammenfallen müssen, da jede Ebene durch die Gerade gelegt aus der Fläche eine Curve ausschneidet, von welcher ein Schnittpunkt in den Knotenpunkt fällt. Die auf der Geraden von den Paaren der Schnittpunkte gebildete Involution wird eine „parabolische.“

Hieraus folgt, dass die zwei Ovale, welche die Gerade in ihren Asymptotenpunkten berühren, im Knotenpunkt zusammenstossen und daselbst die Gerade zur gemeinsamen Tangente haben.

Ein Knotenpunkt der Fläche bildet sich durch Zusammenziehen einer der „Durchgänge“ oder „Oeffnungen“ der Fläche. Durch jede dieser Oeffnungen der Fläche verläuft ein Doppelsechs, welches sechs Gerade mit reellen Asymptotenpunkten und sechs mit imaginären Asymptotenpunkten enthält. Sei

$$\begin{matrix} i & k & l & np & mp & mn \\ kl & il & ik & m' & n' & p' \end{matrix}$$

ein solches Doppelsechs, wo i k l m n p die Indices 1 . . . 6 in irgend einer Reihenfolge bezeichnen. Wir werden, wie es seit dem Vorgange Klein's üblich ist, ein solches Doppelsechs durch

$$(ikl)$$

bezeichnen und falls es durch eine Oeffnung der Fläche verläuft, auch diese Oeffnung, sowie den Knoten, der durch Zusammenziehung dieser Oeffnung entsteht, durch dieses Symbol bezeichnen. Ein Doppelsechs dieser Art enthält von jedem der Dreiecke A und B entweder je zwei Seiten oder keine. Denn enthält das Dreieck z. B. die Seite i k, so enthält es noch eine der Geraden m p, n p, m n und es gibt also drei Dreiecke mit der Seite i k, nämlich

$$\begin{matrix} ik & mn & lp \\ ik & mp & nl \\ ik & np & ml, \end{matrix}$$

welche zwei Gerade des Doppelsechses enthalten. Man sieht daher, dass es unter den 15 Dreiecken A und B 9 Dreiecke gibt, von welchen je zwei Seiten dem Doppelsechs angehören und zwar sind darunter drei Dreiecke A und sechs Dreiecke B. Die sechs übrigen Dreiecke vom Typus

$$\begin{matrix} im & kn & lp \\ im & kp & ln \end{matrix}$$

enthalten keine Gerade des Doppelsechses. Darunter sind zwei Dreiecke A und vier Dreiecke B.

Zieht sich nun eine Oeffnung der Fläche zum Knoten zusammen, so gehen die Geraden des betreffenden Doppelsechses durch den Knotenpunkt und fallen hiebei paarweise zusammen, und zwar fallen diejenigen Geraden, welche vorher nicht in einer Ebene lagen, also diejenigen, welche im Schema unter einander stehen, zusammen, indem zwei Gerade, welche in einer Ebene liegen, bei ihrem Zusammenfallen zur Verbindungslinie von zwei Knoten werden.[1]) Die sechs Knotenstrahlen gehören nach dem Obigen paarweise drei Dreiecken A und paarweise sechs Dreiecken B an, indem jede dieser Geraden zu zwei Dreiecken B gehört. Die sechs Ovale der parabolischen Curve, welche diesen Dreiecken B eingeschrieben sind, werden zu Schleifen an dem Knotenpunkt in der Weise, dass die Geraden, welche ein erstes Oval im Knoten berühren, daselbst Tangenten sind an einem zweiten und dritten Oval; die zweiten Tangenten am Knoten dieses zweiten und dritten Ovals berühren daselbst zugleich ein viertes und fünftes Oval und die beiden andern Tangenten dieser letztern Ovale am Knoten sind daselbst Tangenten des sechsten Ovals. Wenn sich mithin ein Knoten bildet, so vereinigen sich sechs Ovale der parabolischen Curve zu e i n e m paaren Zug mit sechsfachem Punkte im Knoten.[2]) Vier Dreiecke B mit den Ovalen, welche sie einschliessen, bleiben von der Knotenbildung unberührt. Die ganze parabolische Curve besteht mithin noch aus fünf paaren Zügen.

Jede der sechs Schleifen, in welche die Ovale um den Knoten ausgeartet sind, wird noch von einer dritten Geraden berührt, welche nicht durch den Knoten geht. Diese dritten Seiten der Dreiecke B, welchen die Schleifen einbeschrieben sind, bilden die zwei Dreiecke A, von denen keine Seite durch den Knoten geht und welche gleichsam den Knoten von beiden Seiten abschliessen.[3])

---

1) Klein a. a. O. § 9.

2) Dass die parabolische Curve den Knotenpunkt zum sechsfachen Punkt hat, hat schon Schläfli in seiner grossen Abhandlung „über Flächen dritter Ordnung“ (Phil. Trans. 1863. vol. 153) erwähnt.

3) Zeuthen „Études des propriétés de situation des surfaces

3. Die Fläche enthält 10 Durchgänge oder Oeffnungen. [1]) Nach der gewählten Bezeichnung sind dieselben

(135), (146), (245), (236);
(123), (156), (345);
(124), (256), (346).

Wenn wir das Rodenberg'sche Modell Nr. 1 der Diagonalfläche zu Grunde legen, so stellen die vier ersteren die vier Arme dar, welche den mittleren Theil der Fläche mit den äussern Theilen verbinden; ich will sie die „innern" Oeffnungen nennen; die drei in zweiter Reihe stehenden, die sofort sichtbaren Oeffnungen der Fläche darstellend, nenne ich die „äussern" Oeffnungen; die drei in letzter Reihe stehenden erstrecken sich auf dem Modell durch das Unendliche.

Welche von den Oeffnungen wir nun zum Knoten zusammenziehen, immer erhalten wir wesentlich dieselbe Figur für die parabolische Curve. Ziehen wir eine der innern Oeffnungen z. B. (146) zum Knoten zusammen, so haben wir eine Fläche I mit einem Knoten nach der Bezeichnung von Klein und Rodenberg. Die zwei den Knoten abschliessenden Dreiecke A sind hier

36, 24, 15
12, 34, 56.

Auf dem ersteren stehen die drei Schleifen, welche auf dem mittleren Theil der Fläche liegen; die drei Schleifen auf dem äusseren Theile stehen auf dem zweiten Dreieck. (Hiebei geht der mittlere Schleifen über den Rücken des an den Knoten stossenden Flügels der Fläche durch das Unendliche und berührt 12 von unten kommend.)

---

cubiques", Math. Ann. VIII, p. 15, bezeichnet dieselben beiden Dreiecke A als die „Oeffnung" abschliessend, aus welcher der Knoten entstanden.

1) Klein, a. a. O. § 13 Anm., Rodenberg „Erklärungen" p. 5.

Wir erhalten aber eine Curve derselben Art, wenn wir eine äussere Oeffnung z. B. (123) zusammenziehen. Die beiden den Knoten abschliessenden Dreiecke sind hier

15, 24, 36
14, 26, 35;

im Wesentlichen ist nichts geändert.

4. Wird der Knoten durch Trennung aufgelöst, so geht die Fläche in eine Fläche II mit 15 Geraden über, unter welchen 9 Gerade mit reellen Asymptotenpunkten sich befinden. Die Geraden durch den Knoten sind imaginär geworden und schliessen daher die Schleifen der parabolischen Curve nicht mehr ein; die drei Schleifen auf der einen Seite des Knoten, sowie die drei Schleifen auf der andern Seite desselben fliessen an dem dem Knoten benachbarten Theile zusammen, die vorderste Kuppe in einem Zuge umschliessend und mit den drei Ausbuchtungen sich auf die Seiten je eines der den Knoten abschliessenden Dreiecke A stützend.[1]) Hierzu kommen noch vier Ovale, vier Dreiecken B eingeschrieben, so dass die ganze parabolische Curve aus sechs paaren Zügen besteht.

---

1) Diese beiden Curvenzüge werden auch bei weiterer Deformation der Fläche immer, vermöge ihrer Lage auf der Fläche, ihre Entstehung aus je drei Schleifen mehr oder weniger deutlich erkennen lassen, und es würde kein richtiges Bild von dem Verlaufe dieser Curventheile geben, wollte man sie analog den vier andern Theilen der Curve als Ovale bezeichnen, die nun eben je einem Dreieck A eingeschrieben sind (wie Zeuthen a. a. O. p. 9 und Rodenberg „Erklärungen" p. 18). Dieses ersieht man, wenn man z. B. den in Nr. 3 betrachteten Knoten (146) durch Trennung auflöst, oder auch, wenn man den Knoten (135) bildet und sodann trennt und bemerkt, dass der untere Zug den Knoten umgebend mit seinen Ausbuchtungen die Geraden 12, 34, 56, der obere die Geraden 16, 23, 45 berührt.

5. Wir bilden nun eine Fläche mit zwei conischen Knoten, indem wir zwei, nicht benachbarte, Oeffnungen [1]) der Fläche zu Knoten zusammenziehen. Wie Herr Rodenberg gezeigt hat, entsteht nämlich durch das gleichzeitige Zusammenziehen zweier benachbarter Knoten immer ein biplanarer Punkt [2]), womit ein Zerfallen des Pentaeders und hiemit auch eine Degeneration der parabolischen Curve verbunden ist. Wir gehen hier auf diese besonderen Singularitäten nicht ein. Zwei nicht benachbarte Oeffnungen haben nun in ihrer oben (n° 2) angeführten Bezeichnung immer nur eine Ziffer gemeinsam, während zwei benachbarte Oeffnungen zwei Ziffern in ihrer Bezeichnung gemeinsam haben. [3]) Es seien daher

$$(ikl)\ ,\ (imn)$$

die zwei Oeffnungen, die zu Knoten werden, wo wie oben i k l m n p die sechs Indices 1 bis 6 bezeichnen. Es fallen dann die Geraden

$$i\ p'\ \ kl\ \ mn$$

in der Verbindungslinie der Knoten zusammen und das Dreieck

$$kl,\ \ mn,\ \ ip \qquad (1)$$

verschwindet. Dieses Dreieck ist immer ein Dreieck B. Denn wenn wir von den in Nr. 3 angegebenen 10 Oeffnungen der Fläche irgend zwei wählen, welche nicht benachbart sind und mithin nur eine Ziffer in ihrer Bezeichnung gemein haben, so bezeichnen die zwei Paare der übrigen Ziffern immer Gerade, wie sie im Schema B beisammen stehen. Mit dem Zufallen der Geraden k l, m n verschwindet mithin

---

1) Rodenberg, Erklärungen zu den Modellen p. 6.

2) Ebendaselbst p. 20.

3) Ebendaselbst p. 8.

auch ein Oval der parabolischen Curve. Aber jede dieser beiden Geraden kl, mn gehören noch zwei Dreiecken, nämlich

$$\left.\begin{array}{lll} kl & mi & np \\ kl & mp & ni \\ & & \\ mn & ki & lp \\ mn & kp & li \end{array}\right\} \qquad (2)$$

und

an, von welchen je eines ein Dreieck A das andere ein Dreieck B sein muss.

Die Seiten dieser Dreiecke umfassen alle durch die zwei Knoten gehenden Geraden und zwar gehen in jedem dieser vier Dreiecke, abgesehen von den zusammenfallenden Geraden kl, mn, je eine Seite durch den einen Knoten und die andere durch den andern Knoten. Die Ovale, welche den zwei Dreiecken B unter diesen vier Dreiecken eingeschrieben sind, gehen mithin ebenfalls durch die beiden Knoten und berühren daselbst die Seiten ihrer Dreiecke. Sie zerfallen daher in die Seite kl, resp. mn und je einen Curvenzweig, welcher die zwei Knoten verbindet. Die Verbindungslinie der zwei Knoten, als zu zwei zerfallenen Ovalen gehörig, zählt mithin zweifach als Theil der parabolischen Curve. Die zwei Curvenzweige aber, die Knoten verbindend, schliessen einen elliptisch gekrümmten Theil der Fläche ein.

Wir sahen früher, dass in jedem Knotenpunkt sechs Dreiecke B zusammenstossen. Die bisher betrachteten drei Dreiecke B, nämlich (1) und die zwei Dreiecke B in (2), sind den beiden Knoten gemeinschaftlich; die vier durch einen Knoten gehenden Geraden gehören mithin noch drei Dreiecken B an und es schliessen sich mithin an die die Knoten verbindenden Curvenzweige an jedem Knoten drei Schleifen an, von welchen eine Schleife auf derjenigen Seite des Knotens, auf welcher die verbindenden Curvenzweige laufen, liegt, die zwei andern

Schleifen aber auf der andern Seite des Knotens verlaufen. (Das Oval (1), welches man als auf den einen Asymptotenpunkt auf ip reducirt ansehen kann, vertritt die dritte äussere Schleife). Die parabolische Curve bildet also einen paaren Zug durch die beiden Knoten, der jeden dieser Punkte zum vierfachen Punkt hat.[1])

Aus (1) ergeben sich noch die zwei Dreiecke

$$\left.\begin{array}{ccc} ip & km & ln \\ ip & kn & lm \end{array}\right\} \qquad (3)$$

gebildet von den fünf Geraden mit reellen Asymptotenpunkten, die nicht durch die Knoten gehen. Das eine dieser Dreiecke ist nothwendig ein Dreieck A, das andere ein Dreieck B (n° 1). Letzteres enthält noch ein Oval, das von der Knotenbildung unberührt geblieben ist und die gemeinsame Gerade ip der zwei Dreiecke in dem Punkte berührt, der harmonisch liegt zu dem Durchschnittspunkte mit der Knotenlinie kl (mn). Die zwei andern Seiten dieses Dreiecks B berühren die beiden Schleifen, welche an den zwei Knoten auf der Seite der dieselben verbindenden Curvenzweige liegen. Die zwei andern Schleifen aber an dem einen und andern Knoten stützen sich auf zwei Seiten des Dreiecks A (3) in deren Asymptotenpunkten, während die dritte, den beiden Dreiecken (3) gemeinschaftliche, Seite ip seine Asymptotenpunkte in dem Berührungspunkt des Ovals in dem Dreieck B (3) und in dem Durchschnitt mit der Verbindungslinie kl (mn) der Knoten besitzt.

Bilden wir z. B. durch Zuziehung der innern Oeffnungen die Knoten

$$(146), \ (245),$$

so ist die Fläche nach Klein-Rodenberg'scher Bezeichnung

1) Schläfli, Philos. Trans. Vol. 153, p. 210.

eine I mit zwei Knoten. Die Verbindungslinie der Knoten ist

25 — 16;

die zwei Dreiecke (3) sind

34, 12, 56 (A)
34, 15, 26 (B)

Die zwei Curvenzweige, welche die Knoten verbinden, laufen über den mittleren Theil der Fläche; auf eben demselben liegt noch eine Schleife am ersten Knoten, 15 berührend und eine am zweiten Knoten, 26 berührend. Die Schleifen auf den äussern Theilen der Fläche, stehen auf den Geraden 12, 56 des Dreiecks A und zwar lauft an dem Knoten (146) die eine zwischen den Geraden 14, 23 zur Berührung mit 56, die anderen zwischen den Geraden 35, 46 über den Rücken des anstossenden Flügels zur Berührung mit 12 (von unten); am Knoten (245) die eine Schleife zwischen 36, 45 zur Berührung mit 12, die andere zwischen 13, 24 über den Rücken des anstossenden Flügels zur Berührung mit 56 (von unten kommend).

Wir erhalten aber im Wesentlichen ganz dieselbe Curve, wenn wir eine äussere und eine innere Oeffnung zu Knoten werden lassen z. B.

(123), (245),

in welchem Fall die Dreiecke (3)

26, 14, 35 (A)
26, 15, 34 (B)

sind, oder, wenn wir zwei äussere Oeffnungen z. B.

(123), (345)

zu Knoten zusammenziehen, in welchem Falle die Dreiecke (3)

36, 15, 24 (A)
36, 14, 25 (B)

sind. Der Verlauf der Curven ist immer, übereinstimmend mit der allgemeinen Darlegung, in allen Fällen derselbe.

6. Löst man einen der zwei Knoten durch „Verbinden“ auf, so ziehen sich die zwei Ovale, welche die, die zwei Knoten verbindenden, Curvenzweige bildeten, wieder als Schleifen an den bestehen bleibenden Knoten; zugleich treten die zwei Geraden kl, mn, welche zusammengefallen waren, wieder auseinander und es bildet sich zwischen denselben wieder ein Oval, dem Dreieck (ip, kl, mn) eingeschrieben als sechste Schleife des Knotens. Man sieht, dass dieses letztere Oval sich als Schleife von dem einen Knoten zum andern zieht, wenn man bald den einen, bald den andern Knoten durch Verbinden auflösst, wobei die vorher vereinigt liegenden Geraden kl, mn nach verschiedenen Richtungen auseinandertreten. Es kann hiebei das Oval von der einen Seite der Geraden ip, auf welche es sich stützt, auf die andere übertreten. Bilden wir z. B. in dem Modell Nr. 1 die zwei Knoten

(135), (146),

so fallen die zwei Geraden 35, 46 zusammen; das Dreieck (12, 35, 46) verschwindet, sowie das Oval, das es einschliesst. Löst man nun den obern Knoten (146) durch Verbinden auf, so erscheint das Oval wieder als Schleife am Knoten (135), die Gerade 12 von oben berührend; löst man aber den untern Knoten (135) auf, so erscheint das Oval als Schleife am obern Knoten (146), die Gerade 12 von unten berührend. Es ist auch klar, dass ein Oval bei allmähliger Deformation der Fläche nur dann auf die andere Seite einer Geraden, welche es berührt, übergehen kann, wenn es vorher durch Knotenbildung und dadurch bedingtem Zusammenfallen von Geraden, sich auf den Asymptotenpunkt der Geraden zusammengezogen hat.

Lösen wir einen der zwei Knoten

(ikl), (imn)

durch Trennung auf (Fläche II mit einem Knoten), wobei

22*

die Geraden k l, m n als imaginäre Gerade sich trennen, so wird ebenfalls das Oval, welches bei dem Zusammenfallen von k l und m n verschwunden war, wieder sich bilden; denn der Asymptotenpunkt auf i p ist reell geblieben, und an diesem berührt die Gerade einen reellen Zug der parabolischen Curve. Das Oval wird aber nun i p auf Seite des getrennten Knotens berühren und mit den andern Zügen um denselben zusammenfliessen (n° 4). Der zwischen den zwei Knoten sich hinziehende elliptisch-gekrümmte Flächentheil fliesst mit der Schleife des getrennten Knotens, welche auf derselben Seite desselben liegt, zusammen, und bildet eine für drei Ovale zählende Schleife am nicht getrennten Knoten.

Löst man die beiden Knoten durch Trennen auf, so geht die Fläche in die Art III mit 7 Geraden über. Es bleiben nämlich nur die fünf Geraden der zwei Dreiecke (3) (n° 5) und die zwei Geraden i′, p mit imaginären Asymptotenpunkten reell. Man ersieht leicht, wie sich hier die parabolische Curve gestalten wird. Das Oval dem Dreieck B (3) eingeschrieben bleibt erhalten. Der auf dem mittleren Theile der Fläche zwischen den zwei die Knoten verbindenden Curvenzweigen liegende elliptisch gekrümmte Flächenstreifen fliesst mit den zwei Schleifen, welche an den Knoten auf derselben Seite liegen, in der Nähe der Knoten zusammen und es bildet sich so aus vier Ovalen ein Curvenzug, die Kuppen der getrennten Knoten umschliessend. Ebenso fliessen an jedem der beiden Knoten die zwei auf der andern Seite desselben liegenden zwei Schleifen zusammen den getrennten Knoten von der andern Seite umgebend. Zu diesen kommt noch das Oval, welches dem Dreieck (i p, k l, m n) eingeschrieben durch Zusammenfallen der Seiten k l, m n verschwunden war und bei dem Trennen der Knoten sich wieder bildet. Die zwei Geraden k l, m n trennen sich hiebei als punktirt-imaginäre Gerade, da sie mit i p eine reelle Ebene bestimmen. Der gemeinsame reelle Punkt dieser

Geraden, Berührungspunkt der Ebene mit der Fläche muss nothwendig auf einem elliptisch-gekrümmten Theil derselben liegen; dieser Theil berührt ip in einem der Asymptotenpunkte.

7. Wir ziehen jetzt drei nicht benachbarte Oeffnungen der Fläche zu Knoten zusammen. Seien

$$(ikl),\ (imn),\ (kmp)$$

die drei Knoten, dann fallen die Geraden

$$kl \text{ und } mn,\quad in \text{ und } kp,\quad il \text{ und } mp \qquad (1)$$

paarweise in der Verbindungslinie des 1. und 2. Knotens, des 2. und 3. und des 3. und 1. Knotens zusammen. Durch den 1. Knoten gehen noch die Geraden

$$ik,\ np,$$

durch den 2. Knoten die Geraden

$$im,\ lp,$$

und durch den 3. die Geraden

$$km,\ ln.$$

Es bleiben nur noch die drei Geraden

$$km,\ lm,\ ip \qquad (2)$$

übrig, welche nicht durch die Knoten gehen. Während wir nun bei Flächen mit zwei Knoten sahen, dass die fünf unären Geraden mit reellen Asymptotenpunkten immer ein Dreieck A und ein Dreieck B bildeten und sich daher nur ein Typus für die parabolische Curve ergab, welche zwei Oeffnungen der Fläche auch zu Knoten zusammengezogen wurden, haben wir hier zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem das von den unären Geraden 2) gebildete Dreieck ein Dreieck A oder ein Dreieck B ist.

Betrachten wir zunächst den Fall, in welchem das Dreieck 2) ein Dreieck A ist, dann folgt hieraus sofort, dass die Dreiecke

kl, nm, ip; kn, li, mp; in, lm, kp; (3)
km, ln, ip; kn, lp, im; ik, lm, np; (4)

Dreiecke B sind. Die drei Dreiecke 3), je eines der Paare 1) als Seiten enthaltend, verschwinden und hiemit verschwinden auch die Ovale, welche sie einschliessen; die Dreiecke 4) enthalten je zwei Seiten, welche durch einen der Knotenpunkte hindurchgehen und die Ovale, welche sie einschliessen und diese Geraden im Knoten berühren, verwandeln sich mithin in Schleifen der parabolischen Curve; dieselben gehen respective durch den 1., 2., 3. Knoten und berühren je eine Seite des Dreiecks 2).

Ausser den Dreiecken 2), 3), 4) haben wir noch folgende acht:

il, mn, kp	kl, im, np; in, lp, km; mp, ik, ln;	(5)
kl, in mp	mn, lp, ik; kp, im, ln; il, mk, np;	(6)

und vermöge des Gesetzes, nach welchem die Dreiecke A und B in ihrer Bezeichnung von einander abhängen (n° 1), erkennt man leicht, dass entweder die Dreiecke 5) sämmtlich Dreiecke A sind und die Dreiecke 6) Dreiecke B sind oder umgekehrt. Die beiden Fälle sind nicht verschieden. Zuerst ersieht man, dass die ersten Dreiecke in den beiden Reihen zusammenfallen mit dem Knotendreieck. Die in den Verbindungslinien der Knoten zusammenfallenden Geraden bilden also in dem hier betrachteten Falle immer zugleich ein Dreieck A nnd ein Dreieck B. Das Oval aber diesem Dreieck B eingeschrieben zerfällt in die drei Seiten des Dreiecks; d. h. das Knotendreieck stellt selbst ein Oval der parabolischen Curve dar. Nehmen wir an die Dreiecke 5) seien die Dreiecke B, so gehört mithin jede der Geraden il, mn, kp zwei Dreiecken B an, nämlich einem Dreieck 3) mit zusammenfallenden Seiten und dem Knotendreieck. Ebenso gehören die Seiten kl, in, mp, welche mit ihnen zusammenfallen noch je einem zweiten Dreieck B an; diess sind die drei andern Dreiecke 5). Von diesen gehen die zwei anderen Seiten immer durch zwei verschiedene Knoten hindurch; so ist z. B. das Dreieck kl, im, np von der Verbindungslinie des ersten und zweiten Knotens gebildet, einer Geraden np durch den ersten und einer Geraden im durch den zweiten Knoten. Die Ovale diesen Dreiecken eingeschrieben zerfallen mithin in eine Verbindungslinie zweier Knoten und einen Curvenzug der die zwei Knoten, ausserhalb des Bereichs, welchen das Knotendreieck auf der Fläche abschliesst, verbindet. Diese Curvenzüge schliessen sich an den Knoten an die Schleifen an, so dass die ganze parabolische Curve aus einem Zuge besteht, der zweimal nacheinander durch jeden der Knoten hindurchgeht. Die Schleifen stützen sich auf das Dreieck A 2) gebildet von den unären Geraden der Fläche. Da die Verbindungslinie zweier Knoten zwischen denselben zweimal als Theile zerfallener Ovale auftritt, mithin als Theil der parabolischen Curve doppelt zählt, so ist die ganze von der Curve umschlossene Fläche elliptisch gekrümmt.

Bilden wir z. B. auf Modell Nr. 1 durch Zuziehung dreier innern Oeffnungen die Knoten

$$(146),\ (245),\ (236),$$

so ist hier

$$i = 4,\quad m = 2,\quad k = 6,\quad l = 1,\quad n = 5,\quad p = 3$$

zu setzen. In den Verbindungslinien der Knoten fallen zusammen zwischen dem 1. und 2. die Geraden

$$16 - 25,$$

zwischen dem 2. und 3.

$$45 - 46,$$

zwischen dem 3. und 1.

$$14 - 23.$$

Die unären Geraden bilden das Dreieck A (56, 34, 12). Die Curve bildet nur einen Zug. Sie geht 35 berührend durch den 1. Knoten und kehrt 46 berührend zu ihm zurück; läuft sodann zum 2. Knoten, den sie 13 berührend durchsetzt; geht 24 berührend zum zweitenmal durch ihn hindurch, lauft im Bogen zum 3. Knoten, den sie 15 berührend durchsetzt kehrt 26 berührend zu ihm zurück und lauft sodann im Bogen zum 1. Knoten 35 berührend zurück. Die drei Verbindungsbögen umgeben das Knotendreieck, das selbst ein Oval der Curve darstellt. [1])

8. Betrachten wir nun den Fall, in welchem das Dreieck 2) gebildet von den unären Geraden der Fläche ein Dreieck B ist. Dann sind die Dreiecke 3) mit je zwei zusammenfallenden Seiten immer Dreiecke B, aber die Dreiecke 4) werden Dreiecke A. Hieraus folgt sodann durch Vertauschung der Indices, dass sowohl die Dreiecke 5) als auch die Dreiecke 6) Dreiecke B werden, mit Ausnahme der ersten der Reihen

il, mn, kp; kl, in, mp.

Was diese beiden Dreiecke anbetrifft, so ergeben sie sich als Dreiecke A. Während also im vorigen Falle in dem Knotendreieck ein Dreieck A und ein Dreieck B zusammenfiel, fallen bei der jetzt betrachteten Fläche in demselben zwei Dreiecke A zusammen, und es stellt mithin auch dieses Dreieck kein Oval der parabolischen Curve dar. Ausser dem Oval in dem Dreieck 2) und den verschwindenden in den Dreiecken 3) befinden sich nur in den sechs übrigen Dreiecken 5) 6) Ovale der Curve. Diese letzteren Dreiecke aber sind sämmtlich gebildet aus der Verbindungslinie zweier Knoten und zwei Geraden, von denen die eine durch den einen die andere durch den andern Knoten hindurchgeht und zwar gehören die in 5) 6) untereinanderstehenden zu denselben

---

1) Die drei Schleifen laufen auf dem Modelle über die Rücken der Flügel weg und berühren die unären Geraden, (die 1. Schleife 12, die 2. 56, die 3. 34) von unten.

zwei Knoten. Die Ovale, welche sie enthalten, zerfallen mithin wieder in die Knotenlinie und einen Curvenzug, welcher die beiden Knoten verbindet. Die parabolische Curve hat also in diesem Falle einen wesentlich anderen Typus als in dem erstbetrachteten Falle; sie besteht aus einem Ovale und einem Curvenzug, der wieder jeden Knotenpunkt zum Doppelpunkte hat, aber nicht Schleifen an den Knoten bildet, sondern die drei Knoten nach der Reihe zweimal umkreist. Die Verbindungslinie zweier Knoten gehört wieder zwei zerfallenen Ovalen an und ist als Theil der Curve doppelt zählend; der ganze Flächentheil, welcher zwischen den zwei Curvenzügen liegt, welche je zwei Knoten verbinden, ist mithin elliptisch gekrümmt.

Während die in Nr. 5 betrachtete Fläche eine Fläche I mit drei Knoten ist, ist die hier betrachtete eine sogenannte „inverse" Fläche I'. Zu dieser Gattung gehört das Eingangs erwähnte Modell Nr. 7 der Rodenberg'schen Sammlung. Dasselbe ist hervorgegangen durch Bildung der Knoten

$$(123), \quad (156), \quad (345);$$

Es ist mithin hier

$$i = 1, \quad k = 3, \quad l = 2, \quad m = 5, \quad n = 6, \quad p = 4$$

zu setzen. Ein Oval der Curve ist dem Dreieck der unären Geraden 2)

$$36, \; 25, \; 14$$

eingeschrieben. In den Verbindungslinien der Knoten fallen zusammen zwischen dem 1. und 2. Knoten die Geraden

$$23 - 56,$$

zwischen dem 2. und 3.

$$16 - 34,$$

zwischen dem 3. und 1.

$$12 - 45$$

Der Verlauf des Curvenzuges durch die Knoten ist dann folgender. Er geht 46 berührend durch den 1. Knoten, 15 berührend durch den 2., 26 berührend durch den 3., 13 berührend durch den 1., 24 berührend durch den 2., 35 berührend durch den 3. und kehrt 46 berührend zu dem 1. Knoten zurück. [1])

9. Diese eben betrachtete Fläche ist, wie schon bemerkt, eine der von Herrn Rodenberg als „inverse" bezeichneten Flächen. [2]) Diese inversen Flächen erhielt Herr Klein zuerst [3]), indem er ausgehend von einer Fläche mit vier Knoten zunächst durch den Prozess des Verbindens oder des Trennens der Knoten die andern Schlaefli'schen Arten erzeugte und hierauf, sofern es die Natur der Fläche gestattete, einen oder mehrere Knotenpunkte durch die biplanare Form hindurch sich ändern liess. Herr Klein erhielt auf diese Weise eine Reihe neuer Flächen, so zumal aus einer Fläche I mit drei Knoten drei Flächen, welche er durch I′, I″, I‴ bezeichnet, je nachdem er einen, zwei oder drei Knoten durch die biplanare Form hindurchgehen liess. Indessen zeigte Herr Rodenberg [4]), dass die Flächen I′ und I″ nicht wesentlich verschieden sind, indem sie durch lineäre Transformation in einander übergeführt werden können, und dass aus demselben Grunde die Fläche I″ im Wesentlichen nicht verschieden ist von der Fläche I. Im Ganzen ergeben sich ihm nur folgende inverse Flächen: die eine Fläche

I′ mit drei Knoten

und die aus dieser durch Trennung der Knoten hervorgehenden Flächen,

---

1) Auf dem Modelle scheinen die unterhalb des Knotendreiecks verlaufenden Curvenzüge von einem Knoten zum nächsten durch das Unendliche zu gehen.

2) Rodenberg „Zur Classification der Flächen dritter Ordnung." Math. Ann. XIV. p. 58.

3) Klein a. a. O. §. 5.

4) Rodenberg „Classification" etc. § 3.

II′ mit zwei Knoten
III′ mit einem Knoten
IV″ ohne Knoten.[1])

In seinen Erklärungen zu den Modellen zeigt sodann Hr. Rodenberg, wie sich der Durchgang eines Knotens durch die biplanare Form dadurch an der Fläche kenntlich macht, dass an die Stelle eines Knotens aus einer der innern Oeffnung gebildet ein Knoten tritt, gebildet aus einer benachbarten äussern Oeffnung.

So erhalten wir durch Zuziehung dreier innern Oeffnungen eine Fläche I. Dazu gehört die in n° 7 betrachtete Fläche. Ersetzen wir nun die drei Knoten (oder auch nur einen derselben) durch Knoten aus äussern Oeffnungen gebildet, so entsteht eine inverse Fläche I′, wozu die im vorigen n° betrachtete Fläche gehört; während, wenn wir die Veränderung an zwei Knoten vornehmen, die Fläche eine I bleibt.

Es ist nun bemerkenswerth, dass wir dieselben inversen Flächen, wie Herr Rodenberg erhalten, wenn wir sie uns durch den abweichenden Typus ihrer parabolischen Curve charakterisirt denken. Es hat nämlich schon Herr Rodenberg hervorgehoben, dass bei einer inversen Fläche I′ die drei unären Geraden ein Dreieck B bilden, während sie

---

1) Ausser diesen Flächen führt Herr Rodenberg noch die
VI′ mit isolirtem Knoten
und die daraus durch Verschwinden des Knotens hervorgehende IV′ ohne Knoten als inverse Flächen an, indem Herr Klein die Fläche IV′ aus einer Fläche IV mit einem Knoten durch den Durchgang desselben durch einen biplanaren Knoten mit imaginären Ebenen entstehen liess. Da aber diese Fläche auch aus der Fläche V durch Reducirung des paaren Theils auf einen Punkt entstanden gedacht werden kann und nicht den hier zu besprechenden Charakter einer inversen Fläche trägt, so zähle ich diese Flächen nicht zu den inversen.

bei einer Fläche I mit drei Knoten ein Dreieck A bilden, und wir ersahen aus den letzten Betrachtungen, dass in diesen zwei Fällen auch die parabolische Curve wesentlich verschiedene Formen hat. Wir erhalten daher zunächst bei Flächen mit drei Knoten dieselbe parabolische Curve, ob wir wie in dem Beispiel in n° 7 eine Fläche I bilden durch Zusammenziehung dreier innern Oeffnungen, oder ob wir eine innere Oeffnung und zwei äussere, z. B.

(123), (146), (345)

zu Knoten zusammenziehen. Hingegen hat die parabolische Curve denselben Typus wie bei der in n° 8 betrachteten inversen Fläche, wenn wir statt drei äussern Oeffnungen zwei innere und eine äussere, z. B.

(123), (146), (245)

zu Knoten werden lassen.

Gehen wir nun von einer inversen Fläche I′ mit drei Knoten auf eine Fläche mit weniger Knoten über, so findet man, dass man durch „Verbinden" der Knoten keine verschiedenen Typen der parabolischen Curven erhalten werde; denn die Fläche geht hiedurch zunächst über in eine Fläche I mit zwei Knoten und wir sahen, dass bei dieser Fläche, welche Knoten sie auch haben mag, keine verschiedenen Formen der parabolischen Curve auftreten. Es wird sich daher auch, wenn man nun in dieser Fläche einen oder beide Knoten auflöst, in allen Fällen dieselbe Curve ergeben. Wir können also nur durch Trennung der Knoten aus einer inversen Fläche I′ mit drei Knoten Flächen mit weniger Knoten erhalten, welche sich in Bezug auf ihre parabolische Curve von andern Flächen mit derselben Knotenzahl unterscheiden. Wir gelangen so zu den von Hrn. Rodenberg aufgezählten inversen Flächen II′, III′, IV″. Dass bei diesen Flächen die parabolische Curve ihren besonderen Charakter behält, gegenüber den Flächen II, III, IV, welche aus einer nicht-inversen Fläche I mit drei Knoten durch Auflösen von einem oder zwei oder drei Knoten mittelst des Prozesses des Trennens erhalten werden, beruht hauptsächlich darauf, dass, wie wir sahen, bei einer I mit drei Knoten das Knotendreieck ein Oval der Curve darstellt, und ein Curvenzug die drei Knoten umschlingt. welcher einen elliptisch-gekrümmten Flächentheil abschliesst, was bei einer I′ mit drei Knoten nicht der Fall ist. Lassen wir z. B. eine IV″ entstehen, indem wir in der in n° 8 betrachteten Fläche I′ mit den Knoten

(123), (156), (345),

durch das Rodenberg'sche Modell Nr. 7 dargestellt, die drei Knoten durch Trennen auflösen, was einer Ausfüllung der drei äussern Oeffnungen, aus welchen die Knoten entstanden, entspricht, so zertheilt sich die Curve in drei Züge, von denen jeder die Kuppen zweier getrennter Knoten umzieht. Wenn wir aber in der Fläche I mit den drei Knoten

(146), (245), (236)

(n° 7) die Knoten trennen, wodurch eine IV entsteht, so lösen sich die drei Schleifen von dem durch die drei Knoten laufenden Zuge los und letzterer unter den Kuppen der getrennten Knoten sich herumziehend begrenzt den obern elliptisch-gekrümmten Theil des Mittelstücks des Modells (wenn wir das Modell Nr. 1 zu Grunde legen). Nun werden allerdings durch das Trennen der Knoten aus früher (n° 6) angegebenen Gründen, noch andere elliptisch-gekrümmte Parthien der Fläche entstehen, auf der einen Fläche sowohl wie auf der andern, welche die unären Geraden der Fläche in ihren zweiten Asymptotenpunkten berühren. Diese Parthien können bei weiterer Deformation sich übrigens unbeschränkt ausbreiten. Aber während auf der Fläche IV″ es immer ein Oval gibt, welches dem Dreieck (B) der Geraden der Fläche eingeschrieben ist und sich nie mit einem andern

Zug der parabolischen Curve verbinden kann, so haben wir auf der Fläche IV (ohne Knoten) immer einen geschlossenen Zug auf einem von den drei Geraden der Fläche abgegrenzten Gebiet [1]), welcher diese Geraden nicht berührt und sich nicht mit den andern Theilen der parabolischen Curve verbinden kann, da diese zwar die Geraden in den Asymptotenpunkten berühren, aber immer ausserhalb dieses abgegrenzten Gebiets verlaufen.

10. Zu den drei Knoten einer inversen Fläche I′ kann kein vierter Knoten hinzutreten [2]); wohl aber kann auf der Fläche I mit den drei Knoten

(146), (245), (236)

noch der vierte Knoten

(135)

gebildet werden. Man sieht dann sofort, dass die drei Ovale, welche auf der Fläche mit drei Knoten um das Knotendreieck herumliegen, jedes aus der Verbindungslinie von zwei Knoten und einem diese Knoten verbindenden Curvenzug bestehend, durch Bildung des letzten Knotens selbst zu Knotendreiecken werden, so dass bei einer Fläche mit vier Knoten die vier Ovale, welche immer auf dem mittleren Theil der Fläche liegen, geradezu sich in die vier Seitenflächen des Knotentetraeders ausgebreitet haben. Es ist desshalb der ganze tetraedrale Theil der Fläche elliptisch gekrümmt, wie bekannt.

Löst man die sämmtlichen vier Knoten durch Trennung auf, so entsteht die aus zwei Theilen bestehende Fläche V.

---

1) Bei der durch Trennung der Knoten (146), (245), (236) erzeugten Fläche IV ist es der Zug, der den obern Theil des Mittelstücks des Modells abgrenzt und durch die Geraden 12, 34, 56 von dem andern Theil der Curve getrennt ist.

2) Rodenberg „Classification etc.“ a. a. O. p. 55.

Der paare Theil bleibt natürlich elliptisch gekrümmt und man ersieht leicht, wie die parabolische Curve auf dem unpaaren Theil verlauft. Gehen wir immer von dem Modell Nr. 1 aus, so verlauft ein Curvenzug auf dem mittleren Theil, der von den Geraden der Fläche 12, 34, 56 abgegrenzt wird, mit drei Ausbuchtungen diese Gerade berührend. Ein zweiter Zug verlauft auf dem äussern Theile, die drei Geraden an den äussern Asymptotenpunkten berührend und unter den Kuppen der getrennten Knoten sich hinziehend. Der zwischen den zwei Zügen liegende Theil der Fläche ist hyperbolisch gekrümmt, der ganze ausserhalb liegende Theil elliptisch gekrümmt.

Lassen wir den paaren Theil dieser Fläche V in einen Punkt übergehen, so erhalten wir die von Herrn Klein und Rodenberg mit IV′ bezeichnete Fläche mit isolirtem Knoten. Rückt der Knoten auf die Fläche selbst herab, so entsteht ein biplanarer Knoten mit imaginären Ebenen. Hr. Rodenberg hat im Modell Nr. 11 eine Fläche mit dieser Singularität dargestellt, und man wird sofort erkennen, wie die auf dem Modell verzeichnete parabolische Curve sich aus der oben für die Fläche V angegebenen ergibt. [1])

---

1) Die von Herrn Rodenberg modellirte Fläche ist eine spezielle, mit osculirendem Kegel; der eine Zug der Curve ist desshalb zur ebenen Curve geworden.