Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Classe

der

k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.

Band XVII. Jahrgang 1887.

München.
Verlag der K. Akademie.
1888.

Commission bei G. Franz.

Ueber die Berechnung der Fernwirkung eines Magnets.

Von Friedrich Kohlrausch.

(Eingelaufen 5. Februar.)

Wenn man, um den Erdmagnetismus oder den Magnetismus eines Stabes zu bestimmen, ein Magnetometer nach den Gauss'schen Vorschriften aus mehreren Entfernungen ablenkt, so genügt die Beobachtung aus zwei Entfernungen und die Rechnung nach der Gauss'schen Formel nicht immer den Ansprüchen an die Genauigkeit. Eine dritte Entfernung hinzuzunehmen ist aber mindestens in der Beobachtung und Rechnung umständlich; ohne besondere Vorsicht kann man dadurch sogar zu grösserer Ungenauigkeit geführt werden.

Ich glaube, dass eine kleine Abänderung der Rechnung für den Fall, dass man mit einer kurzen Magnetometernadel arbeitet, diesen Uebelstand grossenteils beseitigen kann.

Ein gestreckter Magnet sei dadurch definirt, dass er auf dem Längenelement dx die Menge $f(x)dx$ freien Magnetismus habe. x werde von der Mitte an gerechnet. Setzt man das über die ganze Länge ausgedehnte Integral

$$\int f(x)\, x^n dx = M_n, \tag{1}$$

so wird die Kraft des Magnets auf einen Einheitspol im Abstande a von der Mitte des Magnets,

wenn der Pol in der verlängerten Axe des Magnets liegt (erste Gauss'sche Hauptlage)

$$k_I = \frac{2M}{a^3}\left(1 + \frac{2}{a^2}\frac{M_3}{M} + \frac{3}{a^4}\frac{M_5}{M} \ldots\right); \tag{2, I}$$

wenn der Pol in der Senkrechten auf dem Mittelpunct der magnetischen Axe liegt (zweite Hauptlage)

$$k_{II} = \frac{M}{a^3}\left(1 - \frac{3}{2}\frac{1}{a^2}\frac{M_3}{M} + \frac{15}{8}\frac{1}{a^4}\frac{M_5}{M}\ldots\right).\ ^{1)} \qquad (2, \text{II})$$

$M = \int f(x)\, x\, d\, x$ bedeutet das magnetische Moment des Stabes.

Wir nehmen andrerseits einen schematischen Magnet mit punctförmigen Polen an. $\mathfrak{l}$ sei der Abstand dieser Pole von einander. Dann hat man bekanntlich

$$k_I = 2\frac{M}{a^3}\left(1 - \frac{1}{4}\frac{\mathfrak{l}^2}{a^2}\right)^{-2} = 2\frac{M}{a^3}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{\mathfrak{l}^2}{a^2} + \frac{3}{16}\frac{\mathfrak{l}^4}{a^4}\ldots\right)$$

$$k_{II} = \frac{M}{a^3}\left(1 + \frac{1}{4}\frac{\mathfrak{l}^2}{a^2}\right)^{-\frac{3}{2}} = \frac{M}{a^3}\left(1 - \frac{3}{8}\frac{\mathfrak{l}^2}{a^2} + \frac{15}{128}\frac{\mathfrak{l}^4}{a^4}\ldots\right).$$

Will man den wirklichen Magnet in der Rechnung durch einen solchen schematischen Magnet ersetzen, so wählt man den Polabstand $\mathfrak{l}$ so, dass das erste Correctionsglied mit a^{-2} dadurch den richtigen Wert bekommt. Man erhält also, und zwar für Wirkungen aus beiden Hauptlagen identisch, die Beziehung

$$\mathfrak{l}^2 = 4\frac{M_3}{M} \qquad \mathfrak{l} = 2\sqrt{\frac{M_3}{M}}.$$

Zugleich wollen wir aber auch denjenigen „Polabstand" berechnen, welcher das zweite Correctionsglied mit a^{-4} auf seinen richtigen Wert bringen würde. Zur Unterscheidung

---

1) Vgl. z. B. Lamont, Hdb. d. Erdmagnetismus, Berlin 1849, S. 22. Diese Formeln setzen bekanntlich voraus, falls der Stab nicht ganz symmetrisch magnetisirt ist, dass man denselben ausser der einen Beobachtung noch mit verkehrten Polen benutzt und aus den beiden in diesen Lagen ausgeübten Kräften das Mittel nimmt. Dies geschieht ja bei allen Messungen.

heisse dieser Polabstand $\mathfrak{l}_2$. Wir erhalten, wieder für beide Hauptlagen identisch

$$\mathfrak{l}_2^4 = 16\,\frac{M_5}{M} \qquad \mathfrak{l}_2 = 2\sqrt{\frac{M_5}{M}}.$$

Van Rees hat einige Magnete auf die Verteilung des freien Magnetismus untersucht.[1]) Er stellt seine Beobachtungen in der Weise dar, dass er das magnetische Moment des Stabelementes $dx = [a - b(\mu^x + \mu^{-x})]\,dx$ setzt. a, b und μ sind Constanten des Stabes, x ist der Abstand des betr. Längenelementes von der Stabmitte.

Die Dichte des freien Magnetismus auf dem Querschnitte x des Stabes findet man hieraus durch Differentiation, ohne Rücksicht auf das Vorzeichen

$$f(x) = b\,\varepsilon\,(\mu^x - \mu^{-x}),$$

wo $\varepsilon = \log\text{nat}\,\mu$ ist. Ausserdem bleibt an den Stabenden noch die Menge s freien Magnetismus

$$s = a - b\,(\mu^l + \mu^{-l}),$$

wo $l = \frac{1}{2} L$ die halbe Stablänge bedeutet.

Hieraus erhält man

$$\frac{1}{2} M = l\,s + \int_0^l x\,f(x)\,dx$$

$$= l\,s + b\left[l\,(\mu^l + \mu^{-l}) - \frac{\mu^l - \mu^{-l}}{\varepsilon}\right].$$

1) Van Rees, Pogg. Ann. Bd. 74 S. 219, 1848. Den ersten dieser Stäbe hat schon Riecke als Beispiel für seine theoretischen Untersuchungen über Magnetpole benutzt und die dem ersten Correctionsgliede entsprechende Grösse $\mathfrak{l}$ berechnet. Wied. Ann. Bd. 8 S. 318. 1879.

$$\tfrac{1}{2} M_3 = l^3 s + \int_0^l x^3 f(x)\, dx$$

$$= l^3 s + b\left[\left(l^3 + \frac{6}{\varepsilon^2} l\right)\left(\mu^l + \mu^{-l}\right) - \left(\frac{3}{\varepsilon} l^2 + \frac{6}{\varepsilon^3}\right)\left(\mu^l - \mu^{-l}\right)\right]$$

$$\tfrac{1}{2} M_5 = l^5 s + \int_0^l x^5 f(x)\, dx$$

$$= l^5 s + b\Big[\left(l^5 + \frac{20}{\varepsilon^2} l^3 + \frac{120}{\varepsilon^4} l\right)\left(\mu^l + \mu^{-l}\right) - \left(\frac{5}{\varepsilon} l^4 + \frac{60}{\varepsilon^3} l^2 + \frac{120}{\varepsilon^5}\right)\left(\mu^l - \mu^{-l}\right)\Big].$$

Van Rees gibt die Constanten a, log b und log μ; ε und s sind hieraus berechnet.

Stab	Dicke cm	Länge cm	a	log b	log μ	ε	s
I	2,0	50,0	1,48648	9.69062-10	.01590	0,03661	0,06512
II	2,6	62,5	0,58646	8.97883	.02348	0,05406	0,05297
III	1,65	80,2	0,46658	8.14700	.03695	0,08508	0,03668.

Dies eingesetzt berechne ich die Polabstände $\mathfrak{l}$ und $\mathfrak{l}_2$ und ihr Verhältnis zur Stablänge L

Stab	L cm	$\mathfrak{l}$ cm	$\mathfrak{l}_2$	$\mathfrak{l}$/L	$\mathfrak{l}_2$/L	$\mathfrak{l}_2/\mathfrak{l}$
I	50,0	41,2	42,9	0,824[1]	0,858	1,04
II	62,5	52,2	54,0	0,835	0,865	1,04
III	80,2	69,1	72,1	0,861	0,899	1,04.

Ich nehme noch die Verteilungsweisen $f(x) = c \cdot x$ oder $\pm c \cdot x^2$, $c \cdot x^3$, $\pm c \cdot x^4$, ohne besondere Pole an den Stabenden. Hierfür berechnet sich

1) Diese Zahl ist schon von Riecke berechnet worden.

$f(x)$	$\mathfrak{l}/L$	$\mathfrak{l}_2/L$	$\mathfrak{l}_2/\mathfrak{l}$
$c \cdot x$	0,775	0,809	1,04
$\pm c \cdot x^2$	0,816	0,841	1,03
$c \cdot x^3$	0,845	0,863	1,02
$\pm c \cdot x^4$	0,866	0,880	1,01.

Von den letzteren Formeln dürfte $c \cdot x^2$ sich durchschnittlich von der Wirklichkeit am wenigsten entfernen. Unter den Rees'schen Magneten weicht der Stab III, dessen Länge 50 mal die Dicke übertrifft, von den gebräuchlichen Formen stark ab.

Aus diesen Zahlenzusammenstellungen folgt zweierlei:

1) Für die den gewöhnlichen Verhältnissen nächststehenden Verteilungsweisen des Magnetismus in einem Stabe ist der aus dem ersten Correctionsglied abgeleitete „Polabstand" $\mathfrak{l}$ nahe 0,83 = 5/6 der Länge L. Selbst beträchtliche Aenderungen in der Annahme der Verteilung lassen das Verhältnis in den Grenzen 4/5 und 7/8 bleiben. Die bisher ausgeführten Messungen von Polabständen durch Schneebeli, v. Helmholtz, Töpler, sowie von Hallock und mir haben in der That Werte innerhalb dieser Grenzen gegeben.

2) Der für das zweite Correctionsglied einzusetzende Polabstand $\mathfrak{l}_2$ weicht von dem aus dem ersten Gliede abgeleiteten nur wenig ab. Für genaue Rechnungen wird es wahrscheinlich stets genügen, $\mathfrak{l}_2$ um $1/30$ grösser zu nehmen als $\mathfrak{l}$. Für die weitaus häufigsten Zwecke aber wird dieser kleine Unterschied ganz unwesentlich sein [1]) und man kann

1) Bei Magnetometerablenkungen wird man die kleinste Entfernung a mindestens wohl gleich dem Vierfachen des Polabstandes setzen dürfen. Die Vernachlässigung des Gliedes mit $\mathfrak{l}^4/a^4$ kann hier einen Fehler von $1/1000$ bewirken und ist, wie schon Lamont bemerkte, keineswegs immer gestattet. Vgl. auch Riecke l. c. S. 325. Der Unterschied von $1/10000$ aber, der bei der Ersetzung von $\mathfrak{l}_2$ durch $\mathfrak{l}$ entsteht, wird in den seltensten Fällen irgend eine Bedeutung haben.

beide Glieder mit dem für das erste geltenden Polabstande $\mathfrak{l}$ berechnen.

3) Das letztere führt dann aber zu einer sehr übersichtlichen Berechnungsweise, denn es heisst, dass man punctförmige Pole annehmen darf. Somit würden die Fernwirkungen k nach den Formeln zu berechnen sein

$$\text{1. HL.} \qquad\qquad \text{2. HL.}$$

$$k_{\mathrm{I}} = 2\frac{M}{a^3}\left(1 - \tfrac{1}{4}\frac{\mathfrak{l}^2}{a^2}\right)^{-2} \qquad k_{\mathrm{II}} = \frac{M}{a^3}\left(1 + \tfrac{1}{4}\frac{\mathfrak{l}^2}{a^2}\right)^{-3/2}. \qquad (3).$$

A n w e n d u n g auf die B e o b a c h t u n g e n. Es werde zunächst die gewöhnliche Gauss'sche Anordnung vorausgesetzt, bei welcher die Ablenkungen φ_1 und φ_2 eines Magnetometers aus den zwei Abständen a_1 und a_2 beobachtet werden. Der Polabstand $\mathfrak{l}'$ der Nadel sei hinreichend klein, dass Glieder über $\mathfrak{l}'^2/a^2$ nicht berücksichtigt zu werden brauchen.

Aus den Formeln 3 lässt sich leicht ableiten, dass man das Verhältnis des Stabmagnetismus M zum Erdmagnetismus H zu berechnen hat M/H =

$$\text{Erste HL.} \qquad\qquad \text{Zweite HL.}$$

$$\tfrac{1}{2}\left\{\frac{a_1^{\,2} - a_2^{\,2}}{\sqrt{\dfrac{a_1}{\mathrm{tg}\varphi_1}} - \sqrt{\dfrac{a_2}{\mathrm{tg}\varphi_2}}}\right\}^2 \qquad \left\{\frac{a_1^{\,2} - a_2^{\,2}}{\mathrm{tg}\varphi_1^{\;-2/3} - \mathrm{tg}\varphi_2^{\;-2/3}}\right\}^{3/2}. \quad (4)$$

Man hat hier freilich nicht wie bei Gauss denselben Ausdruck für beide Lagen[1]), aber hierauf kommt doch in Anbetracht der grösseren Genauigkeit unserer Ausdrücke nichts an.

---

1) Gauss hat, vom Factor $1/2$ abgesehen, für beide Fälle den Ausdruck $M/H = (a_1^5\,\mathrm{tg}\varphi_1 - a_2^5\,\mathrm{tg}\varphi_2)/(a_1^2 - a_2^2)$.

Sollen die Polabstände aus diesem Versuche ein für allemal bestimmt werden, um künftig nur einer Beobachtung aus einem Abstande zu bedürfen, so findet man

Erste HL.

$$\mathfrak{l}^2 - \tfrac{8}{3}\mathfrak{l}'^2 = 4\,\frac{\sqrt{a_1^3 \operatorname{tg}\varphi_1} - \sqrt{a_2^3 \operatorname{tg}\varphi_2}}{\sqrt{\dfrac{\operatorname{tg}\varphi_1}{a_1}} - \sqrt{\dfrac{\operatorname{tg}\varphi_2}{a_2}}}.$$

Zweite HL. (5)

$$\mathfrak{l}^2 - 4\mathfrak{l}'^2 = 4\,\frac{a_1^2 \operatorname{tg}\varphi_1^{2/3} - a_2^2 \operatorname{tg}\varphi_2^{2/3}}{\operatorname{tg}\varphi_2^{2/3} - \operatorname{tg}\varphi_1^{2/3}}.$$

Hieraus, oder wenn $\mathfrak{l}$ und $\mathfrak{l}'$ anderweitig bekannt sind [1]), findet sich aus einer zu dem Abstande a beobachteten Ablenkung φ

Erste HL. $$\frac{M}{H} = \tfrac{1}{2}a^3 \operatorname{tg}\varphi \left(1 - \tfrac{1}{4}\frac{\mathfrak{l}^2 - \frac{8}{3}\mathfrak{l}'^2}{a^2}\right)^2$$

(6)

Zweite HL. $$\frac{M}{H} = a^3 \operatorname{tg}\varphi \left(1 + \tfrac{1}{4}\frac{\mathfrak{l}^2 - 4\mathfrak{l}'^2}{a^2}\right)^{3/2}.$$

S c h e i b e n f ö r m i g e M a g n e t n a d e l n. Magnetisirte vertical hängende Stahlspiegel sind für kleine Magnetometer bequem. Die Formeln 4 oder auch 5 und 6 im Zusammen-

---

1) Ist die Nadel nicht so kurz, dass man die höheren Glieder vernachlässigen darf, so werden auch für diese Correction am besten die Formeln benutzt (vgl. z. B. Riecke l. c. S. 325), die sich auf punctförmige Pole beziehen.

Es wird vorgeschlagen, den Polabstand aus den Convergenzpuncten der Kraftlinien des Magnets, die man mittels Eisenstaub bestimmt, zu ermitteln. Dies würde freilich bequem sein; aber um das Verfahren zu rechtfertigen, müsste zuerst nachgewiesen werden, dass die genannten Schnittpuncte praktisch für die Fernpole gesetzt werden können. Theoretisch ist dies bekanntlich im allgemeinen nicht der Fall.

hange kann man natürlich hier ohne weiteres anwenden. Hat man aber z. B. einen Magnetstab, dessen Polabstand anderweitig bekannt ist, so wird man wünschen, die Correction wegen der Ausdehnung der Magnetnadel selbständig zu kennen. Man wird dieselben für kleine Scheiben meistens genügend genau folgendermassen schätzen können.

Wir nehmen einen Kreis vom Halbmesser ϱ gleichförmig magnetisirt an. Der freie Magnetismus befindet sich dann auf dem Umfange des Kreises und das Längenelement ds des letzteren wird eine Menge $\pm c\,ds \cdot dy/ds = \pm c\,dy$ enthalten, wenn y den Abstand des Elementes ds von dem horizontalen Durchmesser der Scheibe bedeutet, welcher letztere die magnetische Axe darstellt. Das magnetische Moment der Scheibe ist dann

$$M' = \int_{-\varrho}^{\varrho} 2\sqrt{\varrho^2 - y^2}\,c\,dy = c\varrho^2\pi. \qquad (7)$$

Erste Hauptlage. Auf diese Nadel wirke ein Magnet, der im Abstande a von derselben in der Senkrechten auf ihrem Mittelpuncte liege. Die Kraft des Magnets auf einen Einheitspol im Mittelpuncte der Nadel sei $= k_1$. Die zur Scheibenebene senkrechte Componente der Kraft, welche der Magnet auf das Element c dy des freien Magnetismus ausübt, ist dann, unter Vernachlässigung höherer Potenzen von ϱ/a, gleich [1])

$$k_1\left(1 - 3\frac{\varrho^2}{a^2}\right)c\,dy.$$

1) Der Magnet M werde in zwei Componenten $M\cos\varphi$ und $M\sin\varphi$ zerlegt, wo $\sin\varphi = \varrho/\sqrt{a^2+\varrho^2}$. Die erstere Componente übt aus 1. HL. eine Kraft auf ein magnetisches Teilchen 1 in der Peripherie des Kreises aus, die wir, weil in dieser Correction der Magnet als kurz betrachtet werden kann, schreiben dürfen $= 2M\cos\varphi \cdot (a^2+\varrho^2)^{-3/2}$. Die zur Scheibe senkrechte Componente dieser Kraft ist $2M\cos^2\varphi \cdot (a^2+\varrho^2)^{-3/2}$. Ebenso rührt von der anderen Magnetcomponente her $- M\sin^2\varphi \cdot (a^2+\varrho^2)^{-\frac{3}{2}}$. Beide zusammen geben also

Der Correctionsfactor $1 - 3\varrho^2/a^2$ ist offenbar für alle Puncte der Peripherie derselbe und muss also auch für das gesammte auf die Nadel ausgeübte Drehungsmoment gelten. Das letztere ist also gleich

$$k_{\mathrm{I}} M' \left(1 - 3\frac{\varrho^2}{a^2}\right). \qquad (8\ \mathrm{I})$$

Zweite Hauptlage. Der Magnet steht senkrecht zum Meridian. Die vom Magnet auf einen Einheitspol im Mittelpuncte der Kreisscheibe ausgeübte Kraft heisse k_{II}. Ein Element freien Magnetismus $c\,dy$ oder $c\,dx \cdot x/\sqrt{\varrho^2 - x^2}$ mit der Abscisse x erfährt dann eine Kraft $=$

$$\varkappa = k_{\mathrm{II}} \cdot c\,dx \frac{x}{\sqrt{\varrho^2 - x^2}} \frac{a^3}{(a^2 + \varrho^2 - 2ax)^{3/2}}.$$

Das in derselben Horizontalen gegenüberliegende ebensogrosse Element erhält die Kraft

$$\varkappa' = k_{\mathrm{II}} \cdot c\,dx \frac{x}{\sqrt{\varrho^2 - x^2}} \frac{a^3}{(a^2 + \varrho^2 + 2ax)^{3/2}}.$$

Das von diesen beiden Teilen herrührende Drehungsmoment ist $= (\varkappa + \varkappa')x$, wofür man durch Reihenentwicklung findet

$$2k_{\mathrm{II}} c \left(1 - \frac{3}{2}\frac{\varrho^2}{a^2}\right)\left(1 + \frac{15}{2}\frac{x^2}{a^2}\right) \frac{x^2\,dx}{\sqrt{\varrho^2 - x^2}}.$$

Das Integral dieses Ausdruckes von $-\varrho$ bis ϱ genommen gibt das gesammte Drehungsmoment. Man findet mit erlaubten Kürzungen

$$k_{\mathrm{II}} \cdot c\varrho^2 \pi \cdot \left(1 - \frac{3}{2}\frac{\varrho^2}{a^2}\right)\left(1 + \frac{45}{8}\frac{\varrho^2}{a^2}\right) = k_{\mathrm{II}} \cdot M' \left(1 + \frac{33}{8}\frac{\varrho^2}{a^2}\right). \qquad (8\,\mathrm{II})$$

$M(a^2 + \varrho^2)^{-\frac{3}{2}}(2\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) = 2Ma^{-3}(1 - \frac{3}{2}\varrho^2/a^2)(1 - \frac{3}{2}\sin^2\varphi)$. Nun für $\sin\varphi$ seinen Wert eingesetzt und ϱ^4/a^4 vernachlässigt, erhält man $2Ma^{-3}(1 - 3\varrho^2/a^2)$.

Was die Grösse ϱ anlangt, so haben Hallock und ich gefunden, dass bei der Anwendung einer Stahlscheibe vom Durchmesser d in der Tangentenbussole der freie Magnetismus im Abstande $\varrho = 0{,}40 \cdot d$ von dem Mittelpuncte anzunehmen war[1]).

Man wird nicht weit fehlgreifen, wenn man diese Annahme auf unseren Fall überträgt. Thut man dies, so beträgt also der Correctionsfactor wegen der Dimensionen der Scheibe für das aus einem Abstande a durch einen Magnet ausgeübte Drehungsmoment

$$\begin{aligned} &\text{erste HL.} \qquad 1 - 3\frac{\varrho^2}{a^2} = 1 - 0{,}48\frac{d^2}{a^2} \\ &\text{zweite HL.} \qquad 1 + \frac{33}{8}\frac{\varrho^2}{a^2} = 1 + 0{,}66\frac{d^2}{a^2}, \end{aligned} \tag{9}$$

also die Coefficienten nahe gleich $^1/_2$ bez. $^2/_3$.

Vergleicht man diese Ausdrücke mit denjenigen für gestreckte Nadeln vom Polabstande $\mathfrak{l}'$, nämlich $1 - {}^3/_4\,\mathfrak{l}'^2/a^2$ und $1 + {}^3/_2\,\mathfrak{l}'^2/a^2$, so sieht man $0{,}48\,d^2$ statt ${}^3/_4\,\mathfrak{l}'^2$ und $0{,}66\,d^2$ statt ${}^3/_2\,\mathfrak{l}'^2$ eintreten.

Man kann also die dort gegebenen Ausdrücke (Gl. 6) auch auf die Scheibennadeln vom Durchmesser d anwenden, wenn man als „Polabstand" einer Scheibennadel einsetzt

in erster HL. $\mathfrak{l}' = 0{,}80 \cdot d$
in zweiter HL. $\mathfrak{l}' = 0{,}66 \cdot d$.

Diese Betrachtung beansprucht natürlich nichts weiter, als in Ermangelung exacter Angaben eine ungefähre Schätzung der für Scheibennadeln aus ihren Dimensionen entspringenden Correctionen zu geben. Für kleine Scheiben wird dieselbe häufig ausreichend genau sein.

---

1) Wied. Ann. Bd. 22 S. 411. 1884.

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der Bayerischen Akademie der Wissenschaften München

Jahr/Year: 1888

Band/Volume: 1887

Autor(en)/Author(s): Kohlrausch Friedrich Wilhelm Georg

Artikel/Article: Ueber die Berechnung der Fernwirkung eines Magnets 23-32