Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Classe

der

k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.

Band XVIII. Jahrgang 1888.

München
Verlag der K. Akademie
1889.

In Commission bei G. Franz.

Ueber einen Satz aus der Theorie der Formen.

Von A. Voss in München.

(Eingelaufen 7. Januar.)

Im V. Bande der Mathematischen Annalen hat Herr Gordan[1]) den folgenden Satz gegeben:

„Es sei F eine Form, welche p Reihen von Veränderlichen enthält[2])

$$p\left\{\begin{array}{llll} x_1, x_2 & . & . & x_p; \\ y_1, y_2 & . & . & y_p; \\ z_1, z_2 & . & . & z_p; \\ . \quad . & . & . & . \\ . \quad . & . & . & . \end{array}\right.$$

und es sei symbolisch

$$F = (a_x\, b_y c_z \ldots)^\nu\,,\ a_x = \sum_1^p a_i\, x_i\,,\ \ldots\ .^{3})$$

Enthält dann F als wirklichen Factor die νte Potenz der Determinante der x, y, z..., so ist der symbolische Ausdruck des anderen Factors von

1) Ueber Combinanten a. a. O. S. 107 ff.

2) Die Determinante eines solchen Systems sei im folgenden durch

$$[x\,y\,z..]$$

bezeichnet.

3) Eine solche Form ist weiter unten durch F_p^ν bezeichnet.

F die νte Potenz der Determinante der a, b, c ..., so dass wenn

$$X = [x y z . .], \quad R = [a b c . . .]$$

bedeutet,

$$F = C_{\nu, p} X^{\nu} R^{\nu}$$

ist, wo $C_{\nu, p}$ eine numerische Constante bezeichnet."

Da dieser Satz für viele Betrachtungen der Formentheorie fundamental ist, hat es vielleicht ein Interesse, einen directen Beweis desselben zu geben. Einen solchen erhält man aber auf folgendem Wege.

Man multiplicire die Gleichung

$$1) \quad F = (a_x b_y c_z \ldots)^{\nu} = S [x y z \ldots]^{\nu},$$

welche nach Voraussetzung stattfindet, mit der νten Potenz der Determinante R der Symbole $a', b', c' \ldots$, welche mit den a, b, c ... gleichbedeutend sind, dann entsteht

$$2) \quad R^{\nu} F = S [a'_x b'_y c'_z \ldots]^{\nu}.$$

Alsdann zeigt eine sehr einfache Ueberlegung, dass der rechterhand in 2) stehende symbolische Determinantenfactor nur um einen Zahlenfactor von F verschieden sein kann. Denkt man sich nämlich diese Determinante einen Augenblick in der üblichen Form

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & a_{2p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdot & \cdot & a_{pp} \end{vmatrix}^{\nu} = (\Sigma C a_{1\alpha} a_{2\beta} \ldots a_{p\varkappa})^{\nu}$$

geschrieben, in der die Coefficienten C gleich der positiven oder negativen Einheit sind, je nachdem die Permutation $\alpha \beta \ldots \varkappa$ eine positive oder negative ist, während die ersten Indices sich auf die Symbole a, b, c, ..., die zweiten auf die

Variabeln x, y, z ... beziehen, und nun die νte Potenz nach dem polynomischen Satze ausgeführt, so ist jedes Glied der Entwicklung von einem Zahlenfactor abgesehen von der Form

$$3)\quad \begin{array}{c} (a_{1\alpha^1} a_{1\beta^1} \ldots a_{p\varkappa^1})^{\nu_1} \\ (a_{2\alpha^2} a_{2\beta^2} \ldots a_{p\varkappa^2})^{\nu_2} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ (a_{1\alpha^\lambda} a_{2\beta^\lambda} \ldots a_{p\varkappa^\lambda})^{\nu_\lambda} \end{array}$$

unter der Voraussetzung

$$\nu_1 + \nu_2 + \ldots \nu_\lambda = \nu\,, \quad \lambda = p!\,.$$

Man polarisire nun die Gleichung 1) je $\nu_1, \nu_2 \ldots \nu_\lambda$ mal nach x mittelst der Operation

$$\left(\xi^1 \frac{d}{dx}\right)^{\nu_1} \left(\xi^2 \frac{d}{dx}\right)^{\nu_2} \ldots \left(\xi^\lambda \frac{d}{dx}\right)^{\nu_\lambda}$$

wobei

$$\left(\xi^i \frac{d}{dx}\right)^{\nu_i} = \left(\sum_1^p \xi^i_k \frac{d}{dx_k}\right)^{\nu_i}$$

zu setzen ist, und ebenso nach y, z ... unter Einführung entsprechender Variabelnreihen $\eta, \zeta, \ldots$. Durch Ausführung der Operation an der Determinante X entsteht ein Product von Determinanten, in denen die Elemente x, y, z.. durch irgend welche der $\xi, \eta, \zeta \ldots$ ersetzt sind. Man ersetze nun die λ Variabelnreihen ξ^i durch diejenigen Werthe der x, y, z.. welche durch die Indices $\alpha^1 \alpha^2 \ldots \alpha^\lambda$ in 3) vorgeschrieben sind; ebenso die $\eta, \zeta \ldots$. Alsdann entsteht bis auf einen Zahlenfactor das in 3) stehende Aggregat. Rechterhand aber kann, da die $\xi, \eta, \zeta \ldots$ immer nur durch die x, y, z ... ersetzt werden, nichts anderes als die Determinante X selbst (wieder von einem Zahlenfactor abgesehen) auftreten, da alle übrigen Terme gleich Null werden. Demnach ist jedes Glied der polynomischen Entwickelung bis auf einen solchen Factor gleich der rechten Seite von 1), und man hat so unmittelbar

$$4)\quad [a'_x\, b'_y\, c'_z \ldots]^\nu = [x\, y\, z \ldots]^\nu S\, \gamma_{\nu,p} = F \gamma_{\nu,p}\,,$$

wo $\gamma_{\nu,p}$ eine von ν und p abhängige Zahl; also nach 2)

$$R^\nu F = \gamma_{\nu,p} S\, F\,,$$
$$S = \frac{R^\nu}{\gamma_{\nu,p}} = C_{\nu,p} R^\nu\,,$$

wie zu zeigen war.

Durch eine ganz ähnliche Betrachtung lässt sich auch der Werth von $\gamma_{\nu,p}$ bestimmen. Man erkennt nämlich sofort, wenn man den angegebenen Polarenprocess auf alle Variabelreihen mit Ausnahme einer, etwa der ersten, erstreckt, die Richtigkeit der Formel

$$5)\qquad a'^{\,\nu}_x [b'_y\, c'_z \ldots]^\nu = S\, [x\, y\, z \ldots]^\nu\, \gamma_{\nu,p-1}$$

Denkt man sich nun die Determinante

$$[a'_x\, b'_y\, c'_z \ldots]$$

nach den in Bezug auf die erste Horizontalreihe genommenen Unterdeterminanten entwickelt, so dass also letztere nur die p—1 Symbole b, c... enthalten und dann die νte Potenz ausgeführt, so zeigt die Formel 5) sofort, dass man jeden Term der Entwickelung durch die rechte Seite von 1) mit Hülfe eines Polarenprocesses ausdrücken kann. Und da jeder Coefficient der Polynomialentwickelung die Form

$$\frac{\nu!}{\nu_1!\,\nu_2!\ldots\nu_p!}\,,\qquad \nu_1 + \nu_2 + \ldots \nu_p = \nu$$

hat, so folgt hier ohne jede weitere Rechnung

$$6)\qquad \gamma_{\nu,p-1} N_{\nu,p} = \gamma_{\nu,p}\,,$$

wo $N_{\nu,p}$ die Anzahl der Glieder einer homogenen Form νter Ordnung von p Variabelen oder die Anzahl der Terme in der polynomischen Entwicklung ist. Da endlich $\gamma_{\nu,1}$ offenbar gleich Eins ist, hat man

$$\gamma_{\nu,p} = N_{\nu,p}\, N_{\nu,p-1} \ldots N_{\nu,1}\,.$$

Die vorstehende Betrachtung zeigt, dass der Gordan'sche Satz in folgender Weise erweitert werden kann.

Enthält eine Form, deren symbolischer Ausdruck von der Gestalt

$$F = (a^1{}_{x_1} a^2{}_{x_2} \dots)^{\nu_a} (b^1{}_{y_1} b^2{}_{y_2} \dots)^{\nu_b} (c^1{}_{z_1} c^2{}_{z_2} \dots)^{\nu_c} \dots$$

ist, deren einzelne Factoren also symbolisch durch

$$F^{\nu_a}_{p_a} F^{\nu_b}_{p_b} F^{\nu_c}_{p_c} \dots$$

zu bezeichnen sind, als wirklichen Factor das Determinantenproduct

$$[x_1 x_2 \dots]^{\nu_a} [y_1 y_2 \dots]^{\nu_b} [z_1 z_2 \dots]^{\nu_c} \dots .$$

so ist der symbolische Ausdruck des anderen Factors gegeben durch

$$C [a^1 a^2 \dots]^{\nu_a} [b^1 b^2 \dots]^{\nu_b} [c^1 c^2 \dots]^{\nu_c} \dots$$

Wie man sieht, kann also auf jeden symbolischen Factor für sich der Gordan'sche Satz angewandt werden. Lässt man jeden symbolischen Factor F^{ν}_{p} in eine wirkliche Form übergehen, so erkennt man, dass der numerische Factor C gleich ist dem Producte der Factoren

$$C_{\nu_a, p_a} C_{\nu_b, p_b} C_{\nu_c, p_c} \dots \dots .$$