Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Classe

der

k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.

1884. Heft IV.

München.
Akademische Buchdruckerei von F. Straub.
1885.

In Commission bei G. Franz.

Sitzung vom 3. Mai 1884.

Herr v. Jolly legt eine von dem correspondirenden Mitgliede, Herrn A. Wüllner eingesandte Abhandlung vor:

„Ausdehnung der Dispersionstheorie auf die ultrarothen Strahlen."

I.

Im zweiten Bande der vierten Auflage meiner Experimentalphysik habe ich aus der von Herrn v. Helmholtz[1]) gegebenen Dispersionstheorie eine Gleichung zwischen den Brechungsexponenten und Wellenlängen entwickelt[2]), welche für die farblos durchsichtigen Medien drei Constanten enthält, und von der ich später gezeigt habe[3]), dass sie nur eine andere Form der von Herrn v. Helmholtz selbst entwickelten ist. Die Gleichung ist

$$n^2 - 1 = - P \lambda^2 + Q \frac{\lambda^4}{\lambda^2 - \lambda^2_m}$$

worin n der Brechungsexponent, λ die Wellenlänge des Lichtes im freien Raume, P, Q, λ_m die durch die Beschaffenheit des brechenden Mittels bedingten Constanten sind. Von diesen ist λ_m die Wellenlänge, welche im freien Raume den Schwing-

1) von Helmholtz. Poggend. Ann. Bd. CLIV.

2) Wüllner, Lehrbuch der Experimentalphysik II. Bd. 4. Aufl. § 23. Leipzig bei Teubner 1883.

3) Wüllner, Wiedemann Annal. Bd. XVII p. 580.

ungen zukommt, welche die Moleküle vollführen würden, wenn sie ohne jegliche Reibung sich bewegten[1]).

Ich zeigte weiter, dass die Constanten P und Q stets sehr nahe gleich sind, und dass man in Folge dessen die Brechungsexponenten der sichtbaren Strahlen in farblos durchsichtigen Mitteln durch die Gleichung mit 2 Constanten hinreichend darstellen könne, welche sich ergibt, wenn man $P = Q$ setzt, und welche in der Form

$$n^2 - 1 = Q \frac{\lambda^2_m}{1 - \left(\frac{\lambda_m}{\lambda}\right)^2}$$

schon von H. Lommel abgeleitet war.

Die schönen Messungen des Herrn Mouton[2]) der Wellenlänge und Brechungsexponenten der ultrarothen Strahlen im Quarz und Flintglas geben Gelegenheit die Anwendbarkeit der obigen Dispersionsgleichung auch für die ultrarothen Strahlen zu prüfen. Von besonderem Interesse sind die Messungen der Brechungsexponenten der ordentlichen Strahlen im Quarz, weil wir hierdurch die Brechungsexponenten dieser Strahlen in dem ganzen Umfange des Spectrums kennen, da uns Esselbach's[3]) und Mascart's[4]) Messungen die Brechungsexponenten bis zum äussersten Ultraviolett geliefert haben.

Zu den Messungen des Herrn Mouton kommen noch die jetzt veröffentlichten des Herrn Langley[5]) der Brechungs-

1) Es beruht auf einem Missverständnisse, wenn Herr Dr. Rudolphi in seiner Dissertation (Halle 1883) annimmt, λ_m solle der am stärksten absorbirte Strahl sein. Nach dem Erscheinen meiner Optik ist das Missverständniss wohl nicht mehr möglich, da ich § 29 und § 51 ausführlich den Werth der stärkst absorbirten Wellen besprochen habe.

2) Mouton, Comptes Rendus. T. LXXXVIII p. 1078 und 1189.

3) Esselbach, Poggend. Ann. Bd. XCVIII.

4) Mascart, Comptes Rendus T. LVII p. 789; LVIII p. 1111.

5) Langley, American Journal of Science, Vol. XXVII März 1884.

exponenten in einem Flintglas, welche im ultrarothen noch weiter gehen als die Mouton'schen und noch einen angenäherten Werth des Brechungsexponenten für $\lambda = 0{,}0028$ geben. Herr Langley vergleicht in seiner Abhandlung die gemessenen Brechungsexponenten mit den Dispersionsgleichungen von Beriot, Cauchy und Redtenbacher, und zeigt, dass selbst die Briot'sche mit 4 Constanten, wenn auch den Beobachtungen am nächsten kommend, doch die Beobachtungen im ultrarothen nicht hinreichend wiederzugeben vermag.

In Folge dieser Mittheilung des Herrn Langley möge es mir gestattet sein, die grosse Ueberlegenheit der aus der Helmholtz'schen Dispersionstheorie sich ergebenden Gleichung nachzuweisen, welche mit 3 Constanten die Brechungsexponenten in dem ganzen Umfange der Beobachtungen darzustellen im Stande ist.

II. Brechungsexponenten der ordentlichen Strahlen im Quarz.

Berechnet man die Constanten der Dispersionsgleichung aus der Beobachtung Mouton's

$$\lambda = 14{,}5 \qquad n = 1{,}5289$$

wo für λ als Einheit der zehntausendste Theil des Millimeters gesetzt ist und aus denen Esselbach's

$$\lambda = 6{,}87 \qquad n = 1{,}5414$$
$$\lambda = 3{,}09 \qquad n = 1{,}5737$$

so erhalten die drei Constanten der Dispersionsgleichung folgende Werthe

$$P = 1{,}782\,264 \qquad \log P = 0{,}250\,791\,9$$
$$Q = 1{,}782\,134 \qquad \log Q = 0{,}250\,940\,4$$
$$\lambda_m^2 = 0{,}762\,993 \qquad \log \lambda_m^2 = 0{,}882\,520\,4 - 1.$$

In der nachfolgenden Tabelle sind die beobachteten und die mit diesen Constanten berechneten Brechungsexponenten zusammengestellt. Columne I enthält die Wellenlängen, im ultrarothen nach Mouton, im sichtbaren Theile des Spectrums und im ultravioletten nach Esselbach; Columne II die Brechungsexponenten, bis zur Wellenlänge 8,8 nach Mouton, von da ab nach Esselbach, Columne III die berechneten Brechungsexponenten, Columne IV unter Δ die Differenzen zwischen Beobachtung und Rechnung, Columne V die von Mascart beobachteten Brechungsexponenten und Columne VI die von Mascart angegebenen Wellenlängen, soweit sie im ultraviolett von den Angaben Esselbach's abweichen.

Wellen-längen λ	Brechungs-exponenten n beob.	ber.	Δ	Brechungs-exponenten nach Mascart	Wellen-längen nach Mascart
21,4	1,5191	1,5176	−15		
17,7	1,5247	1,5241	− 6		
14,5	1,5289	1,5289	± 0		
10,8	1,5338	1,5341	+ 3		
8,8	1,5371	1,5373	+ 2		
6,87	1,5414	1,5414	± 0	1,5410	
6,56	1,5424	1,5421	− 3	1,5419	
5,89	1,5446	1,5446	± 0	1,5442	
5,26	1,5476	1,5475	− 1	1,5472	
4,845	1,5500	1.5500	± 0	1,5497	
4,29	1,5546	1,5544	− 2	1,5543	
3,93	1,5586	1,5584	− 2	1,5582	
3,79	1,5605	1,5602	− 3	1,5602	3,82
3,66	1,5621	1,5622	+ 1	1,5615	3,73
3,50	1,5646	1,5649	+ 3	1,5640	3,58
3,36	1,5674	1,5675	+ 1	1,5668	3,44
				1,5684	3,36
3,29	1,5690	1,5689	− 1		
3,23	1,5702	1,5702	± 0		
3,09	1,5737	1,5737	± 0		

Wie Columne IV der Tabelle zeigt, erreichen die Unterschiede zwischen Beobachtung und Rechnung nur einmal, und zwar für den an der äussersten Grenze des Spectrums gefundenen Werth die dritte Decimale: die sonstigen Differenzen überschreiten nirgendwo die durch die unvermeidlichen Unsicherheiten bedingten Grenzen. Dass auch die Differenz des ersten Werthes gegen die Beobachtung die mögliche Unsicherheit nicht überschreitet, ergibt sich schon aus der Vergleichung der von Esselbach und der von Mascart gegebenen Werthe. In dem sichtbaren Theile des Spectrums stimmen die Beobachtungen Mascart's mit denen Esselbach's und ebenso mit den berechneten sehr gut überein, die Unterschiede sind höchstens 4 Einheiten der vierten Decimale. Im ultravioletten dagegen sind die Unterschiede für gleiche Wellenlängen grösser, für $\lambda = 3{,}36$ beträgt er eine Einheit der dritten Decimale. Auch die übrigen Werthe Mascart's sind grösser als sie die aus den Mouton-Esselbach'schen Zahlen abgeleitete Gleichung liefert. Es gibt die Gleichung für

$\lambda = 3{,}73$	$n = 1{,}5611$	anstatt	1,5615
3,58	1,5634	„	1,5640
3,44	1,5661	„	1,5668

Diese Verschiedenheit zwischen den Zahlen von Esselbach und Mascart beweist eben, dass in den unsichtbaren Theilen des Spectrums die Unsicherheit so gross ist, dass die Differenzen zwischen den von Mouton beobachteten und den nach unserer Gleichung berechneten Werthen der Brechungsexponenten in der That innerhalb der Grenzen der Unsicherheit liegen. Daraus und ebenso aus der unregelmässigen Vertheilung der Differenzen nach der positiven und negativen Seite folgt zweifellos, dass die aus der Helmholtz'schen Dispersionstheorie abgeleitete Gleichung die Brechungsexponenten für die ganze Ausdehnung des Spectrums darstellt, in einer Ausdehnung, in welcher sich die Wellenlängen von 1 zu 7 ändern.

Auch hier zeigt sich, dass die Constanten P und Q der Gleichung sehr nahe gleich sind. Indess lässt sich doch nicht, was für den sichtbaren Theil des Spectrums bei farblos durchsichtigen Körpern meist hinreichend ist, P = Q setzen, somit kann man nicht die vereinfachte Gleichung

$$n^2 - 1 = Q \frac{\lambda^2{}_m}{1 - \left(\frac{\lambda_m}{\lambda}\right)^2}$$

zur Berechung benutzen. Die Esselbach'schen Zahlen allein lassen sich durch eine solche Gleichung fast ebenso gut darstellen, wie durch unsere Gleichung; diese Gleichung liefert aber für ein unendlich grosses λ als Brechungsexponenten etwa 1,526. Die Mouton'schen Zahlen allein lassen sich durch die vereinfachte Gleichung nicht darstellen. Berechnet man aus den Werthen für $\lambda = 8{,}8$ und $\lambda = 21{,}4$ die Constanten, so werden die zwischen liegenden Werthe erheblich zu klein. Man bedarf daher zur Darstellung der Dispersion durch das ganze Spectrum der Gleichung mit 3 Constanten.

III. Brechungsexponenten in einem Flintglas.

Herr Langley hat die Brechungsexponenten im ultrarothen bis zu einer Wellenlänge 23,56 direkt gemessen. Die Grenze des Spectrums schätzt er bei einer Wellenlänge 28 und den Brechungsexponenten an dieser Stelle 1,5435. Im ultravioletten hat Herr Langley den Brechungsexponenten der Linie O gemessen, deren Wellenlänge er mit Herrn Mascart gleich 3,44 setzt, während Esselbach für O den Werth 3,36 setzt, ein Unterschied, der in dieser Region des Spectrums erheblich ist. Es ist daher, da Herr Langley die Wellenlänge der als O bezeichneten Linie nicht selbst gemessen hat, unsicher, welche Wellenlänge dieser Linie zuzuschreiben ist.

Zu dem Werthe 3,44 passt der Brechungsexponent nicht; die mit diesem Werthe und irgend zwei andern Paaren Wellenlängen und Brechungsexponenten berechnete Gleichung stellt die Beobachtungen nicht hinreichend dar. Ich habe zur Berechnung der Constanten verwandt die Werthe

$$\lambda = 3{,}968 \qquad n = 1{,}6070$$
$$\lambda = 7{,}601 \qquad n = 1{,}5714$$
$$\lambda = 18{,}10 \qquad n = 1{,}5544$$

Die Constanten werden

$$P = 0{,}983447 \qquad \log P = 0{,}992\,7509 - 1$$
$$Q = 0{,}983364 \qquad \log Q = 0{,}992\,7141 - 1$$
$$\lambda^2_m = 1{,}46109 \qquad \log \lambda^2_m = 0{,}164\,6773$$

In folgender Tabelle sind die berechneten und beobachteten Werthe mit ihren Differenzen zusammengestellt.

Wellenlänge λ	Brechungsexponenten n beob.	ber.	Δ
23,56	1,5478	1,5476	— 2
20,90	1,5511	1,5511	± 0
17,67	1,5549	1,5549	± 0
16,58	1,5562	1,5562	± 0
12,00	1,5625	1,5620	— 5
10,10	1,5654	1,5650	— 4
7,601	1,5714	1,5714	± 0
6,562	1,5757	1,5759	+ 2
5,89	1,5798	1,5801	+ 3
5,167	1,5862	1,5867	+ 5
4,86	1,5899	1,5904	+ 5
3,968	1,6070	1,6070	± 0

Für die Linie O, deren Wellenlänge Herr Langley gleich 3,44 setzt, findet er n = 1,6266. Die Rechnung liefert mit dieser Wellenlänge 1,6242. Nimmt man die Esselbach'sche

Wellenlänge 3,36, so wird n = 1,6277. Die zwischen beiden liegende Wellenlänge 3,39 würde 1,6267 liefern.

Als Grenzwellenlänge im Spectrum an der ultrarothen Seite gibt wie erwähnt Herr Langley 28 und den ungefähren Werth des Brechungsexponenten gleich 1,5435. Die Gleichung würde für die Wellenlänge 28 als Werth von n = 1,5412 liefern, also einen kleinern Brechungsexponenten; zu dem Werthe 1,5435 würde die Gleichung einen Werth λ zwischen 26 und 27 verlangen, die Wellenlänge 27 gibt 1,5427.

Auch hier sieht man, lässt die Uebereinstimmung zwischen Rechnung und Beobachtung wenig zu wünschen übrig, gerade die Werthe im ultrarothen ergeben sich aus der Rechnung in schönster Uebereinstimmung mit der Beobachtung. Herr Langley gibt z. B. bei der Wellenlänge 10,1 die Unsicherheit der Beobachtung gleich $\pm$ 0,053; setzen wir hiernach als Wellenlänge den Werth 10,047, so würde das Berechnete n = 1,5652. Der Unterschied zwischen dem berechneten und beobachteten Brechungsexponenten selbst an der Grenze, also 1,5412 anstatt 1,5435 würde einen Unterschied in der Ablenkung von nur 11′ bedingen, eine Unsicherheit die in den Beobachtungen nach der ganzen Darlegung des Verfahrens des Herrn Langley hier ohne Zweifel vorhanden ist.

Auch diese Beobachtungen liefern einen unzweideutigen Beweis dafür, dass die aus der Helmholtz'schen Theorie sich ergebende Dispersionsgleichung die Abhängigkeit der Brechungsexponenten von den Wellenlängen ganz vortrefflich darstellt, so dass man dieselbe mit grosser Sicherheit benutzen kann, um aus beobachteten Brechungsexponenten unbekannte Wellenlängen abzuleiten.