Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Classe

der

k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.

Band XVII. Jahrgang 1887.

München.
Verlag der K. Akademie.
1888.

Commission bei G. Franz.

Bestimmung der Selbstinduction eines Leiters mittels inducirter Ströme.

Von Friedrich Kohlrausch.

(Eingelaufen 5. Februar.)

Bei Gelegenheit einer Widerstandsbestimmung mit inducirten Strömen habe ich früher eine Erscheinung erwähnt,[1]) welche bei geeigneter Stromverzweigung eintritt, wenn in einem der Zweige Selbstinduction stattfindet. Eine Galvanometernadel macht während des Inductionsstosses eine Zuckung, welche, als Wirkung der beiden entgegengesetzt gleichen Extraströme des anwachsenden und abfallenden inducirten Stromes, keine Endgeschwindigkeit hat und sich deswegen scharf beobachten lässt. Die Grösse dieses „Extraweges" lässt sich, wie man leicht sieht, zur Bestimmung der Selbstinductionsconstante verwerten. Das Verfahren ist in mancher Hinsicht bequemer als die Anwendung des Schliessungs- oder Oeffnungs-Extrastromes einer Säule, bei welcher die Grösse des Nadelausschlages im allgemeinen von einem Reste des constanten Stromes mit bedingt wird. Der letztere aber lässt sich nur sehr schwer ganz beseitigen, da Thermoströme, Widerstandsänderung durch die Wärme und der Extrastrom selbst eine genaue Regulirung erschweren.

Man kann natürlich hier wie dort Differentialgalvanometer oder Wheatstone'sche Brücke verwenden.

1) Pogg. Ann. Bd. 142 S. 418, 1871.

Bestimmung mit dem Differentialgalvanometer. Der Stromstoss eines Weber'schen Magnetinductors — Drahtspule mit verschiebbarem Magnet — oder auch eines Inductionsapparates mit Unterbrechung des primären Stromes wird verzweigt: einerseits durch den Widerstand w, dessen Selbstinductionscoefficient Π gemessen werden soll und durch die eine Hälfte eines Differentialmultiplicators, andererseits durch einen ebensogrossen Widerstand ohne Selbstinduction und durch die andere Hälfte des Multiplicators in entgegengesetzter Richtung. Dass die Widerstände gleich sind, ist vorher mit einer constanten Stromquelle an dem Platze des Inductors daran erkannt worden, dass der constante Strom die Nadel nicht ablenkte.

Geht der Inductionsstoss durch die Leitung, so erfolgt eine plötzliche Verschiebung der Nadel. Wir nehmen an, dass der Inductionsstoss in einer gegen die Schwingungsdauer der Nadel sehr kurzen Zeit ausgeführt wird; dann ist die Grösse dieser Verschiebung von der Dauer des Stosses unabhängig und lässt sich scharf von den langsamen gewöhnlichen Schwingungen trennen. Besonders wenn man die Stösse rasch nacheinander in entgegengesetzter Richtung ausführt, wobei entgegengesetzte Zuckungen der Nadel erfolgen, ist dies der Fall.

Das Gesetz dieser Bewegung findet sich folgendermassen. W sei der Widerstand, E die el. Kraft des Inductors zu irgend einer Zeit t, γ der Widerstand jeder Multiplicatorhälfte. Wenn weiter i_0 die Stromstärke in dem Zweige mit Selbstinduction, i_1 diejenige in dem anderen Zweige bedeutet, so ist

$$(i_1 - i_0)(w + \gamma) = \Pi \frac{di_0}{dt},$$

oder

$$i_1 - i_0 = \frac{\Pi}{w + \gamma} \frac{di_0}{dt}. \tag{1}$$

Dieser Stromüberschuss in der einen Multiplicatorhälfte gibt der Nadel eine Beschleunigung

$$\frac{d^2x}{dt^2} = C\,(i_1 - i_0) = \frac{\Pi}{w+\gamma}\,C\,\frac{di_0}{dt},$$

wo C eine Constante des Galvanometers bedeutet. War die Nadel bei dem Beginne des Stosses in Ruhe, so folgt weiter

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\Pi}{w+\gamma}\,Ci_0.$$

Also zu Ende des Inductionsstosses ist diese Geschwindigkeit $= 0$, weil dann $i_0 = 0$ wird; während des Stosses ader findet eine Gesammtverschiebung x' statt

$$x' = \frac{\Pi}{w+\gamma}\,C\int i_0 dt. \tag{2}$$

Nun ist $\qquad i_0 = E/(2\,W + w + \gamma)$,

also

$$\int i_0\,dt = \frac{1}{2\,W + w + \gamma}\int E\,dt.$$

Man erhält also [1])

$$x' = \frac{\Pi}{w+\gamma}\,\frac{1}{2\,W + w + \gamma}\,C\int E\,dt. \tag{3}$$

---

1) Die strenge Entwicklung dieser Formeln muss auf die Inductionen in den anderen Zweigen Rücksicht nehmen.

Es seien Π_0 bez. Π' die Selbstinductionscoefficienten der Inductorrolle bez. jeder Multiplicatorhälfte, Π'' der Coefficient der einen Hälfte auf die andere. Wenn J die Stromstärke zur Zeit t im Inductor, so ist

$$WJ + (w+\gamma)\,i_0 = E - \Pi_0\frac{dJ}{dt} - \Pi'\frac{di_0}{dt} + \Pi''\frac{di_1}{dt} - \Pi\frac{di_0}{dt}$$

$$WJ + (w+\gamma)\,i_1 = E - \Pi_0\frac{dJ}{dt} - \Pi'\frac{di_1}{dt} + \Pi''\frac{di_0}{dt}.$$

Subtraction ergibt

$$(w+\gamma)\,(i_1 - i_0) = \Pi\frac{di_0}{dt} - (\Pi' + \Pi'')\,\frac{d\,(i_1 - i_0)}{dt},$$

Um $C\int E dt$ zu bestimmen, sendet man unter Einschaltung eines hinreichend grossen bekannten Widerstandes R einen vollen Inductionsstoss durch die eine Galvanometer-

---

also $$\int (i_1 - i_0)\,dt = \frac{\Pi i_0 - (\Pi' + \Pi'')(i_1 - i_0)}{w + \gamma}. \qquad [1]$$

Wenn zur Zeit t die Verschiebung der Nadel aus der Ruhelage $= x$ ist, und wenn p und q Constanten der Nadelbewegung sind, so hat man

$$\frac{d^2x}{dt^2} + p\frac{dx}{dt} + qx = C(i_1 - i_0).$$

Integration ergibt

$$\frac{dx}{dt} + px + q\int x\,dt = C\int (i_1 - i_0)\,dt = \frac{C}{w+\gamma}[\Pi i_0 - (\Pi' + \Pi'')(i_1 - i_0)].$$

Nochmals integrirend erhält man

$$x + p\int x\,dt + q\int dt\int x\,dt =$$

$$= \frac{C}{w+\gamma}\left[\Pi\int i_0 dt - (\Pi' + \Pi'')\int (i_1 - i_0)\,dt\right].$$

Die Integrale mit dt links verschwinden, wenn der Inductionsstoss in sehr kurzer Zeit ausgeführt wird. Zum Schluss des Stosses ist ferner nach [1] auch $\int (i_1 - i_0)\,dt = 0$, weil dann i_0 und $i_1 = 0$ werden, so dass als die ganze Verschiebung x′ während des Inductionsstosses herauskommt, so, wie im Texte angegeben:

$$x' = \frac{\Pi}{w+\gamma}\,C\int i_0 dt. \qquad [2]$$

i_0 selbst setzt sich zusammen aus den drei Teilen $E/(2W + w + \gamma)$, $K_0 di_0/dt$ und $K_1 di_1/dt$, wo K_0 und K_1 die Inductionscoefficienten und die Widerstände enthalten. Es ist also

$$\int i_0 dt = \frac{1}{2W + w + \gamma}\int E dt + K_0 i_0 + K_1 i_1.$$

Die beiden letzten Glieder aber sind zum Schlusse des Stosses wieder gleich Null, womit Gleichung 3 bewiesen ist.

hälfte. Die Stromstärke zur Zeit t ist $i = E/(R + W + \gamma)$, woraus die Nadelbeschleunigung

$$\frac{d^2x}{dt^2} = Ci = \frac{CE}{R + W + \gamma}$$

und die Nadel-Geschwindigkeit am Ende des Stosses

$$u = \frac{C}{R + W + \gamma}\int E\,dt. \tag{4}$$

Vermöge dieser Geschwindigkeit erfolge der Ausschlag x, während k das Dämpfungsverhältnis und $\varDelta = \log \operatorname{nat} k$ das natürliche log. Decrement bei diesem Versuche und τ die Schwingungsdauer der ungedämpften Nadel bedeute. Setzt man

$$k^{\frac{1}{\pi} \operatorname{arc\,tg} \frac{\pi}{\varDelta}} = S, \tag{5}$$

so ist bekanntlich

$$u = x\frac{\pi}{\tau}S = \frac{C}{R + W + \gamma}\int E\,dt$$

und

$$C\int E\,dt = x\frac{\pi}{\tau}(R + W + \gamma)\cdot S. \tag{6}$$

Dies endlich in (3) eingesetzt, erhält man

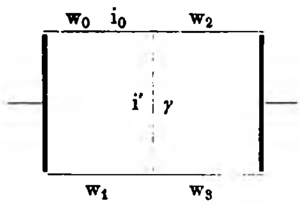
$$\Pi = \frac{x'}{x}\frac{\tau}{\pi}(w + \gamma)\frac{2W + w + \gamma}{R + W + \gamma}\frac{1}{S}. \tag{7}$$

Man braucht also, um den Selbstinductionscoefficienten Π zu bestimmen, ausser den Ausschlägen x' und x und den Widerständen W und $w + \gamma$ die Schwingungsdauer τ und die aus einigen Schwingungen hinreichend genau abzuleitende Grösse S.

Von nicht vollkommener Gleichheit der Galvanometerhälften wird man unabhängig, wenn man eine zweite Bestimmung von Π mit vertauschten Multiplicatoren ausführt und das Mittel nimmt.

Anstatt des Differentialmultiplicators und einfachen Inductors kann man auch einen einfachen Multiplicator und einen Differentialinductor anwenden. Verfahren und Gleichungen bleiben ungeändert; W bedeutet aber jetzt den Widerstand des Multiplicators, w denjenigen eines Inductorzweiges.

Brückenverbindung. Der Strom des Inductors vom Widerstande W werde durch die Widerstände $w_0\, w_1\, w_2\, w_3$ verzweigt. Man hat vorher die Widerstände so abgeglichen, dass ein constantes Element an Stelle des Inductors am Galvanometer γ keinen Ausschlag gibt, so dass $w_0\, w_3 = w_1\, w_2$ ist. w_0 sei derjenige Leiter, dessen Selbstinductionscoefficient Π gesucht wird; $w_1\, w_2\, w_3$ seien frei von Selbstinduction.



Die el. Kraft E erzeugt in w_0 einen Strom i_0, der mit Rücksicht auf die Beziehung $w_0\, w_3 = w_1\, w_2$ gefunden wird

$$i_0 = E \frac{w_3}{W\, w_2 + w_3\, (W + w_0 + w_2)}. \tag{8}$$

Die el. Kraft der Selbstinduction in w_0 ist, ohne Rücksicht auf das Vorzeichen, $= \Pi\, di_0/dt$. Da der Inductorzweig W als correspondirender Zweig zu der Brücke keinen Einfluss auf die Stromstärke im Galvanometer hat, so kann man die letztere gleich hinschreiben

$$i' = \Pi \frac{di_0}{dt} \frac{w_2 + w_3}{(w_0 + w_1)(w_2 + w_3) + \gamma\, (w_0 + w_1 + w_2 + w_3)}.$$

Mit Rücksicht auf $w_0\, w_3 = w_1\, w_2$ und unter Einsetzung des Wertes für i_0 aus Gl. 8, wenn man zugleich

$$\frac{W\, w_2 + w_3\, (W + w_0 + w_2)}{w_3}\; \frac{\gamma\, w_2 + w_0\, (\gamma + w_2 + w_3)}{w_2} = Q \tag{9}$$

setzt, kann man hierfür schreiben

$$i' = \frac{\Pi}{Q} \frac{dE}{dt}.$$

Gerade wie früher findet sich hieraus, wenn man $d^2x/dt^2 = Ci'$ setzt, dass die Nadel während eines rasch ausgeführten Inductionsstosses eine Zuckung x' ohne Endgeschwindigkeit macht [1])

$$x' = \frac{\Pi}{Q} C \int E dt. \tag{10}$$

$C \int E dt$ wird wie vorhin (S. 6) bestimmt, indem man den Inductionsstoss unter Einschaltung eines hinlänglich grossen bekannten Widerstandes R ungeteilt durch das Galvanometer sendet. Die vorher ruhende Nadel macht hierdurch den Ausschlag x. Dann gilt Gleichung 5 und 6 und man erhält aus (10)

$$\Pi = \frac{x'}{x} \frac{\tau}{\pi} \frac{1}{R + w + \gamma} \frac{Q}{S}. \tag{11}$$

Wurde $w_2 = w_3$ gemacht, so erhält Q den einfacheren Wert $Q = (2W + w_0 + w_2)\left(\gamma \frac{w_0 + w_2}{w_2} + 2 w_0\right)$.

Die Ausschläge x und x′ werden einfach in Scalenteilen an derselben Scala ausgedrückt. An grösseren Ausschlägen x bringt man, durch Subtraction von $11/32 \cdot x^3/A^2$ (A = Scalenabstand) die bekannte Correction auf den Sinus des halben Ausschlagswinkels an.

Soll die Selbstinductionsconstante mit grosser Genauigkeit gemessen werden, so werden die von Maxwell, Lord

1) Die vollständige Entwicklung mit Rücksicht auf die anderen Selbstinductionen lässt sich ähnlich wie S. 5 ausführen und zeigt, dass diese Umstände keinen Einfluss ausüben.

Rayleigh und Schuster, H. Weber, Dorn, Herwig gebrauchten Methoden der Unterbrechung und Schliessung eines constanten Stromes in geübter Hand wohl der hier beschriebenen überlegen sein, aber nur wenn man ausser grosser Geduld noch über sehr günstige Verhältnisse verfügt. Zu den letzteren gehören constante Zimmertemperatur, Widerstände die sich nicht durch den Strom erwärmen, widerstandsfreie verschiebbare Contacte und constante Elemente.

Kommt es, wie hier ja häufig, nur auf eine Genauigkeit von einem oder einigen Procenten an, so wird man die Anwendung des Inductors weit bequemer und auch einwurfsfreier finden, als diejenige von constanten Elementen; denn die Widerstände brauchen bei uns nicht mit einer so peinlichen Sorgfalt abgeglichen zu werden, wie dort.