Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Classe

der

k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.

Band XV. Jahrgang 1885.

München.
Akademische Buchdruckerei von F. Straub.
1886.

In Commission bei G. Franz.

Sitzung vom 5. December 1885.

Herr von Seidel legt vor und bespricht eine Abhandlung des correspondirenden Mitgliedes Herrn Leo Königsberger in Heidelberg:

„Beweis von der Unmöglichkeit der Existenz eines anderen Functionaltheorems als des Abel'schen Theorems."

Ich erlaube mir im Folgenden die wesentlichsten Resultate einer demnächst erscheinenden ziemlich umfangreichen Arbeit kurz mitzutheilen.

Bekanntlich liefert das Abel'sche Theorem für Integrale algebraischer Functionen die Eigenschaft, dass eine beliebige Anzahl derselben sich additiv zu einer festen Anzahl gleichartiger Integrale vereinigen lässt, deren Grenzen algebraisch aus den Grenzen der gegebenen Integrale zusammengesetzt sind, und die Additionstheoreme für diejenigen Functionen einer oder mehrerer Variabeln, welche aus der Umkehrung jener Integrale sich ergeben, gehen unmittelbar aus jenem Theoreme hervor. Es ist eine für die Untersuchung der Integrale algebraischer Differentialgleichungen und deren Umkehrungsfunctionen wichtige Frage, ob ein Functionaltheorem ähnlicher Art für dieselben existirt, und nachdem ich in früheren Arbeiten im „Journal für Mathematik" und in den „acta mathematica" sowie in meiner Schrift „Allgemeine

Untersuchungen aus der Theorie der Differentialgleichungen" die nöthigen Hülfsuntersuchungen angestellt, gehe ich nunmehr an die Beantwortung der Frage:

Gibt es ausser den Integralen algebraischer Functionen und deren Umkehrungen noch andere Functionen, deren Werthe für n von einander unabhängige Argumente in algebraischem Zusammenhange mit weniger als n Werthen eben dieser Function für algebraisch von jenen n Variabeln abhängige Argumente und jenen Argumenten selbst stehen?

Nachdem gezeigt worden, *dass jede Function einer Variabeln, welche ein Functionaltheorem in dem Sinne besitzt, dass*

$$Z = F(x_1, x_2, z_1, z_2)$$

ist, worin F eine algebraische Function und Z den zu X gehörigen Functionalwerth bedeutet, wenn X mit x_1 und x_2 durch die algebraische Beziehung

$$X = f(x_1, x_2)$$

verbunden ist, das Integral einer algebraischen Differentialgleichung erster Ordnung sein muss, weise ich aus dem Satze von der Erhaltung einer algebraischen Beziehung zwischen Integralen verschiedener algebraischer Differentialgleichungen nach, *dass das allgemeine Integral jener Differentialgleichung erster Ordnung eine algebraische Function eines particulären, der unabhängigen Variabeln und einer willkührlichen Constanten sein muss,* und werde durch eine Reihe weiterer Schlüsse zu dem Resultat geführt:

Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass eine Function einer Variabeln ein Functionaltheorem im angegebenen Sinne besitzt, ist die, dass dieselbe einer Differentialgleichung erster Ordnung

$$\frac{dz}{dx} = \omega(x) \cdot \chi(z)$$

genügt, welche sich durch eine algebraische Substitution für die abhängige und unabhängige Variable in die Form bringen lässt

$$\frac{du}{dt} = m \frac{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2 u^2)}}{\sqrt{(1-t^2)(1-\lambda^2 t^2)}},$$

und somit sind alle jene Functionen in dem Ausdrucke enthalten

$$z = \Omega_1 \left\{ \operatorname{sinam} \left(m \int_{\xi}^{\omega_1(x)} \frac{d\eta}{\sqrt{(1-\eta^2)(1-\lambda^2 \eta^2)}}, k \right) \right\},$$

worin Ω_1 und ω_1 beliebige algebraische Functionen bedeuten — immer von dem Falle der algebraischen und logarithmischen Integrabilität der Differentialien $\frac{dz}{\chi(z)}$ *oder* $\omega(x)\,dx$ *abgesehen.*

Die betrachteten Functionen besitzen eine algebraische Periode von der Form

$$\frac{x\sqrt{(1-\xi_1^2)(1-\lambda^2\xi_1^2)} + \xi_1\sqrt{(1-x^2)(1-\lambda^2 x^2)}}{1-\lambda^2\xi_1^2 x^2}.$$

In allen Fällen dürfen die Functionen einer Variabeln, welche einem Functionaltheorem unterliegen, als algebraische Verbindungen algebraischer logarithmischer und elliptischer Functionen bezeichnet werden.

Nachdem die Frage nach den Funktionen einer Variabeln beantwortet worden, für welche die Function einer algebraischen Verbindung von unabhängigen Argumenten sich algebraisch durch die Functionen der einzelnen Argumente und diese selbst ausdrücken lässt, gehen wir zur Untersuchung derjenigen Functionen über, welche ein Functionaltheorem in dem Sinne besitzen, dass ihre Functionalwerthe für drei oder mehr unabhängige Variable in einer algebraischen Beziehung stehen zu zwei dieser Functionalwerthe für Argumente, welche von den gegebenen Variabeln algebraisch abhängen, also einer Beziehung von der Form

$$F\{Z_1, Z_2, z_1, z_2, z_3, x_1, x_2, x_3\} = 0$$

unterliegen, wenn die zu Z_1 und Z_2 gehörigen Argumente mit den unabhängigen Variabeln durch die algebraischen Gleichungen verbunden sind

$$X_1 = f_1(x_1, x_2, x_3),\ X_2 = f_2(x_1, x_2, x_3).$$

Es wird nachgewiesen, dass derartige Functionen Integrale algebraischer Differentialgleichungen erster oder zweiter Ordnung sein müssen, und wir finden,

dass ein Functionaltheorem im angegebenen Sinne für das Geschlecht 2 nur Integralen solcher Differentialgleichungen erster Ordnung zukommen kann, für welche das allgemeine Integral eine algebraische Function zweier particulärer Integrale, der unabhängigen Variabeln und einer willkührlichen Constanten ist,

oder *nur Integralen solcher Differentialgleichungen zweiter Ordnung, für welche das allgemeine Integral eine algebraische Function eines oder zweier particulärer Integrale, der unabhängigen Variabeln und zweier willkührlichen Constanten ist.*

Nachdem gefunden worden, dass die einzige Klasse jener Differentialgleichungen erster Ordnung die der linearen und solcher durch, in der abhängigen und unabhängigen Variabeln, algebraische Substitutionen aus diesen abgeleiteten ist, wird gezeigt, dass von dem Falle der zum Geschlechte 2 gehörigen Abel'schen Integrale abgesehen, das Integral einer linearen Differentialgleichung erster Ordnung also auch

das Integral einer algebraischen Differentialgleichung erster Ordnung nie ein zum Geschlecht 2 gehöriges Functionaltheorem besitzen kann.

Es wird weiter erwiesen, dass alle Differentialgleichungen zweiter Ordnung, für welche das allgemeine Integral nur von einem particulären Integrale abhängt, durch algebraische Substitutionen auf eine homogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung, in welcher die abhängige Variable selbst fehlt, zurückführbar sind, und von den letzteren nachgewiesen, dass ihre Integrale kein zum Geschlechte 2 gehöriges Functionaltheorem haben können. Endlich zeigt sich, dass auch alle Differentialgleichungen zweiter Ordnung, welche in dem Ausdrucke für das allgemeine Integral zwei particuläre Integrale enthalten, wiederum aus einer linearen homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung abgeleitet sind, auf deren abhängige und unabhängige Variable algebraische Substitutionen angewandt werden, und bei diesem Nachweise sind mannigfache Schwierigkeiten wegen der zwischen den particulären Integralen und deren Ableitungen etwa stattfindenden algebraischen Beziehungen zu überwinden.

Um also alle Functionen zu finden, für welche ein zum Geschlechte 2 gehöriges Functionaltheorem existirt, ist es nur nöthig, *diese Frage für Integrale von linearen, homogenen Differentialgleichungen zweiter Ordnung zu beantworten.* Nachdem bewiesen worden, dass ein solches Functionaltheorem ein in den Grössen z_1, z_2, z_3, Z_1, Z_2 lineares sein müsste, diese Annahme aber vermöge der Eigenschaft der linearen Differentialgleichungen auf ein zum Geschlechte 1 gehöriges Functionaltheorem führen würde, was nach dem Obigen nicht möglich ist, so folgt,

dass das Integral einer algebraischen Differentialgleichung zweiter Ordnung nie ein zum Geschlechte 2 gehöriges Functionaltheorem besitzen kann.

Wir finden somit,

es gibt überhaupt keine Functionen einer Variabeln welche ein zum Geschlechte 2 gehöriges Functionaltheorem haben, mit Ausnahme der zum Geschlechte 2 gehörigen Abel'schen Integrale, und allgemein,

die einzigen Functionen einer Variabeln, deren Werthe für n von einander unabhängige beliebige Variable in algebraischem Zusammenhange mit weniger als n Werthen eben dieser Function für algebraisch von jenen n Variabeln abhängige Argumente stehen, sind die Integrale algebraischer Functionen, für welche das Abel'sche Theorem jenen Zusammenhang feststellt.

Es bleibt somit zur vollständigen Erledigung der Frage nur noch zu untersuchen übrig, ob Functionen mehrerer Variabeln Functionaltheoreme der angegebenen Art besitzen können, und man sieht leicht, dass derartige Functionen nicht existiren.

So lange also in das Functionaltheorem selbst nur die betrachtete Function für unabhängige und algebraisch davon abhängige Argumente eintreten soll, ist eine Ausdehnung des Abel'schen Theorems unmöglich: nun zeigt aber das letztere Theorem, dass die Gestalt desselben unverändert bleibt, wenn z. B. ein Integral erster Gattung durch ein beliebiges anderes erster Gattung ersetzt wird, und diese letztere Thatsache war bekanntlich für Jacobi die Veranlassung, die Umkehrungsfunctionen der hyperelliptischen Integrale als Functionen von so vielen unabhängigen Variabeln zu definiren, als es zu der betreffenden Irrationalität gehörige Integrale erster Gattung gab, so dass in das Functionaltheorem der Umkehrungsfunctionen zwei selbständige Functionen eintraten in der Art z. B., dass

$$\begin{gathered} al_1(u_1+v_1, u_2+v_2) \\ = F_1\{al_1(u_1, u_2), al_2(u_1, u_2), al_1(v_1, v_2), al_2(v_1, v_2)\} \\ al_2(u_1+v_1, u_2+v_2) \\ = F_2\{al_1(u_1, u_2), al_2(u_1, u_2), al_1(v_1, v_2), al_2(v_1, v_2)\}. \end{gathered}$$

Diese Ueberlegung führt darauf, in das gesuchte Functionaltheorem, das zunächst für das Geschlecht 1 untersucht wird, zugleich zwei Functionen zweier unabhängiger Variabeln einzuführen, wie es z. B. die von Herrn Fuchs aufgestellten Umkehrungsfunctionen der beiden particulären Fundamentalintegrale einer linearen homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung sind.

Man zeigt einerseits leicht, *dass solche Functionen jedenfalls eine doppelte algebraische Periodicität besitzen müssen*, andererseits *genügen sie einem gleichzeitigen Systeme von vier partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung in Bezug auf die beiden unabhängigen Variabeln und sind einzeln als Functionen einer jeden ihrer Variabeln aufgefasst Integrale algebraischer Differentialgleichungen zweiter Ordnung,*

und ähnliche Sätze für Functionen zweier Variabeln, welche ein zu einem höheren Geschlechte gehöriges Functionaltheorem besitzen sollen.

Endlich wird für das dem Geschlechte 1 zugehörige Functionaltheorem gezeigt, dass *das System der jene Functionen definirenden Differentialgleichungen die Eigenschaft besitzt, dass das allgemeine Integral in Bezug auf jede der Variabeln entweder eine algebraische Function zweier entsprechender particulärer Integrale erster Ordnung und einer willkührlichen Constanten sein muss oder eine algebraische Function zweier entsprechender particulärer Integrale und zweier willkührlichen Constanten,*

und in beiden Fällen ergibt sich wiederum die Unmöglichkeit eines Functionaltheorems, wenn es sich nicht um Functionen handelt, welche durch eine algebraische Substitution aus den Abel'schen Functionen abgeleitet sind.

Die einzigen Functionen also, für welche Functionaltheoreme im oben angegebenen Sinne existiren, sind die Abel'schen Integrale und die Umkehrungsfunctionen derselben, sowie die durch algebraische Transformationen aus diesen abgeleiteten.