Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Classe

der

k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.

1883. Heft III.

München.
Akademische Buchdruckerei von F. Straub.
1884.

In Commission bei G. Franz.

Herr A. Brill spricht über:

„Bestimmung der optischen Wellenfläche aus einem ebenen Centralschnitte derselben."

Die Methoden, deren man sich zur Bestimmung der Hauptfortpflanzungsgeschwindigkeiten in Krystallen und der Gestalt der Wellenfläche bedient, beschränken sich auf Beobachtungen in solchen Schnittebenen, die gegen die Hauptelasticitätsaxen des Krystalls eine ausgezeichnete Lage haben — nicht zum mindesten, wie es scheint, wegen der rechnerischen Schwierigkeiten, die mit der Verwerthung von Beobachtungen in anderen Ebenen verbunden sind. Diese Beschränkung zu beseitigen ist bei dem Interesse, das eine genaue Erforschung der Gestalt der Wellenfläche besitzt, um so wünschenswerther, als die experimentellen Methoden sich neuerdings beträchtlich vervollkommnet haben. Ich beabsichtige nun im Folgenden zu zeigen, dass, wenn man die Fresnel'sche Theorie der Doppelbrechung zu Grunde legt, es hinreicht, die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten der Wellen (oder auch der Strahlen) in einer beliebig angenommenen Schliffebene eines Krystalls zu messen — wozu sechs Beobachtungen ausreichen — um aus einer so bekannten ebenen Querschnittsfigur der Wellenfläche (beziehungsweise Strahlenfläche) die Hauptfortpflanzungsgeschwindigkeiten in dem Krystall sowie die Lage der Schliffebene gegen die Hauptelasticitätsaxen vollständig und mit geringer Mühe bestimmen zu können. Durch die Annahme also, dass es möglich ist, die Figur eines ebenen Centralschnitts einer Wellenfläche auf experimentellem Wege zu bestimmen [1]), wird die Frage, um die es sich handelt, zu einer rein geometrischen und den Hilfsmitteln der analytischen Geometrie zugänglich gemacht.

Ein ebener Centralschnitt der Kugel enthält als einziges Bestimmungsstück den Radius der Kugel; diese Fläche ist also durch einen ihrer Centralschnitte bestimmbar. Für jede andere Fläche mit Mittelpunkt dagegen muss die Zahl der Constanten, von welcher die Fläche abhängt, von der Zahl derjenigen der ebenen Curve, die von einer beliebigen durch den Mittelpunkt gelegten Ebene aus ihr ausgeschnitten wird, übertroffen werden, und zwar im Allgemeinen um drei, wenn die Fläche aus dem Centralschnitt gerade bestimmbar sein soll. Denn denkt man sich die ebene Schnittcurve auf ein beliebiges in ihrer Ebene gelegenes rechtwinkliges Coordinatensystem mit dem Mittelpunkt der Fläche als Ursprung bezogen, so erfordert die Orientirung dieses Systems gegen ein fest mit der Fläche verbundenes räumliches Coordinatensystem (mit demselben Ursprunge) drei Constante, welche ausser denen der Fläche noch in die Gleichung der Curve eingehen, und um welche also die letztere reicher sein muss als die der Fläche. Aus diesem Grunde ist die erwähnte Aufgabe bei den Mittelpunktsflächen zweiter Ordnung, wie auch bei ihren Fusspunktsflächen, unbestimmt, indem die ebene

1) Durch Beobachtungen an dem sinnreichen Apparat zur Bestimmung von Lichtgeschwindigkeiten in Krystallen, den Herr F. Kohlrausch (Wiedemann's Annalen 1878 Band IV, p. 15) „Totalreflectometer" genannt hat, kann man, wie eine einfache Ueberlegung lehrt, die oben verlangte ebene Querschnittsfigur der Wellen- oder Strahlenfläche — ausser in den Hauptschnitten — nicht unmittelbar bestimmen. (Vergl. W. Kohlrausch, ibd. Bd. VII. p. 430). Es bleibt zu untersuchen, ob das durch die Theorie des Totalreflectometers gestellte Problem einer ähnlich eleganten Behandlung fähig ist, wie das obige.

Schnittfigur nur drei Constante enthält, ebensoviele aber in die Gleichung der Fläche eingehen.

Dagegen ist das Problem wieder bestimmt für die aus dem Ellipsoid durch eine bekannte Punktconstruction entstehende Wellenfläche (wie auch für die aus den anderen Mittelpunktsflächen zweiter Ordnung auf ähnliche Weise ableitbaren Flächen vierter Ordnung). Für dieselbe lassen sich nämlich, wie unten gezeigt wird, aus den sechs Coefficienten der Gleichung eines ebenen Centralschnitts der Wellenfläche in einfacher Weise die Coefficienten dieser Gleichung für die drei Hauptfortpflanzungsgeschwindigkeiten (die Hauptaxen des Ellipsoids, aus dessen Centralschnittaxen Fresnel die Wellenfläche construirt) zusammensetzen. Diese Gleichung erweist sich jedoch nicht, wie es dem Falle der Eindeutigkeit des Problems entsprochen haben würde, als vom dritten, sondern als vom vierten Grade. Da sich vier Grössen auf vier verschiedene Arten zu dreien gruppiren lassen, so ist die Lösung eine vierdeutige; darunter befinden sich nur zwei reelle Flächen. Durch die Schnittcurve also einer Wellenfläche mit einer Ebene, die durch ihren Mittelpunkt geht, lässt sich immer und nur noch eine bestimmte reelle von der ersten im Allgemeinen verschiedene Wellenfläche legen, die sie gleichfalls als ebenen Schnitt enthält. Ausserdem gehen noch zwei imaginäre Wellenflächen hindurch. — Ein Beispiel zu diesem Satze bietet die Bemerkung, dass ein aus einem Kreis und einer concentrischen (denselben nicht schneidenden) Ellipse bestehende Schnittcurve ebensowohl als Hauptschnitt einer Fresnel'schen Wellenfläche, wie als schiefer Centralschnitt einer optisch einaxigen Wellenfläche aufgefasst werden kann, welche letztere bekanntlich durch Gleichsetzen zweier Hauptfortpflanzungsgeschwindigkeiten eines optisch zweiaxigen Krystalls aus der Fresnel'schen Wellenfläche entsteht, und in eine Kugel und ein dieselbe in den Endpunkten eines Durchmessers berührendes Rotationsellipsoid zerfällt.

Der obige Satz gilt nicht nur von der eigentlichen Fresnel'schen Wellenfläche vierter Ordnung, deren Gleichung, auf die Symmetrieebenen (Hauptschnittebenen) als Coordinatenebenen bezogen, bekanntlich:

$$\frac{x^2 a^2}{r^2 - a^2} + \frac{y^2 b^2}{r^2 - b^2} + \frac{z^2 c^2}{r^2 - c^2} = 0$$

ist, wo:

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

ist, und die Constanten a, b, c die drei Hauptfortpflanzungsgeschwindigkeiten bedeuten, sondern auch von der ebenfalls häufig als Wellenfläche bezeichneten Fusspunktfläche 6. Ordnung der Fresnel'schen, welche von den Endpunkten der von einem Punkte des Krystalls ausgehenden Fortpflanzungsgeschwindigkeiten gebildet wird, und deren Gleichung lautet:

$$\frac{x^2}{r^2 - a^2} + \frac{y^2}{r^2 - b^2} + \frac{z^2}{r^2 - c^2} = 0.$$

Ich werde im Folgenden an die Fresnel'sche Wellenfläche anknüpfen und am Schlusse die wesentlichen Ergebnisse auf ihre Fusspunktfläche übertragen.

Transformirt man die Gleichung:

$$\frac{x^2 a^2}{r^2 - a^2} + \frac{y^2 b^2}{r^2 - b^2} + \frac{z^2 c^2}{r^2 - c^2} = 0 \qquad \ldots (1)$$

auf ein neues rechtwinkliges Coordinatensystem $x' y' z'$ mit demselben Ursprung, dessen Axe X' mit den Axen X, Y, Z des alten Systems Winkel bildet, deren Cosinus wir bez. mit α, β, γ bezeichnen wollen, sind $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$; $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ die Cosinus der Winkel, die in gleicher Weise den Axen Y', Z' zugehören, so lauten die Transformationsgleichungen;

$$\begin{aligned} x &= \alpha x' + \alpha_1 y' + \alpha_2 z' \\ y &= \beta x' + \beta_1 y' + \beta_2 z' \\ z &= \gamma x' + \gamma_1 y' + \gamma_2 z', \end{aligned}$$

wo zwischen den neun Grössen α_i, β_i, γ_i die bekannten Relationen bestehen:

$$\begin{aligned} \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 &= 1 & \alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 + \gamma_1 \gamma_2 &= 0 \\ \alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 &= 1 & \alpha_2 \alpha + \beta_2 \beta + \gamma_2 \gamma &= 0 \\ \alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2 &= 1 & \alpha \alpha_1 + \beta \beta_1 + \gamma \gamma_1 &= 0. \end{aligned}$$

Wenn es sich nur um die Schnittcurve der Ebene Y′ Z′ mit der Fläche handelt, so kann man der Vereinfachung halber gleich eingangs setzen:

$$x' = 0.$$

Dann wird zunächst:

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 = y'^2 + z'^2 = r'^2,$$

und man erhält durch Einführung der neuen Coordinaten in die Gleichung der Fläche:

$$\frac{a^2(\alpha_1 y' + \alpha_2 z')^2}{r'^2 - a^2} + \frac{b^2(\beta_1 y' + \beta_2 z')^2}{r'^2 - b^2} + \frac{c^2(\gamma_1 y' + \gamma_2 z')^2}{r'^2 - c^2} = 0,$$

oder ausgeführt, unter Weglassung des Faktors r'^2:

$$\begin{aligned} r'^2 \cdot y'^2 \cdot [\alpha_1^2 a^2 + \ldots] - y'^2 \cdot [\alpha_1^2 a^2 (b^2 + c^2) + \ldots] + \\ + r'^2 \cdot z'^2 \cdot [\alpha_2^2 a^2 + \ldots] - z'^2 \cdot [\alpha_2^2 a^2 (b^2 + c^2) + \ldots] + \\ + r'^2 \cdot 2y'z' \cdot [\alpha_1 \alpha_2 a^2 + \ldots] - 2y'z' \cdot [\alpha_1 \alpha_2 a^2 (b^2 + c^2) \\ + \ldots] + a^2 b^2 c^2 = 0, \end{aligned} \qquad (2)$$

wo in den eckigen Klammern die beiden Glieder, die durch cyclische Vertauschung von a mit b, c; α_1 mit β_1, γ_1; α_2 mit β_2, γ_2 aus den angeschriebenen entstehen, durch Punkte angedeutet sind.

Dies ist die Gleichung der ebenen Schnittcurve, die durch Einführung von Polarcoordinaten ϱ, φ mittelst der Formeln:

$$y' = \varrho \cos \varphi$$
$$z' = \varrho \sin \varphi$$
$$r' = \varrho$$

die Gestalt annimmt:

$$\begin{aligned} &\varrho^4 (A_1 \cos^2 \varphi + A_2 \sin^2 \varphi + 2 A \cos \varphi \sin \varphi) - \\ &- \varrho^2 (B_1 \cos^2 \varphi + B_2 \sin^2 \varphi + 2 B \cos \varphi \sin \varphi) + 1 = 0, \end{aligned} \tag{3}$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist:

$$\left.\begin{aligned}
A_1 &= \frac{1}{a^2 b^2 c^2} (a^2 \alpha_1^2 + b^2 \beta_1^2 + c^2 \gamma_1^2) \\
A_2 &= \frac{1}{a^2 b^2 c^2} (a^2 \alpha_2^2 + b^2 \beta_2^2 + c^2 \gamma_2^2) \\
A &= \frac{1}{a^2 b^2 c^2} (a^2 \alpha_1 \alpha_2 + b^2 \beta_1 \beta_2 + c^2 \gamma_1 \gamma_2) \\
B_1 &= \frac{1}{a^2 b^2 c^2} (a^2 (b^2 + c^2) \alpha_1^2 + b^2 (c^2 + a^2) \beta_1^2 \\
&\qquad + c^2 (a^2 + b^2) \gamma_1^2) \\
B_2 &= \frac{1}{a^2 b^2 c^2} (a^2 (b^2 + c^2) \alpha_2^2 + b^2 (c^2 + a^2) \beta_2^2 \\
&\qquad + c^2 (a^2 + b^2) \gamma_2^2) \\
B &= \frac{1}{a^2 b^2 c^2} (a^2 (b^2 + c^2) \alpha_1 \alpha_2 + b^2 (c^2 + a^2) \beta_1 \beta_2 \\
&\qquad + c^2 (a^2 + b^2) \gamma_1 \gamma_2).
\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Es handelt sich nun darum, das Gleichungssystem (4) nach den a, b, c und den α_i, β_i, γ_i aufzulösen. Aus den beiden in α_1^2, β_1^2, γ_1^2 linearen Gleichungen für A_1 und B_1 und der Bedingungsgleichung:

$$1 = \alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2$$

findet man leicht:

$$\left.\begin{aligned}\alpha_1{}^2 &= b^2c^2 \cdot \frac{A_1\,a^4 - B_1\,a^2 + 1}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)}\\ \beta_1{}^2 &= c^2a^2 \cdot \frac{A_1\,b^4 - B_1\,b^2 + 1}{(b^2 - a^2)(b^2 - c^2)}\\ \gamma_1{}^2 &= a^2b^2 \cdot \frac{A_1\,c^4 - B_1\,c^2 + 1}{(c^2 - a^2)(c^2 - b^2)}.\end{aligned}\right. \tag{5}$$

Man erhält ebenso aus den Gleichungen für A_2 und B_2:

$$\alpha_2{}^2 = b^2c^2 \cdot \frac{A_2\,a^4 - B_2\,a^2 + 1}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)} \tag{5a}$$

und die analog gebildeten Ausdrücke für $\beta_2{}^2$ und $\gamma_2{}^2$.

Von den Ausdrücken für $\alpha_1\,\alpha_2$, $\beta_1\,\beta_2$, $\gamma_1\,\gamma_2$, für deren Berechnung noch die Gleichung:

$$\alpha_1\,\alpha_2 + \beta_1\,\beta_2 + \gamma_1\,\gamma_2 = 0$$

zur Verfügung steht, schreibe ich gleichfalls nur den ersten an:

$$\alpha_1\,\alpha_2 = b^2c^2 \cdot \frac{A\,a^4 - B\,a^2}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)}.$$

Vergleicht man das Quadrat desselben mit dem Product der Ausdrücke für $\alpha_1{}^2$ und $\alpha_2{}^2$, so erhält man:

$$(A_1\,a^4 - B_1\,a^2 + 1)(A_2\,a^4 - B_2\,a^2 + 1) = (A\,a^4 - B\,a^2)^2.$$

Dies ist aber eine Gleichung vom vierten Grade für a^2, welcher zugleich die Grössen b^2 und c^2 genügen müssen, weil die Vergleichung der Ausdrücke für $\beta_1{}^2\,\beta_2{}^2$ u. s. w. genau dieselbe Gleichung für b^2 und c^2 ergeben würde.

Führt man daher statt a^2 die Bezeichnung u für die Unbekannte ein, so erhält man durch Ausrechnung:

$$\left.\begin{aligned}u^4(A_1\,A_2 - A^2) - u^3(A_1\,B_2 + B_1\,A_2 - 2\,A\,B) +\\ + u^2(A_1 + A_2 + B_1\,B_2 - B^2) - u(B_1 + B_2) + 1 = 0.\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Nun lässt sich der Coefficient des vorletzten Gliedes vermöge der Beziehungen (4) auf die Form bringen:

$$B_1 + B_2 = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} + \frac{\gamma^2}{c^2}.$$

Hieraus erhellt, dass wenn a^2, b^2, c^2 drei von den Wurzeln der Gleichung für u sind, die vierte Wurzel d^2 den Werth hat:

$$d^2 = \frac{1}{\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} + \frac{\gamma^2}{c^2}}.$$

Man kann nun irgend drei Wurzeln der Gleichung vierten Grades als die Quadrate der Hauptfortpflanzungsgeschwindigkeiten: a^2, b^2, c^2 ansprechen. Dann ergeben sich die Neigungswinkel der Ebene $X' = o$ gegen die Hauptschnitte der durch diese Annahme bestimmten Wellenfläche vermöge der Ausdrücke für die α_i β_i γ_i und der Gleichungen:

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1, \text{ u. s. w.}$$

wie folgt:

$$\begin{aligned}
\alpha^2 &= \frac{a^4 b^2 c^2}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)} \cdot \left\{ \frac{1}{b^2 c^2} + \frac{1}{d^2 a^2} - (A_1 + A_2) \right\} \\
\beta^2 &= \frac{b^4 c^2 a^2}{(b^2 - a^2)(b^2 - c^2)} \cdot \left\{ \frac{1}{c^2 a^2} + \frac{1}{d^2 b^2} - (A_1 + A_2) \right\} \qquad (7) \\
\gamma^2 &= \frac{c^4 a^2 b^2}{(c^2 - a^2)(c^2 - b^2)} \cdot \left\{ \frac{1}{a^2 b^2} + \frac{1}{d^2 c^2} - (A_1 + A_2) \right\}
\end{aligned}$$

wo wie oben d^2 die vierte Wurzel der Gleichung (6) ist.

Die Gleichungen (3), (6), (7) enthalten die Lösung der gestellten Aufgabe. Sechs Beobachtungen nämlich in der gewählten Schliffebene des Krystalls reichen hin, um die Constanten A, B in der Gleichung der Curve (3), aus welchen sich die Coefficienten der Gleichung (6) zusammensetzen, zu bestimmen. Sind alsdann:

$$u_1 \geqq u_2 \geqq u_3 \geqq u_4$$

die vier Wurzeln der Gleichung (6), und bezeichnet man irgend drei derselben mit a^2, b^2, c^2, die vierte mit d^2, so entspricht dieser Annahme eine Wellenfläche mit den Hauptfortpflanzungsgeschwindigkeiten a, b, c, während die Grössen α, β, γ (7) zur Orientirung der Schnittebene gegen die Hauptschnitte dienen. Wenn noch:

$$a^2 > b^2 > c^2$$

vorausgesetzt wird, so entsprechen den vier möglichen Annahmen die vier Colonnen der Tabelle:

	I	II	III	IV
u_1	a^2	a^2	a^2	d^2
u_2	b^2	d^2	b^2	a^2
u_3	d^2	b^2	c^2	b^2
u_4	c^2	c^2	d^2	c^2

von denen die 2., 3., 4. aus der 1. durch Vertauschung von bezw. b mit d; c mit d; a mit d mit b mit a (cyclisch) hervorgeht. Gehört also das Formelsystum (7) etwa zur ersten Colonne, so erhält man die Orientirungswinkel der den drei anderen entprechenden Schnittebenen, deren Cosinusse mit α' β' γ', α'' β'' γ'', α''' β''' γ''' bezeichnet werden mögen, durch Anwendung dieser Vertauschungen auf die Formeln (7). Vergleicht man die so erhaltenen Ausdrücke mit (7), so bekommt man:

$$\begin{aligned}
\alpha'^2 &= \gamma^2 \cdot \frac{a^2 d^2 (b^2 - c^2)}{b^2 c^2 (a^2 - d^2)}; & \alpha''^2 &= \beta^2 \cdot \frac{a^2 d^2 (c^2 - b^2)}{b^2 c^2 (a^2 - d^2)}; \\
\beta'^2 &= \beta^2 \cdot \frac{d^4 (b^2 - a^2)(b^2 - c^2)}{b^4 (d^2 - a^2)(d^2 - c^2)}; & \beta''^2 &= \alpha^2 \cdot \frac{b^2 d^2 (c^2 - a^2)}{a^2 c^2 (b^2 - d^2)}; \quad (7^a) \\
\gamma'^2 &= \alpha^2 \cdot \frac{c^2 d^2 (a^2 - b^2)}{a^2 b^2 (d^2 - c^2)}; & \gamma''^2 &= \gamma^2 \cdot \frac{d^4 (c^2 - a^2)(c^2 - b^2)}{c^4 (d^2 - a^2)(d^2 - b^2)};
\end{aligned}$$

$$\alpha'''^2 = \beta'^2;\ \beta'''^2 = \gamma^2 \cdot \frac{a^2 d^2 (b^2 - a^2)}{c^2 b^2 (d^2 - a^2)};$$

$$\gamma'''^2 = \alpha^2 \cdot \frac{c^2 d^2 (a^2 - b^2)}{a^2 b^2 (c^2 - d^2)}.$$

Indem wir uns nun zur Discussion der Realitätsverhältnisse wenden, machen wir zunächst die Annahme, dass a^2, b^2, c^2 positive Grössen sind, d. h. dass wir es mit einer Fresnel'schen Wellenfläche zu thun haben, indem die negativen Werthen dieser Grössen entsprechenden Flächen, auf welche das Vorstehende noch anwendbar war, von jetzt ab ausgeschlossen sind. Wegen:

$$\frac{1}{d^2} = \frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} + \frac{\gamma^2}{c^2}$$

kann die vierte Wurzel d^2 der Gleichung (6) als das Quadrat des Halbmessers eines Ellipsoids von den Halbaxen a, b, c angesehen werden, welcher seiner Grösse nach zwischen a und c gelegen sein muss, wenn die Cosinusse α, β, γ reell sind. Um also einem reellen Schnitt einer Wellenfläche zu entsprechen, müssen die Wurzeln der Gleichung (6) alle vier reell und positiv sein.

Alsdann gibt es aber immer **zwei** reelle Lösungen der Aufgabe, aus dem Centralschnitt die Fläche zu bestimmen, wenn es **eine** gibt. Denn vermöge der Beziehungen (7^a) zieht die Realität des Werthsystems der $\alpha\ \beta\ \gamma$ die von $\alpha'\ \beta'\ \gamma'$ nach sich, während α'' $\beta''\ \gamma''$ und $\alpha'''\ \beta'''\ \gamma'''$ imaginär sind. Die beiden reellen Wellenflächen, die der Forderung genügen, unterscheiden sich also nur hinsichtlich ihrer mittleren Axe b (bez. d), während die grösste a und kleinste c übereinstimmen.

Es kann eintreten, dass von den Wurzeln der Gleichung (6) zwei oder mehrere einander gleich werden. Ist z. B.

$u_1 = u_2$, und u_3 und u_4 davon verschieden, so hat man die beiden oben in der Einleitung erwähnten reellen Lösungen:

$$\text{I. } u_1 = u_2 = a^2;\ u_4 = c^2;\ u_3 = d^2$$

also eine optisch einaxige Wellenfläche, und

$$\text{II. } u_1 = a^2;\ u_4 = c^2;\ u_3 = b^2,$$

wobei sich noch aus 7^a:

$$\gamma'^2 = \beta'^2 = o;\ \alpha'^2 = 1$$

ergibt. Diese Lösung entspricht einem Hauptschnitt einer Wellenfläche mit den Axen a, b, c.

Eine Uebereinstimmung der beiden reellen Lösungen findet nur statt, wenn die der Grösse nach mittleren Wurzeln u_2 und u_3 einander gleich sind, d. h. wenn:

$$b^2 = d^2$$

ist. Dann ergibt sich aber, wegen:

$$\frac{1}{b^2} = \frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} + \frac{\gamma^2}{c^2}$$

die Beziehung:

$$\alpha \cdot c \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}} \pm \gamma \cdot a \sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}} = o,$$

d. h. die Richtung α, β, γ steht senkrecht auf einer der beiden in der XZ-Ebene gelegenen Linien, welche die Knotenpunkte der Wellenfläche mit dem Mittelpunkt verbindet, und die man secundäre optische Axen der Wellenfläche nennt. Für diejenigen Centralebenen also, welche durch zwei gegenüberstehende Knotenpunkte der Wellenfläche hindurchgehen, und nur für diese fallen die beiden reellen Lösungen zusammen. Durch die von einer solchen ausgeschnittene Curve lässt sich also keine von der ersten verschiedene Wellenfläche legen.

Es erübrigt noch, die vorstehenden Entwicklungen auf diejenige Fläche zu übertragen, deren Gleichung:

$$\frac{x^2}{r^2 - a^2} + \frac{y^2}{r^2 - b^2} + \frac{z^2}{r^2 - c^2} = o$$

ist. Dies geschieht am bequemsten durch die Bemerkung, dass diese Fläche aus der Fresnel'schen Wellenfläche auch mit Hilfe reciproker Radienvectoren, den Mittelpunkt zum Inversionscentrum genommen, abgeleitet werden kann. In der That, setzt man:

$$x = \frac{x'}{r'^2}; \quad y = \frac{y'}{r'^2}; \quad z = \frac{z'}{r'^2}; \quad r = \frac{1}{r'};$$

$$a = \frac{1}{a'}; \quad b = \frac{1}{b'}; \quad c = \frac{1}{c'},$$

wo $r^2 = x^2 + y^2 + c^2$; $r'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$

ist, so gehen die beiden Flächengleichungen in einander über. Dies gilt auch von den vorstehend erhaltenen Resultaten, wenn man noch die Vertauschungen vornimmt:

$$d = \frac{1}{d'}; \quad \varrho = \frac{1}{\varrho'}; \quad u = \frac{1}{u'},$$

während sowohl die Coefficienten A, B in der Gleichung der ebenen Schnittcurve, wie auch die Cosinusse α, β, γ und der Winkel φ ungeändert bleiben.

Die zu Grunde liegende Curvengleichung lautet alsdann (die Striche oben an den Buchstaben sind wieder getilgt):

$$\varrho^4 - \varrho^2 (B_1 \cos^2 \varphi + B_2 \sin^2 \varphi + 2 B \cos \varphi \sin \varphi) +$$
$$+ A_1 \cos^2 \varphi + A_2 \sin^2 \varphi + 2 A \cos \varphi \sin \varphi = o.$$

Die Gleichung vierten Grades für die Grössen

$$a^2 < b^2 \leq c^2; \; d^2$$

wird:

$$u^4 - u^3 (B_1 + B_2) + u^2 (A_1 + A_2 - B_1 B_2 - B^2) -$$
$$- u (A_1 B_2 + B_1 A_2 - 2 A B) + (A_1 A_2 - A^2) = o.$$

Die vierte Wurzel d^2 steht mit den drei anderen in der Beziehung:

$$d^2 = a^2 \alpha^2 + b^2 \beta^2 + c^2 \gamma^2$$

und muss, damit eine reelle Schnittebene möglich ist, zwischen a^2 und c^2 liegen. Für die Winkel der Letzteren gegen die Hauptschnittebenen erhält man die Gleichung:

$$\alpha^2 = \frac{b^2 c^2 + a^2 d^2 - (A_1 + A_2)}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)}$$

und die entsprechenden.

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der Bayerischen Akademie der Wissenschaften München

Jahr/Year: 1883

Band/Volume: 1883

Autor(en)/Author(s): Brill Alexander von

Artikel/Article: Bestimmung der optischen Wellenfläche aus einem ebenen Centralschnitte derselben 423-435