Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Classe

der

k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.

Band XIV. Jahrgang 1884.

München.
Akademische Buchdruckerei von F. Straub.
1885.

In Commission bei G. Franz.

Sitzungsberichte

der

königl. bayer. Akademie der Wissenschaften.

Mathematisch-physikalische Classe.

Sitzung vom 1. März 1884.

Herr v. Seidel hält einen Vortrag:

„Ueber das Wahrscheinlichkeitsgesetz der Fehler bei Beobachtungen."

Herr v. Seidel wird eine Abhandlung über dieses Thema in einer Fachzeitschrift veröffentlichen.

Herr A. Brill legt eine Abhandlung von Herrn Theodor Kuen in München vor:

„Ueber Flächen von constantem Krümmungsmaass."

Wenn man von den Umdrehungs- und Schraubenflächen absieht, so sind von Oberflächen von constantem Krümmungsmass bis jetzt nur die von Herrn Enneper[1]) gefundenen mit einem System ebener Krümmungslinien bekannt, sowie diejenigen Flächen, welche durch einen von Herrn Bianchi[2])

1) „Analytisch-geometrische Untersuchungen V", Göttinger Nachrichten 1868, pag. 258—277.

2) „Ricerche sulle superficie a curvatura costante e sulle Elicoidi", Pisa 1879.

angegebenen Process entstehen, vermöge dessen aus jeder solchen Fläche andere derselben Art abgeleitet werden. Auf diesem Wege hat Bianchi selbst aus der Rotationsfläche der Tractrix eine neue Fläche hergeleitet, die jedoch, wie ich an einem andern Orte[1]) gezeigt habe, gleichfalls der ersterwähnten Categorie zugehört.

In weiterer Verfolgung der Absicht, Beziehungen zwischen den durch beide Methoden erhaltenen Flächen herzustellen, habe ich nun das von Bianchi angegebene Verfahren wiederum auf die von ihm abgeleitete Fläche, sowie auf die beiden ausser der Tractrixfläche noch vorhandenen Umdrehungsflächen von constantem negativen Krümmungsmaass angewendet; andererseits aber die von Enneper angegebenen Gleichungen einer genaueren Discussion unterworfen. Ich wurde dadurch auf eine neue Gattung von Flächen von constanter (sowohl positiver als negativer) Krümmung mit einem System ebener Krümmungslinien geführt, welche die bemerkenswerthe Eigenschaft besitzen, dass ihre rechtwinkeligen Coordinaten sich bereits durch cyclometrische, nicht, wie im allgemeinen Fall, erst durch elliptische Functionen zweier Parameter ausdrücken lassen.

Im Nachstehenden erlaube ich mir die Resultate, zu denen ich gelangt bin, mitzutheilen, indem ich die ausführlichere Darstellung an einer anderen Stelle zu geben beabsichtige.

Das Verfahren, durch welches Bianchi aus einer gegebenen Fläche von constanter negativer Krümmung eine andere eben solche ableitet, besteht bekanntlich darin, dass man längs eines Systems von parallelen geodätischen Linien die Tangenten an diese Curven construirt und auf denselben eine

---

1) Beiblätter zu der vierten Folge von Modellen des mathematischen Institutes der technischen Hochschule München. Darmstadt, L. Brill.

constante Länge abträgt. Die Endpunkte dieser Strecken bestimmen die abgeleitete Fläche. Ein System paralleler geodätischer Linien und deren Orthogonaltrajectorien auf der Ausgangsfläche muss dabei als bekannt vorausgesetzt werden.

Bezogen auf die Krümmungslinien u, v sei die Gleichung dieser Orthogonaltrajectionen:

$$\lambda_1 = (u, v),$$

oder differentiirt:

$$d\lambda_1 = m\,du + n\,dv,$$

wo m und n bekannte Funktionen von u und v sind. Die Krümmungslinien dürfen als bekannt angesehen werden, da sie nach einem Satze von Lie[1]) auf allen Flächen constanter Krümmung durch Quadratur zu finden sind. Dieses Coordinatensystem bietet den Vortheil, dass das entsprechende auf der abgeleiteten Fläche, welches in der Folge mit denselben Buchstaben u, v bezeichnet werden soll, wieder aus Krümmungslinien besteht[2]). Auf der letzteren kennt man aber nicht bloss die Krümmungslinien, sondern auch ein System von geodätischen Kreisen zu parallelen geodätischen Linien, denn nach einer Bemerkung von Bianchi gehen die geodätischen Kreise zu einem System paralleler geodätischer Linien wieder in Curven der nämlichen Eigenschaft auf der abgeleiteten Fläche über. Die Gleichung dieses Curvensystems ist also auf der letzteren ebenfalls:

$$\lambda_1 = (u, v).$$

Auf der abgeleiteten Fläche, für welche die geodätischen Linien gesucht werden, darf man demnach die Krümmungslinien und die Gleichung e i n e s Systems von geodätischen Kreisen λ_1 als bekannt voraussetzen; es sind also die im

---

1) Archiv für Mathematik og Naturvidenskab Bd. IV, 3.

2) Vergl. Ribaucour. Comptes Rendus 1872, 1 Sem.

Ausdrucke für das Linienelement in Bezug auf die Krümmungslinien u, v:

$$ds^2 = E\,du^2 + G\,dv^2$$

vorkommenden Grössen E und G bekannt.

Bezogen auf die geodätischen Kreise λ_1 und die dazu gehörigen parallelen geodätischen Linien μ_1 wird der Ausdruck für das Linienelement dieser Fläche von der Form sein:

$$ds^2 = \frac{1}{\varrho^2(\lambda_1)}\left[\pi^2(\lambda_1)\,d\lambda_1{}^2 + d\mu_1{}^2\right],$$

wo π und ϱ (nicht bekannte) Funktionen von λ_1 bedeuten.

Setzt man

$$d\mu_1 = p\,du + q\,dv,$$

so erhält man durch Gleichsetzung beider Ausdrücke für das Linienelement:

$$\begin{aligned}\varrho^2(E\,du^2 + G\,dv^2) &\equiv \pi^2 d\lambda_1{}^2 + d\mu_1{}^2 \\ &= du^2(m^2\pi^2 + p^2) + (n^2\pi^2 + q^2)\,dv^2 \\ &\quad + 2\,du\,dv\,(mn\pi^2 + pq),\end{aligned}$$

und daraus durch Vergleichung:

$$p = \pm n\sqrt{\frac{E}{G}}\cdot\pi$$

$$q = \mp m\sqrt{\frac{G}{E}}\cdot\pi.$$

Die Differentialgleichung des geodätischen Liniensystems μ_1 wird daher:

$$d\mu_1 \equiv \pm\pi(\lambda_1)\left\{n\sqrt{\frac{E}{G}}\,du - m\sqrt{\frac{G}{E}}\,dv\right\} = 0.$$

Demnach ist $\pi(\lambda_1)$ der Multiplikator der Differentialgleichung für μ_1. Die Funktion π kann nach bekannten Regeln der Differentialrechnung unmittelbar durch eine Quadratur gefunden worden, weil λ_1 eine bekannte Funktion von u und v ist.

Hiebei wurde nur vorausgesetzt, man kenne das Linienelement in Bezug auf die Krümmungslinien und ein System geodätischer Kreise für die vorliegende Fläche. Ist diese aber selbst durch das Bianchi'sche Verfahren aus einer anderen bekannten abgeleitet worden, so kann man durch blosse Quadratur das Linienelement (bezogen auf das bekannte geodätische Liniensystem und dessen Orthogonaltrajectorien) auf die Form bringen:

$$ds^2 = \frac{a^2}{\lambda^2}(d\lambda^2 + d\mu^2),$$

und unter Voraussetzung eines so bestimmten λ, kann der Multiplikator der vorigen Differentialgleichung auf folgende Weise der Einheit gleich gemacht werden.

Das Linienelement der abgeleiteten Fläche, bezogen auf die den geodätischen Kreisen λ entsprechenden Kreise Λ (Λ ist eine Funktion von λ) und die zugehörigen parallelen geodätischen Linien μ_1, bekommt die Gestalt:

$$ds^2 = \frac{a^2}{\Lambda^2}(d\Lambda^2 + d\mu_1{}^2),$$

falls man nur die Funktion Λ von λ passend wählt. Da die aus der gegebenen, durch die Bianchi'sche Methode abgeleitete Fläche, mit ihr zusammen eine Krümmungscentrafläche bildet, lässt sich diese Funktion durch Anwendung eines Satzes von Herrn Weingarten[1]) bestimmen, der für die Linienelemente auf den beiden Mänteln einer Krümmungscentrafläche zu einer Fläche von constanter Differenz ihrer Hauptkrümmungsradien $r_2 - r_1 = a$, beziehungsweise die Form ergibt:

1) „Ueber eine Classe auf einander abwickelbarer Flächen." Crelle's Journal, Bd. 59.

$$ds^2 = dr_2{}^2 + e^{\frac{2r_2}{a}} dv^2$$

$$ds^2 = dr_2{}^2 + e^{-\frac{2r_2}{a}} du^2,$$

wo e die Basis des natürlichen Logarithmensystems ist, $r_2 =$ Const. das System der in beiden Flächen einander entsprechenden geodätischen Kreise zu den dazu gehörigen geodätischen Linien u, beziehungsweise v, bedeutet.

Diese Ausdrücke gehen aber in die vorher für das Linienelement angegebenen dadurch über, dass man setzt:

$$a\,e^{-\frac{r_2}{a}} = \lambda,\ dv = d\mu$$

$$a\,e^{\frac{r_2}{a}} = \varLambda,\ du = d\mu_1.$$

Daraus erhellt, dass λ und $\varLambda$ durch die Gleichung zusammen hängen:

$$\varLambda = \frac{a^2}{\lambda}.$$

Führt man in der für $d\mu_1$ aufgestellten Gleichung statt λ_1 das durch die vorstehende Beziehung bestimmte $\varLambda$ ein, so erhält man statt $\pi(\lambda_1)$ den Faktor 1; die linke Seite der Differentialgleichung für das geodätische Liniensystem:

$$d\mu_1 \equiv n\sqrt{\frac{E}{G}}\,du - m\sqrt{\frac{G}{E}}\,dv$$

ist dann also ein vollständiges Differential.

Ich habe nun dieses Verfahren auf die erwähnte von Bianchi gefundene Fläche von constanter negativer Krümmung angewendet, ausgehend von denjenigen Gleichungen, durch welche sich die rechtwinkeligen Coordinaten dieser

Fläche vermöge der Parameter u und v ihrer Krümmungslinien ausdrücken:

$$\left.\begin{aligned} x &= 2a \frac{\sin u}{1 + v^2 \sin^2 u} (\cos v + v \sin v) \\ y &= 2a \frac{\sin u}{1 + v^2 \sin^2 u} (\sin v - v \cos v) \\ z &= a \left\{ \log \operatorname{tg} \frac{u}{2} + \frac{2 \cos u}{1 + v^2 \sin^2 u} \right\} \end{aligned}\right\} \text{I.},$$

wo $-\frac{1}{a^2}$ (wie stets) das Krümmungsmaass dieser Fläche und log den natürlichen Logarithmus bedeutet. Für das System der geodätischen Kreise $\varDelta$ und die zugehörigen parallelen geodätischen Linien μ_1 erhält man die Gleichungen:

$$\varDelta = \frac{1 + v^2 \sin^2 u}{\sin u} a^3,$$

$$\mu_1 = a^3 (\log \operatorname{tg} \frac{u}{2} + v^2 \cos u).$$

Zur Ableitung einer neuen Fläche aus der vorliegenden lässt sich dieses geodätische Liniensystem nicht benützen, wenn man nicht wieder zur Tractrixfläche zurückkommen will. Man muss vielmehr zuvor auf der Fläche selbst zu irgend einem anderen System von parallelen geodätischen Linien übergehen, was sich mit Hülfe der Formeln, welche Herr Professor Brill[1]) für die Transformation von geodätischen Coordinatensystemen auf Rotationsflächen angegeben hat, leicht ausführen lässt. Vermöge der willkürlichen Constanten, die durch diese Transformation eingeführt wird, erhält man so ein ganzes System von Flächen, deren rechtwinkelige Coordinaten sich wie folgt darstellen:

1) „Zur Theorie der geodätischen Linie und des geodätischen Dreiecks". Abhandlg. der kgl. bayr. Ak. II. Cl., XIV. Bd. II. Abth.

$$\mathrm{II)}\quad \begin{cases} x = R\{4\lambda(\cos v + v\sin v) - N\cos v\} \\ y = R\{4\lambda(\sin v - v\cos v) - N\cos v\} \\ z = a\log \mathrm{tg}\,\frac{u}{2} + R\{4\lambda\,\mathrm{cotg}\,u - M\}, \end{cases}$$

wobei zur Abkürzung gesetzt wurde:

$$\lambda = \frac{1 + v^2\sin^2 u}{\sin u}$$

$$R = \frac{a}{\lambda^2 + \nu^2}$$

$$M = (\lambda^2 - \nu^2)\cos u - 2\lambda\nu\sin u$$
$$N = (\lambda^2 - \nu^2)\sin u + 2\lambda\nu\cos u$$

$$\nu = \log \mathrm{tg}\,\frac{u}{2} + v^2\cos u - c,$$

wo c die erwähnte willkürliche Constante bedeutet. Aus der Form der Gleichung dieser Flächen entnimmt man unschwer den Satz, dass die eine Schaar der Krümmungslinien sphärisch ist, die andere auf algebraischen Flächen liegt.[1])

Ich beschäftigte mich ferner mit denjenigen Flächen, welche sich aus den beiden ausser der Tratrixfläche noch existirenden Typen von Umdrehungsflächen von constanter negativer Krümmung ableiten lassen. Je nachdem nämlich ein reeller, imaginärer oder unendlich weiter Pol eines geodätischen Polarcoordinatensystems Schnittpunkt der Meridiane einer Rotationsfläche ist, hat man drei verschiedene Typen, von denen der letzte die Rotationsfläche der Tractrix ist, die beiden andern, ich will sie mit K und H bezeichnen, eine dem Kegel beziehungsweise einem Hyperboloid)(ähnliche Gestalt besitzen. Die parallelen geodätischen Linien auf diesen Rotationsflächen, deren Kenntniss zur Auffindung der aus

---

1) Diese Eigenschaft erwähnte Herr Lie in einem an Herrn Brill gerichteten Schreiben.

denselben abgeleiteten nöthig ist, kann man wieder nach der von Herrn Brill angegebenen Methode finden.

Aus der Gruppe K von Umdrehungsflächen constanter negativer Krümmung ergibt sich mit Hülfe des Bianchi'schen Verfahrens die Flächengruppe:

$$\left.\begin{aligned}
x &= -\frac{u_0 \cos\frac{av}{u_0}\cos v + a\sin\frac{av}{u_0}\sin v}{\sinh\frac{u}{a}\cos v + \cosh\frac{u}{a}} \\
y &= -\frac{u_0 \sin\frac{av}{u_0}\cos v - a\cos\frac{av}{u_0}\sin v}{\sinh\frac{u}{a}\cos v + \cosh\frac{u}{a}} \\
z &= \frac{1}{a}\int_0^u \sqrt{\gamma^2 - u_0^2 \sinh^2\frac{u}{a}}\, du - \\
&\quad \sqrt{\gamma^2 - u_0^2\sinh^2\frac{u}{a}} \cdot \frac{\cos v + \operatorname{tgh}\frac{u}{a}}{1 + \operatorname{tgh}\frac{u}{a}\cos v}
\end{aligned}\right\}\ \text{III)}$$

wobei:

$$\gamma^2 = a^2 - u_0^2,$$

und aus der Flächengruppe H:

$$\left.\begin{aligned}
x &= \frac{u_0\cos\frac{av}{u_0}\cosh v + a\sin\frac{av}{u_0}\sinh v}{\cosh v\cosh\frac{u}{a} - \sinh\frac{u}{a}} \\
y &= \frac{u_0\sin\frac{av}{u_0}\cosh v - a\cos\frac{av}{u_0}\sinh v}{\cosh v\cosh\frac{u}{a} - \sinh\frac{u}{a}}
\end{aligned}\right\}\ \text{IV)}$$

$$z = \frac{1}{a}\int_0^u \sqrt{\gamma^2 - u_0^2 \cosh^2 \frac{u}{a}}\, du -$$

$$\sqrt{\gamma^2 - u_0^2 \cosh^2 \frac{u}{a}} \cdot \frac{\cosh v - \operatorname{cotgh} \frac{u}{a}}{\cosh v \operatorname{cotgh} \frac{u}{a} - 1},$$

wobei:

$$\gamma^2 = a^2 + u^2$$

gesetzt wurde, und sinh, tgh, u. s. w. hyperbolische Funktionen bedeuten, u_0 eine willkürliche, die Rotationsfläche bestimmende Constante und u, v Parameter der Krümmungslinien sind. Da der Quotient $\frac{y}{x}$ nur eine Funktion von v wird, so ist das System $v = \text{Const.}$ ein planes.

Es gehören demnach diese zwei Flächengattungen ebenso wie die aus der Tractrixfläche abgeleitete zu denjenigen Flächen constanter negativer Krümmung, welche ein System ebener Krümmungslinien besitzen, für welche Enneper die allgemeine Gleichungsform bestimmt hat. In den von ihm angegebenen Gleichungen kommen zwei Constanten A und C vor. Lässt man zwischen diesen eine der Relationen bestehen

$$\alpha) \quad \begin{array}{l} C = 1 + A \\ C = 1 - A \end{array}$$ [1]),

---

1) Die erste der Bedingungsgleichungen (α), welche die Flächengruppe ergibt, die aus dem Typus H abgeleitet wurde, widerspricht der von Herrn Lenz [Ueber die Enneper'schen Flächen constanten negativen Krümmungsmasses mit einem Systeme ebener Krümmungslinien. Dissertation, Göttingen 1878] angegebenen Realitätsbedingung.

$$C = 1 + |A|.$$

Es zeigte sich bei genauer Untersuchung, dass sowohl diese, als auch die von Herrn Bockwoldt [Dissertation, Göttingen 1878] für so erhält man die aus dem Kegel-, beziehungsweise Hyperboloid-Typus abgeleiteten Flächen. Es ergeben sich also nicht die sämmtlichen Enneper'schen Flächen durch einmalige Anwendung des Bianchi'schen Verfahrens aus den Rotationsflächen, wie man vermuthen könnte, da ja auf jeder unendlich viele Systeme von parallelen geodätischen Linien liegen. Alle diese Systeme lassen sich jedoch (abgesehen von dem den Kehlkreis asymptotisch berührenden, welches in sich übergeht) durch Drehung der Rotationsfläche um ihre Achse in einander überführen.

Die durch die Gleichungen (I) dargestellte Bianchi'sche Fläche ist, obwohl sie ein System von ebenen Krümmungslinien besitzt, aus den Enneper'schen Schlussgleichungen [p. 275 der oben citirten Arbeit] durch Specialisirung der Constanten nicht zu erhalten; sie gehört einer Categorie von Flächen an, welche durch Nullsetzen einer im Allgemeinen willkürlich wählbaren Constanten aus den Endgleichungen ausgeschlossen wird. [1])

Indessen lässt sich zeigen, dass man diese Gruppe aus den Enneper'schen Endgleichungen dadurch ableiten kann, dass man die Parameter u_1 und v_1 um eine unendlich grosse Constante c vermehrt, beziehungsweise vermindert und die Constante $A = o$ setzt, so jedoch dass:

$$\lim. \left(\frac{A\, e^{c}}{2}\right) = A'$$

Flächen constanter positiver Krümmung angegebene Realitätsbedingung ungenau ist; beide übersahen die Zulässigkeit von imaginären Parameterwerthen und Constanten für reelle Flächen.

1) In dem Ausdrucke:

$$\frac{1}{\sin^2 \sigma} = A \cos 2 i u_1 - i B \sin 2 i u_1 + C$$

auf p. 274 des citirten Aufsatzes wird die Constante $B = o$ gesetzt. Damit ist aber diejenige Gruppe von Flächen ausgeschlossen, welche der Annahme $A = B$ entspricht, eine Gruppe mit wesentlich einfacheren Gleichungen als die allgemeine.

wird, wo A′ eine beliebige endliche Grösse bedeutet. Man erhält auf diese Weise für die Cylindercoordinaten der in Rede stehenden Flächengruppe die Ausdrücke:

$$\varrho = \frac{a}{C} \cdot \frac{\sqrt{C + A' e^{2v}}}{\cosh (u + v)}$$

$$\varphi = \int \frac{C\, dv}{(C + A' e^{2v}) \sqrt{C + A' e^{2v}}} \qquad \text{V)}$$

$$z = \frac{a}{C} \left[\int \sqrt{C - A' e^{-2u}}\, du - \sqrt{C - A' e^{-2u}} \cdot \operatorname{tgh} (u + v) \right]$$

Dabei darf, unbeschadet der Allgemeinheit, A′ als positiv vorausgesetzt werden, C muss positiv gewählt werden, und die Parameter u und v nehmen nicht nur reelle sondern auch die complexen Werthe: $u - i\pi$, $v + i\pi$ an.

Durch Integration und Einführung von neuen Parametern vermittelst der Gleichungen:

$$V = \frac{1}{2} \log \frac{\sqrt{C - 1 + A' e^{2v}} - \sqrt{C - 1}}{\sqrt{C - 1 + A' e^{2v}} + \sqrt{C - 1}}$$

$$U = \frac{1}{2} \log \frac{\sqrt{C} + \sqrt{C - A' e^{-2u}}}{\sqrt{C} - \sqrt{C - A' e^{-2u}}},$$

erhält man statt der obigen die folgenden Gleichungen:

$$\varrho = -2a \sqrt{\frac{C - 1}{C}} \frac{\sinh V \cosh U \sqrt{1 + (C - 1) \operatorname{cotgh}^2 V}}{(C - 1) \cosh^2 U + C \sinh^2 V}$$

$$\varphi = \frac{V}{\sqrt{C - 1}} + \operatorname{arctgh} \left(\sqrt{C - 1} \operatorname{cotgh} V\right) \qquad \text{V}^a)$$

$$z = \frac{a\, U}{\sqrt{C}} - \frac{a (C - 1)}{\sqrt{C}} \frac{\sinh 2U}{(C - 1) \cosh^2 U + C \sinh^2 V}.$$

Darin hat man, falls $C - 1 > o$ ist, den Parametern U und V, ausser reellen, auch noch die imaginären Werthe: $U - \frac{i\pi}{2}$, $V + \frac{i\pi}{2}$ beizulegen; für $C - 1 < o$ hat man denselben die Werthe: U, $i\left(V - \frac{\pi}{2}\right)$ zu ertheilen.

Für die Annahme $C - 1 = o$ werden die vorstehenden Gleichungen unbestimmt, und ein Grenzübergang liefert die durch die Gleichungen I dargestellte Fläche.

Eine analog durchgeführte Untersuchung zeigt das Vorkommen einer ähnlichen Flächencategorie von constanter positiver Krümmung mit ebenen Krümmungslinien. Man gelangt zu ihr dadurch, dass man in den Enneper'schen Gleichungen (pag. 272) statt der Parameter u_1 und v_1 die folgenden einführt: $i(v + c)$, $i(u - c)$, wo c eine unendlich grosse Constante bedeutet, und $A = o$ setzt, so jedoch, dass

$$\lim \frac{e^c A}{2} = \text{Const.} = A'$$

wird.

Durch Einführung von Parametern U, V lassen sich die Gleichungen für dieselbe auf die Form bringen:

$$\begin{aligned} \varrho &= 2a\sqrt{\frac{C+1}{C}} \cdot \frac{\cos U \cos V \sqrt{1 + (C+1)\,\mathrm{tg}^2 V}}{(C+1)\cosh^2 U - C\cos^2 V} \\ \varphi &= -\frac{V}{\sqrt{C+1}} + \mathrm{arctg}\left(\sqrt{C+1}\,\mathrm{tg}\, V\right) \qquad \text{VI)} \\ z &= \frac{aU}{\sqrt{C}} - \frac{a(C+1)}{\sqrt{C}} \cdot \frac{\sinh 2U}{(C+1)\cosh^2 U - C\cos^2 V}. \end{aligned}$$

Entweder ist $C > o$, dann können U und V nur reelle Werthe annehmen, oder $C + 1 < o$, und dann sind den

Parametern rein imaginäre Werthe beizulegen. Den zwischen o und — 1 gelegenen Werthen für die beliebige Constante C entsprechen keine reellen Flächen. Der Grenzfall $C + 1 = o$ gibt eine Fläche constanter positiver Krümmung mit einem System ebener Krümmungslinien, welche sich in Bezug auf die Form ihrer Gleichung der Bianchi'schen Fläche (I) an die Seite stellt.