Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Classe

der

k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.

Band XIX. Jahrgang 1889.

München.
Verlag der K. Akademie.
1890.

In Commission bei G. Franz.

Sitzung vom 1. Juni 1889.

1. Herr AUREL VOSS spricht über: „die conjugirte Transformation einer bilinearen Form in sich selbst".

2. Herr LUDWIG RADLKOFER macht Mittheilungen: a) „über Nothochilus, eine neue Scrophularineen-Gattung aus Brasilien", b) „über Theophrasta und Clavija".

3. Herr GUSTAV BAUER legt eine von dem correspondirenden Mitgliede der Classe, Herrn M. NÖTHER in Erlangen eingesandte Abhandlung: „zur Theorie der Berührungscurven der ebenen Curve vierter Ordnung" vor. Dieselbe ist für die Denkschriften bestimmt.

4. Herr RICHARD HERTWIG hält einen Vortrag „über die Conjugation der Infusorien". Die Abhandlung wird in die Denkschriften aufgenommen werden.

Ueber die conjugirte Transformation einer bilinearen Form in sich selbst.

Von A. Voss.

(Eingelaufen 7. Juni)

Die folgenden Mittheilungen beziehen sich auf das Problem der Transformation einer bilinearen Form in sich selbst durch zu einander conjugirte lineare Substitutionen. Jede Form S von nicht verschwindender Determinante lässt solche Transformationen zu, die nur dann identisch sind, wenn S in Bezug auf contragrediente Transformationen irreducibel ist. Die sämmtlichen Substitutionen U dieser Art zerfallen in zwei Classen, je nachdem sie mit S oder S^2 vertauschbar sind. Die Substitutionen der ersten Classe sind in § 2 vollständig behandelt; für die der zweiten ist in § 3 im wesentlichen nur die Reduction auf den einfachsten Fall angegeben; doch muss die genaue Untersuchung der gegenseitigen Beziehungen zwischen den verschiedenen Gruppen der hier möglichen Substitutionen einer ausführlicheren Darlegung vorbehalten bleiben.

Bei allen diesen Fragen tritt eine lineare Gleichung, deren symbolische Form

$$S X + X S = o$$

ist, auf, die mit der Theorie der conjugirten Transformationen überhaupt in engem Zusammenhange steht.

Von besonderem Interesse schien mir die Frage, ob das Problem der conjugirten Transformation ebenso wie das der congruenten (cogredienten) Transformation solche Lösungen besitzen kann, die durch rationale Operationen gefunden werden können. Dies ist in der That immer der Fall, sobald die beiden Determinanten

$$|S - E\varrho|, \quad |S + E\varrho|$$

nicht theilerfremd sind, und die Ermittelung aller Substitutionen U, für die wenigstens eine der Determinanten

$$|U + E|, \quad |U - E|$$

nicht verschwindet, sowie der aus diesen herleitbaren Grenzfälle, lässt sich durch die Betrachtung des eben bemerkten Systemes von linearen Gleichungen, dessen Determinante der Coefficienten eine symmetrische verschwindende Determinante sein muss, in ähnlicher Weise wie bei der congruenten Transformation erledigen.

§ 1.

Die conjugirte Transformation einer bilinearen Form in sich selbst.

Soll die bilineare Form von n Variabelnpaaren x, y

$$S = \Sigma\, a_{ik}\, x_i\, y_k,$$

deren Determinante, wo nicht das Gegentheil besonders anangegeben wird, als nicht verschwindend vorausgesetzt werden soll, durch die beiden zu einander conjugirten linearen Substitutionen[1])

$$x_i = \Sigma\, c_{im}\, \xi_m,$$
$$y_k = \Sigma\, c_{nk}\, \eta_n,$$

in sich selbst übergehen, so hat man diejenigen Systeme der n^2 Substitutionscoefficienten c_{ik} zu bestimmen, welche die n^2 quadratischen Gleichungen

$$1)\quad \Sigma_{i,k}\, a_{ik}\, c_{im}\, c_{nk} = a_{mn}$$

befriedigen. Die Determinante der c_{ik}, die Transformationsdeterminante, darf dabei nicht verschwinden. Bezeichnet man sie mit ε, so ist nach 1)

$$\varepsilon^2 = 1.$$

Die Substitution heisse auch hier eine eigentliche, resp. uneigentliche, je nachdem ε gleich $+1$ oder gleich -1 ist.

Man kann, wenn die zu der Substitution gehörige bilineare Form

$$\Sigma\, c_{ik}\, x_i\, y_k$$

durch U bezeichnet wird, die Gesammtheit der Gleichungen 1) in der symbolischen Gleichung

$$2)\quad USU = S,^{2)}$$

1) Ueber die Bezeichnung vergl. Kronecker, Ueber die congruenten Transformationen der bilinearen Formen. Monatsb. d. Berl. Academie 1874, S. 397.

2) U soll dabei der Kürze halber die Substitution heissen, welche die Form S in sich transformirt.

zusammenfassen, wobei nach Herrn Frobenius der Multiplicationsprocess

$$AB = \sum \frac{\partial A}{\partial y_i} \frac{\partial B}{\partial x_i}$$

nicht commutativ, wohl aber associativ und distributiv ist. Bezeichnet man die Form

$$\Sigma x_i y_i$$

durch E, so gilt die Gleichung

$$AE = EA = A;$$

versteht man ferner unter A^{-1} diejenige Form X, welche der Gleichung

$$AX = E$$

genügt, so ist

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E;$$

und überhaupt

$$(AB\,..\,C)^{-1} = C^{-1}\,..\,B^{-1}A^{-1}.$$

Ist insbesondere eine Form A zerlegbar in eine Summe von Formen $A_1 + A_2 + \dots A_k$, von denen je zwei kein Variabelnpaar gemeinsam haben, so ist[1])

$$(A_1 + A_2 + \dots A_k)^{-1} = A_1^{-1} + A_2^{-1} + \,..\, A_k^{-1}.$$

Hieraus ergeben sich sofort einige Eigenschaften der conjugirten Transformation einer bilinearen Form in sich selbst.

1) Aus der Identität

$$S(U - \varrho E) = U^{-1}(E - \varrho U)S,$$

folgt:

$$|U - \varrho E| = (-\varrho)^n \varepsilon\, |U - \varrho^1 E|;$$

wobei unter $|A|$ die Determinante der Form A verstanden und $\varrho^1 = \frac{1}{\varrho}$ gesetzt ist.

1) Die grundlegende Arbeit von Frobenius „Ueber bilineare Formen und lineare Substitutionen", Journal von Borchardt, Bd. 84, S. 1 u. ff., werde ich im folgenden mit F. bezeichnen.

Bezeichnet man als characteristische Funktion einer Form A die Determinante[1])

$$|A - \varrho E|$$

so folgt:

Die characteristische Funktion jeder Substitution U, welche die Form S in sich transformirt, hat ausser den Wurzeln $\varrho = \pm 1$ nur Paare zu einander reciproker Wurzeln, und zwar gehören zu der von ± 1 verschiedenen Wurzel ϱ dieselben Elementartheiler wie zur Wurzel ϱ^1.

Bei ungeradem n und eigentlicher (uneigentlicher) Transformation ist $\varrho = +1$ ($\varrho = -1$) eine Wurzel der characteristischen Function. Bei geradem n und uneigentlicher Transformation sind $\varrho = \pm 1$ Wurzeln der characteristischen Funktion.

2) Sind zwei Formen S und T ähnlich, so werden sie durch ähnliche Substitutionen in sich transformirt.

Da nämlich S und T ähnlich sind, so ist[2])

$$T = W S W^{-1},$$

und zugleich folgt aus der Gleichung 2) durch Multiplication mit W und W^{-1}

$$W U W^{-1} \cdot W S W^{-1} \cdot W U W^{-1} = W S W^{-1},$$

oder, wenn $V = W U W^{-1}$ gesetzt wird,

$$V T V = T.$$

3) Aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} U S U \quad &= S, \\ U S^{-1} U' &= S^{-1}, \end{aligned}$$

folgt

$$U (S + \varrho S^{-1}) U = S + \varrho S^{-1};$$

1) F, S. 10. Gelegentlich sind im folgenden auch Determinanten wie $|S - \varrho A|$ als characteristische Functionen bezeichnet.

2) F, S. 21.

d. h.: Jede Substitution, welche eine Form S von nicht verschwindender Determinante in sich transformirt, transformirt auch die ganze aus reciproken Grundformen gebildete lineare Schaar $S + \varrho S^{-1}$ in sich.

4) Es ist ferner

$$US^2 = (US)\,S = S\,U^{-1}S = S(U^{-1}S) = S^2\,U;$$

d. h. Jede Form U die S in sich transformirt, ist mit S^2 vertauschbar.

Die Aufgabe, alle Formen U, zu finden, kommt daher auf die Ermittelung der mit S^2 vertauschbaren, also von einer bekannten Zahl von linearen Parametern abhängigen Formen hinaus, welche die Gleichung 2) befriedigen.[1])

Es ist aber leicht zu zeigen, dass im allgemeinen jede Form U, welche mit S^2 vertauschbar ist, auch schon mit S selbst vertauschbar sein muss. Hiernach scheint es angezeigt, die sämmtlichen Lösungen U in zwei Classen zu sondern, je nachdem nämlich U bereits mit S vertauschbar ist oder nicht.

Ich bemerke endlich noch, dass durch die Substitution

$$US = V,$$

die Gleichung 2) auf die Gestalt

$$3) \quad V^2 = S^2$$

oder in nicht symbolischer Form, wenn man die Coefficienten der Form V durch v_{ik} bezeichnet, auf das System

$$3) \quad \Sigma_k\, v_{ik}\, v_{kl} = \Sigma_k\, a_{ik}\, a_{kl}; \quad i, l = 1, 2 \ldots . n;$$

gebracht wird, welches sich für die directe algebraische Be-

1) Ueber das Problem der vertauschbaren Formen vergl. man die Bemerkungen von Herrn Frobenius F. S. 28, und die Dissertation des Herrn Maurer, zur Theorie der linearen Substitutionen, Strassburg 1887.

handlung geeigneter erweist, als das System der n^2 Gleichungen 1).

§ 2.

Die mit S vertauschbaren Substitutionen.

Ich beweise zuerst den folgenden Satz:

Wenn eine beliebige Form U mit S^2 vertauschbar ist, so ist U auch mit S vertauschbar, falls die characteristischen Functionen von S und $-S$ theilerfremd sind.

Führt man nämlich unter der Voraussetzung

$$US^2 = S^2 U,$$

die Bezeichnung ein:

$$US - SU = X,$$

so ist

$$SUS - S^2 U = SX.$$

Da aber

$$SUS - S^2 U = SUS - US^2 = (SU - US)S = -XS.$$

wird, so erhält man

$$SX + XS = o.$$

Hieraus folgt aber $X = o$. Denn nach Herrn Frobenius gilt der Satz:[1])

Wenn die Gleichung

$$AX = XB$$

besteht und die characteristischen Funktionen von A und B theilerfremd sind, so ist $X = o$.

Im folgenden mag vorausgesetzt werden, dass die Gleichung

$$|S - \varrho E| = o$$

1) F, S. 28.

keine Wurzeln von entgegengesetzt gleichem Werthe besitzt, so dass also nothwendig $US = SU$ ist.

Aus der Gleichung 1) § 1 folgt nunmehr

$$(U^2 - E)S = o\ .$$

oder $U^2 = E$. Und umgekehrt hat auch jede Substitution, welche S in sich transformirt und der Gleichung $U^2 = E$ genügt, die Eigenschaft, dass

$$(U^2 - E)SU = US - SU = o$$

wird, d. h. sie ist mit S vertauschbar. Zugleich sieht man, dass jede der Gleichung $U^2 - E = o$ genügende Form jede mit U vertauschbare Form S in sich selbst transformirt.

Die Aufgabe ist damit reducirt auf die folgende: **Alle Formen U zu finden, die mit S vertauschbar sind, und zugleich der Relation**

$$1)\quad U^2 = E = \Sigma x_i y_i$$

genügen. Unter diesen befinden sich, so lange nicht die Determinanten

$$|U + E| \text{ und } |U - E|$$

gleichzeitig verschwinden, nur die beiden selbstverständlichen Lösungen $U = \pm E$.

Denn aus

$$U^2 - E = (U - E)(U + E) = o$$

folgt stets, sobald die Determinante des einen Factors nicht verschwindet, das identische Verschwinden des andern. [1])

Ich löse nun die Gleichungen 3) § 1 zuerst in einigen speciellen Fällen.

1) **Alle Wurzeln der characteristischen Function von S sind von einander verschieden.**

Bezeichnet man dieselben durch $\varrho_1, \varrho_2 \ldots \varrho_l \ldots \varrho_n$, so ge-

1) F, S. 5.

hört zu jeder Wurzel ϱ_l ein und nur ein System von Werthen

$$\xi_1^l,\ \xi_2^l \ldots \xi_n^l,$$

welches die Gleichungen.

$$2)\quad \Sigma \xi_j^l a_{kj} = \varrho_l \xi_k^l,\quad k = 1, 2 \ldots n;$$

befriedigt. Multiplicirt man mit a_{ik} und summirt nach k, so folgt

$$3)\quad \Sigma \xi_j^l a_{kj} a_{ik} = \varrho_l^2 \xi_i^l,$$

oder

$$4)\quad \Sigma \xi_j^l v_{ik} v_{kj} = \varrho_l^2 \xi_i^l.$$

Multiplicirt man 4) mit v_{ki}, summirt nach i, so folgt, wenn

$$5)\quad \Sigma \xi_j^l v_{kj} = \eta_k^l,$$

gesetzt wird,

$$\Sigma \eta_j^l v_{ik} v_{kj} = \varrho_l^2 \eta_i^l \text{ oder}$$

$$6)\quad \Sigma \eta_j^l a_{ik} a_{kj} = \varrho_l^2 \eta_i^l;$$

also wenn man die Gleichungen 3) und 6) mit einander vergleicht,

$$\eta_i^l = \lambda_l \xi_i^l,$$

wo der Factor λ_l noch zu bestimmen ist. Ferner hat man aus 5) und 4)

$$7)\quad \Sigma \xi_j^l v_{kj} v_{ik} = \lambda_l^2 \xi_i^l = \varrho_l^2 \xi_i^l,$$

also

$$\lambda_l^2 = \varrho_l^2,\ \lambda_l = \pm \varrho_l.$$

Aus den Gleichungen 5)

$$8)\quad \Sigma \xi_j^l v_{kj} = \lambda_l \xi_k^l,$$

ergeben sich nun, da die Determinante der ξ_j^l bekanntlich nicht verschwindet, die Werthe der Substitutionscoefficienten v_{ik}. Zugleich folgt aus

$$\Sigma \xi_i^l v_{hi} a_{th} = \lambda_l \varrho_l \xi_t^l,$$
$$\Sigma \xi_i^l a_{hi} v_{th} = \lambda_l \varrho_l \xi_t^l,$$

dass

$$\Sigma \xi_i^l (v_{ki} a_{lh} - a_{ki} v_{lh}) = o,$$

oder

$$\Sigma_h (a_{lh} v_{hi} - v_{lh} a_{hi}) = o$$

ist; d. h. die Formen V und S sind vertauschbar.

Da ferner aus 3) und 7) folgt

$$\Sigma \xi_i^l (v_{ik} v_{kj} - a_{ik} a_{kj}) = o,$$

so ist auch das System der Gleichungen 3) § 1 erfüllt.

Multiplicirt man die Determinante der v_{ik} mit der Determinante der ξ_i^l, so ergibt sich zufolge der Gleichungen 8)

$$|v_{ik}|\,|\xi_m^l| = (\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n)\,|\xi_m^l|$$

oder

$$|V| = \pm \varrho_1 \varrho_2 \ldots \varrho_n.$$

Da endlich $\varrho_1 \varrho_2 \ldots \varrho_n = S$ ist, so wird in der That

$$|V| = \pm |S|$$

und man sieht, dass es sowohl eigentliche als uneigentliche Transformationen giebt, je nachdem nämlich eine gerade oder ungerade Anzahl von Werthen λ_l gleich $-\varrho_l$ gewählt wird. Die Gesammtzahl aller Transformationen ist offenbar gleich[1]) 2^n.

2) Die ersten Unterdeterminanten der Determinante $(S - E\varrho)$ verschwinden nicht sämmtlich für irgend eine ihrer Wurzeln, oder zu jeder Wurzel der characteristischen Function gehört nur ein einziger Elementartheiler.

Setzt man in diesem Falle

$$|E\varrho - S| = a_0 + a_1 \varrho + \ldots . \varrho^n = F(\varrho),$$

so ist bekanntlich

---

1) Ebenso einfach lässt sich in den folgenden Fällen die Mannigfaltigkeit der Transformationen angeben. Es ist daher im Text diese Frage nicht weiter verfolgt worden.

$$a_0 S^0 + a_1 S^1 + a_2 S^2 + \ldots + S^n = o$$

die Gleichung niedrigsten Grades, [1]) die zwischen den Potenzen der Form S besteht, und die linearen Functionen der n von einander linear unabhängigen Formen

$$S^0, S^1, S^2, \ldots S^{n-1},$$

sind die einzigen, die mit S vertauschbar sind. [2]) Es kann also auch U nur von der Form

$$U = \alpha_0 S^0 + \alpha_1 S^1 + \ldots \alpha_{n-1} S^{n-1}$$

sein und muss zufolge der Gleichung 1) der Bedingung

$$(\alpha_0 S^0 + \alpha_1 S^1 + \ldots \alpha_{n-1} S^{n-1})^2 = 1$$

genügen. Setzt man nun

$$\alpha_0 + \alpha_1 \varrho + \ldots \alpha_{n-1} \varrho^{n-1} = \varphi(\varrho),$$

so muss, wie man leicht bemerkt [3]), die Function φ der Gleichung

$$(\varphi + 1)(\varphi - 1) = F. M,$$

genügen, wo M ein beliebiger Factor vom Grade $n - 2$ in ϱ ist. Da die beiden Factoren $\varphi + 1$, $\varphi - 1$ keine Wurzel gemeinsam haben können, so zerlege man $F(\varrho)$ auf irgend eine Art in zwei zu einander prime Factoren P und Q, deren Grade k und l sind $(k + l = n)$. Dann ist

$$\varphi + 1 = P m_1,$$
$$\varphi - 1 = Q m_2,$$

oder
$$2 = P m_1 - Q m_2.$$

Umgekehrt kann man aber bei gegebenem P und Q immer zwei Polynome m_1 und m_2 vom Grade $l - 1$ und $k - 1$ finden, welche dieser letzten Gleichung genügen, sobald nur P und Q prim zu einander sind. Der Gleichung

1) F, S. 12.
2) F, S. 28.
3) Vgl. F. a. a. O.

$$Pm_1 - 1 = Qm_2 + 1 = \varphi$$

zufolge ergiebt sich aus jeder solchen Zerlegung eine *Be*stimmung der Form U.

Hat insbesondere $|S - E\varrho|$ nur den Elementartheiler $(\varrho - \varrho_1)^n$, oder ist S irreducibel in Bezug auf contragrediente Transformationen, so existirt ausser den evidenten Lösungen $U = \pm E$ keine andere.

3) Die characteristische Function von S hat nur einfache Elementartheiler.

Da

$$S^2 - \varrho^2 E = (S - \varrho E)(S + \varrho E)$$

so folgt leicht: Die Elementartheiler von $S^2 - sE$ haben dieselben Exponenten wie die Elementartheiler von $S - \varrho E$. Uebrigens kann man, um diesen Satz, der überhaupt nur das Nichtvorhandensein entgegengesetzt gleicher Wurzeln voraussetzt, direct zu beweisen, die Determinante von $S - \varrho_l E$ geründert mit beliebigen k Grössenreihen, mit der nach der Voraussetzung nicht verschwindenden Determinante von $S + \varrho_l E$ multipliciren. In der That, multiplicirt man die geränderte Determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \varrho_l & a_{12} & \cdots & a_{1n} & u_1^1 & \cdots & u_1^k \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \varrho_l & u_n^1 & \cdots & u_n^k \\ v_1^1 & v_2^1 & \cdots & v_n^1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ v_1^k & v_2^k & \cdots & v_n^k & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

horizontal mit

$$\begin{vmatrix} a_{11} + \varrho_l & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} + \varrho_l \end{vmatrix}$$

so ergibt sich die wieder mit völlig willkürlichen Grössenreihen geränderte Determinante von $S^2 - \varrho_l^2 E$ woraus unmittelbar die Gleichheit der genannten Exponenten folgt.

Ist nun ϱ_l eine l_r fache Wurzel der characteristischen Function vom S, so hat das Gleichungssystem

$$9)\quad \Sigma \xi_m a_{im} = \varrho_l \xi_i,$$

l_r von einander linear unabhängige Lösungen

$$\xi^{l1},\ \xi^{l2} \ldots \xi^{lr};$$

und dieselben bilden zugleich das vollständige System der Lösungen des Systemes

$$10)\quad \Sigma x_m a_{im} a_{ki} = \varrho_l^2 x_k.$$

Setzt man nun, wie im Falle 1)

$$\Sigma x_m v_{im} = \eta_i,$$

so ergibt sich in analoger Weise

$$11)\quad \Sigma \eta_m a_{im} a_{ik} = \varrho_l^2 \eta_k,$$

oder

$$12)\quad \eta_k = \sum_r \xi_k^{lr} \beta_{lr},$$

wo die Coefficienten β noch zu bestimmen bleiben. Es bestehen daher die Gleichungen

$$\begin{aligned} \Sigma \xi_m^{l1} v_{im} &= \Sigma \xi_i^{lr} \beta_{lr\,l1}, \\ \Sigma \xi_m^{l2} v_{im} &= \Sigma \xi_i^{lr} \beta_{lr\,l2}, \\ \vdots \qquad & \qquad \vdots \\ \Sigma \xi_m^{lr} v_{im} &= \Sigma \xi_i^{lr} \beta_{lr\,lr}; \end{aligned}$$

und also auch die folgenden

$$\begin{aligned} \Sigma \xi_m^{lr} a_{im} a_{ki} &= \varrho_l^2 \xi_k^{lr}, \\ \Sigma \xi_m^{lr} v_{im} v_{ki} &= \Sigma \xi_k^{lm} \beta_{lm\,ls} \beta_{ls\,lr}. \end{aligned}$$

Die Gleichungen 3) § 1 lassen sich daher wegen der Unabhängigkeit der ξ_i^{lr} nur dadurch befriedigen, dass, wenn

$$\beta_{lr\,ls} = u_{sr}^l \varrho_l,$$

gesetzt wird, die Coefficienten u^l_{sr} die Relationen

$$\Sigma u^l_{ms} u^l_{sr} = (mr)^{1)}$$

befriedigen müssen, oder wenn man die zu den u^l_{rs} gehörige bilineare Form mit W_l bezeichnet, die Gleichung

$$W_l^2 = E,^{2)}$$

stattfindet, womit die sämmtlichen Lösungen bestimmt sind.

4) Der allgemeine Fall, in welchem die Elementartheiler der characteristischen Funktion von S ganz beliebig vertheilt sind, erledigt sich endlich auf folgendem Wege.

Die sämmtlichen Lösungen U der Gleichung 1)

$$U^2 = E,$$

sind so beschaffen, dass die characteristische Function von U nur einfache Elementartheiler von der Form $\varrho + 1$ besitzt[3]). Zerlegt man daher die Form

$$E = \Sigma x_i y_i,$$

in irgend einer Weise in zwei Formen

$$E_1 = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots x_k y_k,$$
$$E_2 = x_{k+1} y_{k+1} + \dots + x_n y_n,$$

so ist

$$U = E_1 - E_2$$

eine Form, zu der die k einfachen Elementartheiler $\varrho - 1$ und die $n - k$ einfachen Elementartheiler $\varrho + 1$ gehören. Jede andere Form V, welche der Gleichung 1) genügt, ist aber einer von diesen ähnlich, so dass also

$$U = E_1 - E_2,$$
$$V = P U P^{-1},$$

1) Das Symbol (ik) bedeutet wie gewöhnlich die Einheit für $i = k$, und Null für $i \lessgtr k$.

2) Die Lösung dieser Gleichung ist in No. 4 gegeben.

3) F. S. 15.

zu setzen ist, wobei die Determinante von P nicht verschwindet. Da $V^2 = E$ ist, so bleibt nur noch die Gleichung

$$VS = SV$$

oder

$$PUP^{-1}S = SPUP^{-1},$$

zu erfüllen. Schreibt man dieselbe in der Form

$$P^{-1}S^{-1}PU = UP^{-1}S^{-1}P,$$

so muss demnach die Form

$$P^{-1}S^{-1}P = X$$

mit $U = E_1 - E_2$ vertauschbar sein. Aber alle Formen, welche der Gleichung

$$13) \quad X(E_1 - E_2) = (E_1 - E_2)X,$$

genügen, sind durch die Gleichung

$$X = A_1 + A_2$$

gegeben, in welcher A_1 und A_2 zwei beliebige Formen von den Veränderlichen $x_1 y_1, \ldots x_k y_k;\ x_{k+1} y_{k+1}, \ldots x_n y_n$ sind. Aus 13) folgt nämlich

$$E_1XE_1 - E_1XE_2 = E_1X = E_1XE_1 + E_1XE_2;$$
$$E_1XE_1 + E_2XE_1 = XE_1 = E_1XE_1 - E_2XE_1;$$

oder

$$E_2XE_1 = o,$$
$$E_1XE_2 = o.$$

Demnach wird

$$X = (E_1 + E_2)X(E_1 + E_2) = E_1XE_1 + E_2XE_2,$$

also gleich der Summe zweier ebenso wie E in $E_1 + E_2$ zerlegbarer Formen $X_1 + X_2$. Ist umgekehrt X ebenso wie E in die Summe $A_1 + A_2$ zerlegbar, so wird auch selbstverständlich die Gleichung 13) erfüllt sein. Daraus folgt also, dass die Gleichung

$$P^{-1}S^{-1}P = {}_1A + A_2$$

stattfinden, oder die Form S der zerlegbaren Form

$$A_1^{-1} + A_2^{-1} = B_1 + B_2$$

ähnlich sein muss, wobei die Determinanten von B_1 und B_2 nicht verschwinden dürfen. Nun bezeichne man die Elementartheiler der characteristischen Function von S in irgend einer Reihenfolge durch

$$(\varrho - a)^\alpha,\ (\varrho - b)^\beta \ldots$$

wobei die a, b, . . nicht verschieden zu sein brauchen, dann ist bekanntlich S der Form

$$\begin{aligned} \Sigma = a\,(x_1 y_1 + \ldots x_\alpha y_\alpha) + x_1 y_2 + \ldots x_{\alpha-1} y_\alpha \\ + b\,(x_{\alpha+1} y_{\alpha+1} + \ldots x_{\alpha+\beta}\, y_{\alpha+\beta}) + x_{\alpha+1}\, y_{\alpha+2} + \ldots \\ + x_{\alpha+\beta-1}\, y_{\alpha+\beta} + \ldots . \end{aligned}$$

ähnlich. Zerlegt man also Σ in irgend zwei Gruppen $B_1 + B_2$ die kein Variabelnpaar gemeinsam haben und bezeichnet mit E_1 und E_2 die entsprechenden Formen E, so ist

$$14)\quad P^{-1} S P = B_1 + B_2$$

also auch umgekehrt

$$V = P(E_1 - E_2) P^{-1}.$$

In der That wird dann

$$\begin{aligned} V S V &= P\,(E_1 - E_2) P^{-1} S P (E_1 - E_2)\, P^{-1}, \\ &= P\,(E_1 - E_2)(B_1 + B_2)(E_1 - E_2)\, P^{-1}, \\ &= P\,(B_1 + B_2)\, P^{-1} = S. \end{aligned}$$

Dabei hat man unter P die vollständige Lösung der Gleichung 14) zu verstehen. Nun findet man bekanntlich durch das Weierstrass'sche Verfahren eine bestimmte Form p, welche der Gleichung

$$p^{-1} S p = \Sigma$$

genügt. Ist nun auch die Gleichung 14) erfüllt, so folgt

$$p^{-1} S p = P^{-1} S P$$

oder
$$P p^{-1} S = S P p^{-1},$$

d. h. es ist $P p^{-1}$ mit S vertauschbar. Bezeichnet man daher die Gesammtheit der mit S vertauschbaren Formen durch M, zu deren Bestimmung es nur der Lösung linearer Gleichungen bedarf, so ist

$$P = M p$$

also schliesslich

$$V = M p (E_1 - E_2) p^{-1} M^{-1}.$$

Die Lösungen zerfallen demnach in Gruppen, insofern jede in derselben Weise aus den Hauptlösungen

$$p (E_1 - E_2) p^{-1}$$

hergeleitet wird. In Bezug hierauf möge noch folgendes angeführt werden:

Sind V und W zwei Substitutionen, welche mit S vertauschbar sind und S in sich transformiren, und haben die characteristischen Functionen von VS und WS dieselben Elementartheiler, so haben auch die von V und W dieselben Elementartheiler und es ist

$$W = Z^{-1} V Z$$

wo Z eine mit S vertauschbare Form ist. Aus der Voraussetzung folgt nämlich

$$W S = Z^{-1} V S Z$$

oder, wenn man beiderseits zum Quadrat erhebt und associativ multiplicirt,

$$S^2 = Z^{-1} S^2 Z.$$

Hieraus folgt aber

$$Z S = S Z,$$

und nunmehr auch

$$(W - Z^{-1} V Z) S = o,$$

womit der Satz bewiesen ist. Lässt man die diesem § zu Grunde liegende Voraussetzung über S fallen, so folgt aus der Aehnlichkeit der Formen VS und WS nur, dass

$$WS = Z^{-1}\,VSZ,$$

wo Z eine beliebige mit S^2 vertauschbare Form von nicht verschwindender Determinante ist. Vgl. § 3.

§ 3.

Substitutionen, die nicht mit S vertauschbar sind.

Die vorstehenden Betrachtungen enthalten überhaupt die vollständige Bestimmung aller derjenigen Substitutionen U, deren Vertauschbarkeit mit S vorausgesetzt wird. Wenn aber die characteristischen Functionen von S und $-S$ gemeinsame Theiler haben, so gibt es ausser diesen Substitutionen noch andere, welche mit S^2, nicht aber mit S vertauschbar sind.

Setzt man

$$1)\quad US - SU = X,$$

so folgt wie früher die Gleichung

$$2)\quad SX + XS = o.$$

Jede Form U, welche der Gleichung 1) genügt, während X eine nicht verschwindende Lösung von 2) ist, ist mit S^2, nicht aber mit S vertauschbar.

Denn es ist

$$S^2U = S(US - X) = (SU + X)\,S,$$

oder, da nach 1) $\quad SU + X = US,$

$$S^2U = US^2.$$

Es bleiben demnach die in U enthaltenen linearen Parameter so zu bestimmen, dass die Gleichung $USU = S$ erfüllt wird. Aber diese Aufgabe lässt sich, wie ich jetzt zeigen will, auf den Fall reduciren, wo die characteristische Function von S nur zwei entgegengesetzt gleiche Wurzeln enthält.

Nach 2) § 1 genügt es, das Transformationsproblem für eine mit S ähnliche Form σ zu lösen. Ist nun

$$S = v\sigma v^{-1},$$
$$u = vUv^{-1},$$

so hat man

$$u\sigma u = \sigma, \tag{3}$$

und für

$$vXv^{-1} = x,$$

$$u\sigma - \sigma u = x, \tag{4}$$

$$\sigma x + x\sigma = o. \tag{5}$$

Es sei nun σ zerlegbar in $\sigma_1 + \sigma_2$, welchen Formen die Formen E_1 und E_2 correspondiren mögen.

Setzt man jetzt

$$E_1 x E_2 = \eta_1, \quad E_2 x E_1 = \eta_2;$$
$$E_1 x E_1 = x_1, \quad E_2 x E_2 = x_2;$$

so folgt aus 5) durch Multiplication mit E_1 und E_2

$$x_1\sigma_1 + \sigma_1 x_1 = o,$$
$$x_2\sigma_2 + \sigma_2 x_2 = o,$$
$$\eta_2\sigma_1 + \sigma_2\eta_2 = o,$$
$$\eta_1\sigma_1 + \sigma_2\eta_1 = o.$$

Sind nun die characteristischen Functionen von σ_1 und $-\sigma_2$ theilerfremd, so ist $\eta_1 = o$, $\eta_2 = o$. Wird ferner vorausgesetzt, dass gleiches für die characteristischen Funktionen von σ_2 und $-\sigma_2$ gilt, so ist auch $x_2 = o$. Dies kommt darauf hinaus, dass σ_1 derjenige Theil von σ ist, der zu den Elementartheilern gehört, die aus entgegengesetzt gleichen Wurzeln herrühren.

Demnach tritt an Stelle der Gleichung 4) die folgende

$$u(\sigma_1 + \sigma_2) - (\sigma_1 + \sigma_2)u = x = (E_1 + E_2)x(E_1 + E_2);$$

oder

$$6)\quad u(\sigma_1 + \sigma_2) - (\sigma_1 + \sigma_2)u = x_1.$$

Setzt man nun weiter

$$E_1 u E_1 = u_1, \quad E_2 u E_2 = u_2,$$
$$E_1 u E_2 = v_1, \quad E_2 u E_1 = u_2,$$

so erhält man auf analogem Wege aus 6)

$$7)\qquad \begin{aligned} u_1 \sigma_1 - \sigma_1 u_1 &= \xi_1, \\ u_2 \sigma_2 - \sigma_2 u_2 &= o, \\ v_1 \sigma_2 - \sigma_1 v_1 &= o, \\ v_2 \sigma_1 - \sigma_2 v_2 &= o. \end{aligned}$$

Haben demnach die characteristischen Functionen von σ_1 und σ_2 auch keine gemeinsamen Theiler, was mit der oben angegebenen Festsetzung verträglich ist, so folgt weiter

$$v_1 = o, \quad v_2 = o.$$

also auch

$$u = u_1 + u_2,$$

wenn nach 7) u_2 eine mit σ_2 vertauschbare Form ist. Endlich folgt aber aus der Transformationsgleichung

$$(u_1 + u_2)(\sigma_1 + \sigma_2)(u_1 + u_2) = \sigma_1 + \sigma_2$$

da die Formen mit verschiedenem Index kein Variabelnpaar gemeinsam haben,

$$u_1 \sigma_1 u_1 = \sigma_1 \,;\; u_2 \sigma_2 u_2 = \sigma_2,$$

so dass nach § 2 alle Formen u_2 unmittelbar gefunden werden können. Man kann daher von vornherein voraussetzen, dass die Function $|S - \varrho E|$ nur Paare entgegengesetzt gleicher Wurzeln enthält, denen jedoch für sich beliebige Elementartheiler zugehören können.

Aber auch diese Formen σ_1 lassen sich noch weiter reduciren. Zerlegt man nämlich wieder σ_1 in zwei Theile $\Sigma_1 + \Sigma_2$ von der Beschaffenheit, dass die characteristischen

Functionen weder gemeinsame Theiler noch solche Wurzelfactoren enthalten, die zu entgegengesetzt gleichen Wurzeln gehören, so erkennt man auf demselben Wege, dass dem entsprechend u_1 in zwei Formen $u_{11} + u_{22}$, und ebenso ξ_1 in $\xi_{11} + \xi_{22}$ zerlegbar sein muss, welche den Bedingungen genügen müssen

$$\begin{aligned} u_{11} \Sigma_1 u_{11} &= \Sigma_1, \\ u_{22} \Sigma_2 u_{22} &= \Sigma_2, \\ u_{11} \Sigma_1 - \Sigma_1 u_{11} &= \xi_{11}, \\ u_{22} \Sigma_2 - \Sigma_2 u_{22} &= \xi_{22}. \end{aligned}$$

Die Transformation reducirt sich demnach schliesslich auf die einer Anzahl von Formen s, deren characteristische Functionen je nur ein einziges Paar entgegengesetzt gleicher Wurzeln enthalten. Zur Lösung dieses letzten Problems kann man sich der am Eingange dieses § gemachten Bemerkungen bedienen.

In dem Falle, wo S nur einfache Elementartheiler hat, die jedoch zu entgegengesetzt gleichen Wurzeln gehören können, können die sämmtlichen Substitutionen U auch gleich direct gefunden werden. Selbstverständlich wird dann auch die characteristische Function von S^2 nur einfache El.-Theiler enthalten.

Gehören nun zu der Wurzel ϱ_l die Werthsysteme

$$\xi_i^{l_1}, \xi_i^{l_2}, \ldots \xi_i^{l_r}; \; i = 1, 2 \ldots n;$$

als Lösungen der Gleichungen

$$\Sigma \xi_m a_{im} = \varrho_l \xi_i; \; i = 1, 2 \ldots n;$$

und zu $\varrho_\lambda = -\varrho_l$ die Werthsysteme

$$\eta_i^{\lambda_1}, \eta_i^{\lambda_2}, \ldots \eta_i^{\lambda_k}; \; i = 1, 2 \ldots n;$$

und versteht man unter

$$x_i^1, x_i^2 \ldots x_i^m; \; i = 1, 2 \ldots n;$$

(wo $m = r + k$) die sämmtlichen Werthe ξ und η; setzt man ferner, um die Gleichung

$$V^2 = S^2,$$

zu lösen,

$$8)\qquad \Sigma x_t^h v_{it} = y_i^h,$$

so ergibt sich wie in No. 3. § 2

$$y_i^h = \Sigma x_i^p u_{ph}.$$

Demnach ist

$$\Sigma x_t^h v_{it} = \Sigma x_i^p u_{ph}, \text{ und}$$

$$9)\qquad \Sigma x_t^h v_{it} v_{ki} = \Sigma x_k^s u_{sp} u_{ph}.$$

Da aber auch

$$10)\qquad \Sigma x_t^h a_{it} u_{hi} = \varrho_i^2 x_k^h,$$

ist, so sind wieder nur die Gleichungen

$$\Sigma u_{sp}^1 u_{ph}^1 = (sh),$$

zu erfüllen, wenn

$$u_{sp}^1 = \pm \varrho_i u_{sp}$$

gesetzt wird. Die Bestimmung der v_{ik} erfolgt dann, da die x_i^h linear von einander unabhängig sind, aus den Gleichungen 8), und aus der Vergleichung von 9) und 10) erkennt man, dass auch die Transformationsbedingungen erfüllt sind.

§ 4.

Die Gleichung $SX + XS = o$.

Diese in den Coefficienten der X lineare Gleichung steht mit dem Problem der conjugirten Substitutionen in einem weiter gehenden Zusammenhange, der namentlich im § 6 hervortreten wird. Die Determinante des linearen Systems von n^2 Unbekannten x_{ik} der Form X

$$1)\qquad SX + XS = o$$

ist, wie man leicht sieht, eine symmetrische Determinante in den Coefficienten von S, welche verschwinden muss, wenn eine von Null verschiedene Lösung für X vorhanden sein soll.

Es sei hier ausgeführt,[1]) dass die analoge Gleichung

$$2) \quad SX - XS = o,$$

auf die das Problem der mit S vertauschbaren Formen hinauskommt, eine schiefe Determinante vom Grade n^2 liefert; ein Umstand, der in den bisherigen Untersuchungen über dieses Gleichungssystem nicht bemerkt worden zu sein scheint. Bei geradem (ungeradem) n verschwindet sie daher immer mit einer ungeraden (geraden) Anzahl von Unterdeterminantensystemen. Es geht hieraus unmittelbar der Satz hervor:

Die Anzahl der linear unabhängigen Formen X, welche mit einer Form S vertauschbar sind, ist stets von der Form

$$n + 2k,$$

was übrigens durch die von Herrn Frobenius angegebene Formel für diese Zahl bestätigt wird.[2])

Das Verhalten jener beiden Determinanten von n^2 Reihen wird man indess wohl kaum discutiren können, ohne auf die Untersuchung der characteristischen Function von S einzugehen. Beide Gleichungen 1) und 2) gestatten aber sofort auf dem im vorigen § angedeuteten Wege eine Reduction

1) Ich erwähne den allgemeinen Satz: Die Determinante der Coefficienten des Systems der n^2 linearen Gleichungen

$$SX + \varrho XS = o$$

ist die Determinante einer linearen Schaar $W + \varrho W^1$ aus conjugirten Grundformen mit n^2 Variabeln, aus denen die beiden Bemerkungen des Textes hervorgehen.

2) F. S. 29.

auf ganz einfache Fälle, in denen die Lösungen direct hingeschrieben werden können.

Ohne auf diese Reduction hier einzutreten, behandle ich den etwas allgemeineren Fall der Gleichung

$$3)\quad A\,X = X\,B$$

in den 1) übergeht, wenn $A = -B = S$ gesetzt wird. Da zufolge der Gleichung

$$|A|\,|X| = |X|\,|B|$$

die Determinante vom X verschwinden muss, falls nicht gleichzeitig entweder die Determinanten von A und B verschwinden, oder einander gleich sind, welcher Fall hier übrigens nicht ausgeschlossen sein soll, möge angenommen werden, dass für die Form X noch alle Unterdeterminanten vom $m+1$. Grade Null sind, die vom m. Grade aber nicht sämmtlich verschwinden. Setzt man nun

$$E = E_1 + E_2,$$

$$\text{wo } E_1 = x_1\,y_1 + \ldots x_m\,y_m,$$

$$E_2 = x_{m+1}\,y_{m+1} + \ldots x_n\,y_n,$$

so gibt es zwei Formen U und V von nicht verschwindender Determinante, vermöge welcher

$$U\,X\,V = E_1$$

ist. Demgemäss ist

$$U\,A\,U^{-1}\,E_1 = E_1\,V^{-1}\,B\,V.$$

Setzt man nun

$$U\,A\,U^{-1} = A_0,\quad V^{-1}\,B\,V = B_0,$$

so ist

$$A_0\,E_1 = E_1\,B_0.$$

Hieraus geht hervor, dass die Form

$$M = E_1\,A_0\,E_1 = E_1\,B_0\,E_1$$

nur die Variabelnpaare von E_1 enthält. Ferner ist

$$E_2 A_0 E_1 = o, \quad E_1 B_0 E_2 = o.$$

Setzt man endlich

$$E_1 A_0 E_2 = M_1, \quad E_2 A_0 E_2 = N,$$
$$E_2 B_0 E_1 = M_2, \quad E_2 B_0 E_2 = P,$$

wo die Formen N und P nur von den in E_2 vorkommenden Variabeln abhängen, so wird

$$U(A - \varrho E)\, U^{-1} = M - \varrho E_1 + N - \varrho E_2 + M_1,$$
$$V^{-1}(B - \varrho E)\, V = M - \varrho E_1 + P - \varrho E_2 + M_2.$$

Zum Bestehen der Gleichung 3) ist demnach nothwendig, wie schon Herr Frobenius angegeben hat (F. S. 28.), dass die characteristischen Functionen von A und B mindestens einen gemeinsamen Theiler m-Grades haben.

Dies ist aber auch hinreichend, denn die Determinante der Gleichungen 3) ist die Resultante der characteristischen Functionen von A und B.

Nicht hinreichend ist dagegen die Existenz eines gemeinsamen Theilers vom m-Grade, wenn die Unterdeterminanten m-Grades von X nicht mehr sämmtlich verschwinden sollen. Denn wenn z. B. $|M - \varrho E_1$ für eine Wurzel $\varrho = \varrho_1$ in allen k-Unterdeterminanten den Factor $(\varrho - \varrho_1)\, l_k$ enthält, muss auch bei den characteristischen Functionen von A und B derselbe Factor mindestens in der Potenz l_k in allen k-Unterdeterminanten auftreten. Und wenn diese Wurzel ϱ_1 nicht in den Determinanten $|N - \varrho E_2|$ und $|P - \varrho E_2|$ enthalten ist, müssen sogar alle Elementartheiler, die zu $\varrho = \varrho_1$ gehören, jenen Functionen von A und B gemeinsam sein, denn alsdann enthalten, wie leicht zu sehen, die k-Unterdeterminanten auch nur die l_k-Potenz von $\varrho - \varrho_1$ und keine höhere.

Haben andererseits die characteristischen Functionen von A und B überhaupt Elementartheiler mit der Exponentensumme m gemeinsam, so gibt es auch solche X, deren Unterdeterminanten m-Grades nicht sämmtlich verschwinden, während die vom $m+1$. noch alle Null sind.

Man kann nämlich zunächst B durch eine contragrediente Substitution V in seine Normalform B_1 überführen. An Stelle der Gleichung 3) tritt dann, wenn

$$V B V^{-1} = B_1, \quad V A V^{-1} = A_1,$$
$$V X V^{-1} = X_1$$

gesetzt wird

$$A_1 X_1 = X_1 B_1.$$

Sondert man nun aus der characteristischen Function von B_1 Elementartheiler mit der Exponentensumme m aus, welche gleichzeitig in der von A, also auch in der von A_1 vorkommen, so sei

$$B_1 = M + P,$$
$$W A_1 W^{-1} = M + Q,$$

wo M eine Form der m-Variabelnpaare $x_1 y_1 \ldots x_m y_m$ ist. Bezeichnet man dann irgend eine mit M vertauschbare, nur von denselben Variabeln abhängige Form durch H, so ist

$$B_1 H = H M = H W A_1 W^{-1},$$

oder

$$V^{-1} B_1 V V^{-1} H W V = V^{-1} H W V V^{-1} A_1 V,$$

also
$$B V^{-1} H W V = V^{-1} H W V A,$$

mithin
$$X = V^{-1} H W V;$$

und dieser Ausdruck stellt wirklich Formen vor, welche der Gleichung 3) genügen und deren Unterdeterminanten m-Grades nicht sämmtlich Null sind, während die vom $m+1$. noch alle verschwinden, falls die Determinante von H nicht verschwindet, was sich immer erreichen lässt.

Nur in dem Falle, wo die beiden Formen A und B ähnlich sind, gibt es Lösungen X, deren Determinante nicht verschwindet.

Insbesondere ist also zum Bestehen der Gleichung 1) nothwendig und hinreichend, dass die characteristischen Functionen

$$|S - \varrho E|, \ |S + \varrho E|$$

einen gemeinsamen Theiler besitzen, und die Anzahl der unabhängigen Lösungen von nicht verschwindender Determinante ist in dem Falle, wo beiden sämmtliche Elementartheiler gemeinsam sind, gleich der Anzahl der mit S vertauschbaren Formen.

Zufolge der Gleichung

$$S(X + \varrho E) + (X - \varrho E)S = o$$

hat jede Lösung X die Eigenschaft, dass die characteristischen Functionen

$$|X + \varrho E|, \ |X - \varrho E|$$

die nämlichen Elementartheiler besitzen.

§ 5.

Ueber alternirende und symmetrische Formen.

Zum Bestehen der Gleichung 1) § 4 hat sich im vorigen insbesondere als hinreichend erwiesen, dass — in etwas anderer Ausdrucksweise — S einer Form $s_1 + s_2$ ähnlich ist, in welcher die Functionen $|s_1 - \varrho E_1|$ $|s_1 + \varrho E_1|$ dieselben Elementartheiler besitzen, und natürlich $|s_1|$ nicht verschwindet. Es ist leicht zu zeigen, dass eine solche Form s_1 einer alternirenden Form ähnlich ist.

Ist nämlich $A = \Sigma a_{ik} x_i y_k$ eine alternirende Form, und bezeichnet man nach Herrn Frobenius[1]) die conjugirte Form von A, nämlich $\Sigma a_{ki} x_i y_k$ durch A^1, so ist wegen $a_{ik} + a_{ki} = o$

$$A^1 = -A.$$

Da nun die characteristischen Functionen conjugirter Formen[2]) dieselben Elementartheiler haben, so haben auch

1) F. S. 4.
2) F. S. 21.

die beiden Functionen

$$|A - rE| \text{ und } |A + rE|$$

dieselben Elementartheiler. Verschwindet die Determinante von A, so sind überdies die Elementartheiler von der Form r^{2k} stets paarweise vorhanden.[1]) Es gilt aber auch der umgekehrte Satz:

Haben die beiden Functionen $|S+rE|$ und $|S-rE|$ die nämlichen Elementartheiler und sind überdies die Elementartheiler von der Form r^{2k} paarweise vorhanden (falls die Determinante von S verschwindet), so ist S einer alternirenden Form ähnlich.

Den Beweis desselben kann man auf folgendem Wege führen.

Ist eine Form S einer alternirenden A ähnlich, so gibt es eine Form V von nicht verschwindender Determinante, so dass

$$V S V^{-1} = A$$

wird. Geht man auf beiden Seiten zu den conjugirten Formen über, so ist auch[2])

$$(V^1)^{-1} S^1 V^1 = -A,$$

oder

$$V S V^{-1} + (V^1)^{-1} S^1 V^1 = o;$$

also auch

$$V^1 V S V^{-1} (V^1)^{-1} = -S^1.$$

Setzt man nun $V^1 V = W$, so ist $W = W^1$, also W[3]) eine symmetrische Form, mithin

$$W S W^{-1} = -S^1,$$

$$\text{oder } W S = -S^1 W^1 = -(W S)^1,$$

also die Form WS selbst eine alternirende Form. Man hat zunächst:

1) Kronecker, Berl. Monatsb. 1874, S. 442.
2) F. S. 4, Satz IV.
3) Ebenda.

Ist S einer alternirenden Form ähnlich, so ist

$$S = W^{-1} A,$$

wo W eine symmetrische Form von nicht verschwindender Determinante, A eine alternirende Form ist.[1])

Ist umgekehrt

$$W S = A$$

und W eine symmetrische Form, A eine alternirende Form, so ist S einer alternirenden Form ähnlich, sobald die Determinante von W nicht verschwindet.

Denn man kann durch eine congruente Transformation Z von nicht verschwindender Determinante bewirken, dass

$$Z^1 W Z = E_\varrho$$

wo E_ϱ nur die Variabeln $x_1 y_1, x_2 y_2 \ldots x_\varrho y_\varrho$, enthält.

Setzt man nun

$$(Z^1)^{-1} E_\varrho Z^{-1} S = A,$$
$$S^1 (Z^1)^{-1} E_\varrho Z^{-1} = - A,$$

so wird

$$E_\varrho Z^{-1} S Z = - Z^1 S^1 (Z^1)^{-1} E_\varrho.$$

Setzt man also

$$M = E_\varrho Z^{-1} S Z,$$

so ist

$$M = - M^1,$$

also M eine alternirende Form, woraus der zu beweisende Satz folgt, sobald die Determinante von W nicht Null ist, da in diesem Falle $E\varrho = E$ wird.

Es sei nun umgekehrt S so beschaffen, dass die characteristische Function von S nur paarweise Elementartheiler hat, die zu entgegengesetzt gleichen Wurzeln gehören und

1) Aus $S = W^{-1} A$ folgt $S = W^{-1} A W^{-1} W = B W$, wo auch B eine alternirende Form, W symmetrisch ist.

dass die Elementartheiler von der Form ϱ^{2k} ebenfalls paarweise vorhanden sind. Setzt man

$$\varrho = \frac{s+1}{s-1},$$

so hat die Function

$$|S(s-1) + E(s+1)|$$

nur reciproke Wurzeln, zu denen gleiche Elementartheiler gehören, und die Elementartheiler von der Form $(s+1)^{2k}$ sind paarweise vorhanden. Unter diesen Voraussetzungen ist aber die Schaar

$$S(s-1) + E(s+1)$$

nach einer Bemerkung des Herrn Frobenius[1]) einer aus conjugirten Grundformen $As + A^1$ gebildeten Schaar ähnlich. Man hat also

$$P(S+E)Q = A,$$
$$P(E-S)Q = A^1,$$

woraus

$$2PQ = A + A^1,$$
$$2PSQ = A - A^1,$$

und die Determinante von $A + A^1$ kann natürlich nicht verschwinden. Demnach wird

$$2Q = P^{-1}(A + A^1),$$
$$PSP^{-1} = (A - A^1)(A + A^1)^{-1};$$

oder auch nach dem zuvor bewiesenen Satze PSP^{-1}, also auch S selbst, einer alternirenden Form ähnlich.

Man hat daher auch folgenden Satz:

Ist die Form S (von nicht verschwindender Determinante) einer alternirenden Form ähnlich, so sind auch die Lösungen der Gleichung

$$SX + XS = o$$

1) F, S. 22.

deren Determinante nicht verschwindet, einer alternirenden Form ähnlich.

Der Vollständigkeit halber führe ich noch den analogen Satz über symmetrische Formen an.

Ist eine Form einer symmetrischen ähnlich, so ist sie das Product zweier symmetrischer Formen, von denen wenigstens eine eine nicht verschwindende Determinante hat.

Denn wenn die Gleichung besteht

$$VSV^{-1} = (V^1)^{-1}S^1V^1,$$

welche ausdrückt, dass S einer symmetrischen Form ähnlich ist, so folgt

$$V^1VSV^{-1}(V^1)^{-1} = S^1$$

oder für

$$V^1V = W$$
$$WS = S^1W = (WS)^1.$$

Demnach ist WS eine symmetrische Form W_1, also

$$S = W^{-1}W_1.$$

Dass dies auch umgekehrt zur Aehnlichkeit genügt, erkennt man wie vorhin.

§ 6.

Zurückführung des Problems der conjugirten Transformation einer Form in sich selbst auf rationale Operationen.

Zur Bestimmung der Formen U, wie sie in § 2) ausgeführt ist, scheint die Ermittelung der Wurzeln der characteristischen Function von S unerlässlich. Dagegen ist das Problem der cogredienten (congruenten) Transformation U einer Form S in sich selbst, wie ich an einem anderen Orte zeige,[1]) solange nur eine der Determinanten $|U+E|$, $|U-E|$

1) Es sei mir gestattet, hier auf eine in den Mathematischen Annalen erscheinende Arbeit zu verweisen.

von Null verschieden ist, stets auf die Lösung des linearen Systemes von Gleichungen

$$XS + X^1 S^1 = o$$

zurückführbar, und für den Fall der eigentlichen Substitutionen kann man sogar in gewissen Fällen alle Formen U auf diesem Wege erhalten [2]). Für das hier vorliegende Problem der conjugirten Transformation bestehen zum Theil ähnliche Verhältnisse, insoferne auch hier jede Lösung U, die der soeben angegebenen Voraussetzung genügt, linear ermittelt werden kann.

Setzt man

$$1) \qquad X_\varrho = (E - \varrho U)(E + \varrho U)^{-1},$$

so wird

$$X_\varrho S = (E - \varrho U)(S^{-1} + \varrho S^{-1} U)^{-1},$$

oder wegen

$$S^{-1} U = U^{-1} S^{-1},$$
$$US = SU^{-1},$$

$$X_\varrho S = (E - \varrho U) S (E + \varrho U^{-1})^{-1} = S(E - \varrho U^{-1})(E + \varrho U^{-1})^{-1}$$
$$= - S(E - \varrho' U)(E + \varrho' (U^{-1},$$

d. h. es besteht die Gleichung

$$2) \qquad X_\varrho S = - S X_{\varrho'},$$

falls wie oben $\varrho' \varrho = 1$ gesetzt wird.

Nimmt man nun $\varrho = \pm 1$ an, so entsteht aus 2) wieder die Gleichung

$$3) \qquad XS + SX = o,$$

falls

$$X = (E \mp U)(E \pm U)^{-1},$$

oder

$$4) \qquad U = \pm \frac{E - X}{E + X}$$

gesetzt wird, wobei das obere oder untere Vorzeichen gilt, je

1) Vgl. F. S. 42 ff., wo der Fall der congruenten Transformation der symmetrischen Formen behandelt ist.

nachdem $\varrho = +1$ oder gleich -1 genommen wurde. Das heisst:

Jede Substitution U, die eine Form S von nicht verschwindender Determinante in sich transformirt und für die wenigstens eine der beiden Determinanten $|U+E|$, $|U-E|$ nicht verschwindet, kann auf eine einzige Art in eine der Formen

$$U = \pm \frac{E-X}{E+X}$$

gebracht werden, wo X der Gleichung 3) genügt und die Determinante von $E \pm X$ ist dabei nicht Null.[1])

Aber dieser Satz kann auch umgekehrt werden und zwar in folgender Weise:

Die Form

$$U = \pm \frac{E-X}{E+X}$$

ist eine Substitution, welche jede Form S, deren Determinante auch Null sein kann, in sich selbst transformirt, sobald die Form X der Gleichung 3) genügt, und die Determinanten von $E+X$ (und $E-X$), was jederzeit für die homogenen Coefficienten von X erreichbar ist,[2]) nicht verschwinden.

---

1) Ist nämlich $|U+E|$ nicht Null, so ist

$$X = (E-U)(E+U)^{-1} = 2(E+U)^{-1} - E$$

also

$$X + E = 2(E+U)^{-1};$$

ist dagegen $|U-E|$ von Null verschieden, so ist

$$X = (E+U)(E-U)^{-1}$$

$$\text{d. h. } X + E = 2(E-U)^{-1}.$$

Ausserdem ist

$$(X+E)S + S(X-E) = 0,$$

also ist auch $|E-X|$ nicht Null.

2) Wenn $|S|$ nicht Null ist, können die Determinanten $|X+E|$ und $|X-E|$ nur gleichzeitig verschwinden.

In der That wird

$$USU = (E - X)(E + X)^{-1} S (E - X)(E + X)^{-1}.$$

Nun folgt aber aus den Gleichungen

$$(X + E)S + S(X - E) = o,$$
$$S(X + E) + (X - E)S = o,$$

die eine unmittelbare Folge von 3) sind, für die rechte Seite der vorstehenden Gleichung der Ausdruck

$$(E - X)(E + X)^{-1}(E + X) S (E + X)^{-1}$$

oder $$(E - X) S (E + X)^{-1} = S,$$

womit die Gleichung

$$USU = S$$

bewiesen ist.

Je nachdem das obere oder untere Vorzeichen in 4) gewählt wird, ist

$$U \pm E = \pm 2E(E + X)^{-1}$$
$$U \mp E = + 2X(E + X)^{-1}$$

ferner wird

$$5) \quad US - SU = \pm 4(E + X)^{-1} SX (E + X)^{-1}$$
$$= \pm 4 SX (E - X^2)^{-1}.$$

So lange nun die etwaigen Parameter in X endlich sind, d. h. diese Form selbst eine endliche ist, kann U mit S nur vertauschbar werden, wenn $X = o$ ist, d. h. für die identische Transformation $U = + E$. Legt man andererseits den linearen Parametern in X beständig wachsende Werthe bei, so erhält man im Grenzfalle, falls U eine endliche Form bleibt, solche Substitutionen, für welche die Determinanten $|U + E|$ und $|U - E|$ gleichzeitig verschwinden können. Dabei kann auch, wie die Formel 5) zeigt, U mit S vertauschbar werden, doch können sich Formen dieser Gattung nur vermöge jener Grenzprocesse ergeben.

Indess wird man im allgemeinen keineswegs alle Substitutionen auf diesem Wege erhalten. Von den hierher gehörigen Betrachtungen hebe ich die folgende besonders einfache hervor.

Es seien zunächst diejenigen Substitutionen bestimmt, für welche $|U+E|$ nicht Null ist.[1]) Dieselben sind von der Form

$$U = (E - X)(E + X)^{-1}.$$

Ich behaupte nun: Alle eigentlichen Substitutionen, für die $|U+E|$ verschwindet, aber nicht gleichzeitig $|U-E|$ Null ist, lassen sich aus den eben angegebenen erhalten, indem man einen geeigneten Grenzübergang vornimmt, falls die Form S einer alternirenden Form ähnlich ist.

Sei nämlich W irgend eine Form, welche S in sich transformirt, und $|W-E|$ nicht Null, während $|W+E|$ verschwinden mag. Dann ist

$$W = -\frac{E-X}{E+X}$$

wo nun die Determinante von X im allgemeinen verschwinden muss. Da aber die Transformation eine eigentliche ist, so muss n eine gerade Zahl sein, und daher existirt auch eine Form von nicht verschwindender Determinante Z, welche der Gleichung

$$SZ + ZS = o$$

genügt. Bezeichnet man mit h einen beliebigen Parameter, so ist auch

$$S(Zh + X) + (X + hZ)S = o$$

1) Zur Bestimmung der Coefficienten der Form X kann man natürlich auch ähnliche nicht rationale Operationen wie in § 2 anwenden. Sind z. B. alle Wurzeln von $|S - \varrho E|$ von einander verschieden und paarweise entgegengesetzt gleich, so hängen diese Coefficienten bei geradem n von n homogenen Parametern ab. Für ungerades $n = 2p + 1$ ist dagegen, wenn je zwei Wurzeln bis auf eine entgegengesetzt gleich und verschieden sind, diese Anzahl gleich $2p$.

In der That wird

$$USU = (E - X)(E + X)^{-1} S (E - X)(E + X)^{-1}.$$

Nun folgt aber aus den Gleichungen

$$(X + E) S + S (X - E) = o,$$
$$S (X + E) + (X - E) S = o,$$

die eine unmittelbare Folge von 3) sind, für die rechte Seite der vorstehenden Gleichung der Ausdruck

$$(E - X)(E + X)^{-1} (E + X) S (E + X)^{-1}$$

oder

$$(E - X) S (E + X)^{-1} = S,$$

womit die Gleichung

$$USU = S$$

bewiesen ist.

Je nachdem das obere oder untere Vorzeichen in 4) gewählt wird, ist

$$U \pm E = \pm 2 E (E + X)^{-1}$$
$$U \mp E = \mp 2 X (E + X)^{-1}$$

ferner wird

$$5) \quad US - SU = \mp 4 (E + X)^{-1} S X (E + X)^{-1}$$
$$= \mp 4 S X \; (E - X^2)^{-1}.$$

So lange nun die etwaigen Parameter in X endlich sind, d. h. diese Form selbst eine endliche ist, kann U mit S nur vertauschbar werden, wenn $X = o$ ist, d. h. für die identische Transformation $U = \pm E$. Legt man andererseits den linearen Parametern in X beständig wachsende Werthe bei, so erhält man im Grenzfalle, falls U eine endliche Form bleibt, solche Substitutionen, für welche die Determinanten $|U + E|$ und $|U - E|$ gleichzeitig verschwinden können. Dabei kann auch, wie die Formel 5) zeigt, U mit S vertauschbar werden, doch können sich Formen dieser Gattung nur vermöge jener Grenzprocesse ergeben.

Indess wird man im allgemeinen keineswegs alle Substitutionen auf diesem Wege erhalten. Von den hierher gehörigen Betrachtungen hebe ich die folgende besonders einfache hervor.

Es seien zunächst diejenigen Substitutionen bestimmt, für welche $|U+E|$ nicht Null ist.[1]) Dieselben sind von der Form

$$U = (E - X)(E + X)^{-1}.$$

Ich behaupte nun: Alle eigentlichen Substitutionen, für die $|U+E|$ verschwindet, aber nicht gleichzeitig $|U-E|$ Null ist, lassen sich aus den eben angegebenen erhalten, indem man einen geeigneten Grenzübergang vornimmt, falls die Form S einer alternirenden Form ähnlich ist.

Sei nämlich W irgend eine Form, welche S in sich transformirt, und $|W-E|$ nicht Null, während $|W+E|$ verschwinden mag. Dann ist

$$W = -\frac{E-X}{E+X}$$

wo nun die Determinante von X im allgemeinen verschwinden muss. Da aber die Transformation eine eigentliche ist, so muss n eine gerade Zahl sein, und daher existirt auch eine Form von nicht verschwindender Determinante Z, welche der Gleichung

$$SZ + ZS = o$$

genügt. Bezeichnet man mit h einen beliebigen Parameter, so ist auch

$$S(Zh + X) + (X + hZ)S = o$$

1) Zur Bestimmung der Coefficienten der Form X kann man natürlich auch ähnliche nicht rationale Operationen wie in § 2 anwenden. Sind z. B. alle Wurzeln von $|S-\varrho E|$ von einander verschieden und paarweise entgegengesetzt gleich, so hängen diese Coefficienten bei geradem n von n homogenen Parametern ab. Für ungerades $n = 2p + 1$ ist dagegen, wenn je zwei Wurzeln bis auf eine entgegengesetzt gleich und verschieden sind, diese Anzahl gleich $2p$.

und die Determinante von $X + hZ$ verschwindet nicht für beliebige Werthe von h. Nun ist aber auch

$$X_1 = (X + hZ)^{-1}$$

eine Lösung der Gleichung $XS + SX = o$, demnach

$$U_h = \frac{E - X_1}{E + X_1},$$

eine Form, für welche $|U_h + E|$ nicht Null ist. Da endlich

$$U_h = -\frac{E - (X + hZ)}{E + (X + hZ)},$$

so folgt für $h = o$

$$\lim\; U_h = W = \lim\; \frac{E - X_1}{E + X_1},$$

wie zu zeigen war.

Die Substitutionen, welche sich für ein X von nicht verschwindender Determinante ergeben, zeichnen sich überhaupt durch besondere Eigenschaften aus, von denen die folgenden zwei noch erwähnt sein mögen.

1) Ist X einer alternirenden Form ähnlich, so ist die Substitution U einer orthogonalen Form ähnlich.

Ist nämlich Y selbst eine alternirende Form, so ist

$$O = \frac{E - Y}{E + Y},$$

eine orthogonale Form,[1]) wie aus den Gleichungen

$$O^1 = \frac{E + Y}{E - Y},$$

oder

$$O\,O^1 = E,$$

hervorgeht. Ist nun $X = VYV^{-1}$, so ist auch

$$V^{-1}\,U\,V = O;$$

mithin U der orthogonalen Form O ähnlich. Solche Sub-

*) F. S. 48 u. ff.

stitutionen entsprechen also dem Falle, wo S selbst einer alternirenden Form ähnlich ist.

2) Ist X eine Form von nicht verschwindender Determinante, so sind die Formen

$$SU, \; SU \; US^{-1}, \; S^{-1}U$$

alternirenden Formen ähnlich.

Denn nach 5) ist

$$US - SU = Y$$

wo Y eine Form ist, deren Determinante nicht verschwindet, und die nach § 3, 1 der Gleichung

$$SY + YS = o$$

selbst genügt. Nun ist ferner

$$UY = U^2 S - S = (U^2 - E)S;$$
$$YU = S - SU^2 = S(E - U^2).$$

also, da U mit S^2 vertauschbar ist,

$$UYS + SYU = o.$$

Hieraus folgt aber leicht, da auch Y mit S^2 vertauschbar ist,

$$(US)(S^{-1}YS^2) + (S^{-1}YS^2)(US) = o,$$
$$(SU)(YS) + (YS)(SU) = o,$$
$$(US^{-1})(SY) + (SY)(US^{-1}) = o;$$
$$(S^{-1}U)(YS) + (YS)(S^{-1}U) = o;$$

d. h. es haben die characteristischen Functionen $|T - \varrho E|$ und $|T + \varrho E|$ dieselben Elementartheiler, wo T jede der vier genannten Formen bedeuten kann.