Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Classe

der

k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.

Band XIX. Jahrgang 1889.

München.
Verlag der K. Akademie.
1890.

In Commission bei G. Franz.

Sitzungsberichte

der

königl. bayer. Akademie der Wissenschaften.

Mathematisch-physikalische Classe.

Sitzung vom 2. November 1889.

1. Herr EUGEN LOMMEL legte eine Mittheilung über „die Curven gleicher Lichtstärke in den Axenbildern doppelbrechender Krystalle" vor.

2. Herr AUREL VOSS sprach: „über einen Satz aus der Theorie der Determinanten."

3. Herr WILHELM VON GÜMBEL hielt einen Vortrag: „geologische Bemerkungen über die warmen Quellen von Gastein und ihre Umgebung."

Die Curven gleicher Lichtstärke in den Axenbildern doppelbrechender Krystalle.

Von E. Lommel.

(Eingelaufen 2. November.)

In einer älteren Abhandlung[1]) habe ich die Curven gleicher Lichtstärke (man kann sie „Isophoten" nennen), welche in den Interferenzbildern doppelbrechender Krystall-

1) Lommel, Die Interferenzerscheinungen zweiaxiger, senkrecht zur ersten Mittellinie geschnittener Krystallplatten im homogenen polarisirten Licht; Pogg. Ann. 120. 69—95. 1863.

platten im convergenten polarisirten Lichte auftreten, wie ich glaube zuerst,[1]) zur Sprache gebracht.

Die Lichtstärke J^2 in einem Punkte des Bildes ist ausgedrückt durch die Gleichung:

$$J^2 = A^2 \left(\cos^2 (\varphi - \psi) - \sin 2 (\alpha - \varphi) \sin 2 (\alpha - \psi) \sin^2 \pi \vartheta\right),$$

wenn A die Amplitude des einfallenden Lichtes, φ und ψ die Winkel der Schwingungsrichtungen des Polarisators und Analysators, α den Winkel der im betrachteten Punkte stattfindenden Schwingung mit einer festen Richtung des Gesichtsfeldes, und ϑ den daselbst stattfindenden Gangunterschied, in Wellenlängen ausgedrückt, bedeuten.

Die Gestalt der Erscheinung ist in jedem Falle bedingt durch zwei Systeme krummer Linien, die Curven gleichen Gangunterschiedes (Isochromaten) und die Curven gleicher Schwingungsrichtung (Isogyren), deren resp. Gleichungen sind:

$$\vartheta = \text{const.} \quad \text{und} \quad \alpha = \text{const.}$$

Im Falle einer senkrecht zur ersten Mittellinie geschnittenen zweiaxigen Krystallplatte von kleinem Axenwinkel hat man:

$$\vartheta = \frac{dq}{\lambda} r_1 r_2 ,$$

wenn d die Dicke der Platte, λ die Wellenlänge, q eine von den optischen Constanten des Krystalles abhängige Grösse, r_1 und r_2 die von den beiden Axenpunkten oder Polen nach dem betrachteten Bildpunkt gezogenen Strahlen bezeichnen.

Ist ϱ ein für eine und dieselbe Curve constanter Parameter, welcher jedoch von Curve zu Curve sich ändert, so ist

$$r_1 r_2 = \varrho^2$$

---

1) Viel später erst werden diese Curven wieder erwähnt von W. D. Niven, On the rings and brushes of crystals, Quarterly Journal of Mathematics, 13. p. 174. 1874.

die Gleichung der Isochromaten, des bekannten Systems homopolarer Lemniscaten.

Die Isogyren sind eine Schaar gleichseitiger Hyperbeln ($\alpha =$ const.), welche sämmtlich durch die Pole A und A^1 hindurchgehen und die Lemniscaten rechtwinklig durchschneiden. Die beiden zu einander senkrechten Schwingungen, welche längs einer Hyperbel stattfinden, erfolgen parallel zu deren Asymptoten, welche durch den Mittelpunkt O des Lemniscatensystems hindurchgehen. Jede Hyperbel bildet im Pole mit der Richtung OA (von welcher aus die Winkel α, φ, ψ gezählt werden) einen Winkel (2α), der doppelt so gross ist als der Winkel (α) ihrer Schwingungsrichtung mit derselben Geraden OA.

Jeder Punkt des Gesichtsfeldes ist Schnittpunkt einer Lemniscate ϱ mit einem Aste einer Hyperbel α; ϱ und α können daher als „lemniscatische Coordinaten [1]" dieses Punktes angesehen werden. Lässt man die beiden Pole im Mittelpunkte O zusammenfallen, so verwandeln sich die Lemniscaten in um O concentrische Kreise, die Hyperbeln in ihre Asymptoten, d. h. in je zwei zu einander senkrechte durch O gehende Gerade, und ϱ, α sind jetzt beziehungsweise Radius vector und Polarwinkel eines gewöhnlichen Polarcoordinatensystems.

Versteht man nun in dem Intensitätsausdruck

$$J^2 = A^2 \left(\cos^2(\varphi - \psi) - \sin 2(\alpha - \varphi) \sin 2(\alpha - \psi) \sin^2 \frac{\pi}{a^2}\varrho^2\right)$$

(wo a^2 statt der stets positiven Constanten λ/dq gesetzt ist) unter ϱ und α lemniscatische Coordinaten, so nimmt die Untersuchung dieses Ausdrucks für zweiaxige Krystalle genau denselben Weg wie für einaxige Krystalle, wo ϱ und α gewöhnliche Polarcoordinaten bedeuten.

---

1) Lommel, Ueber lemniscatische Coordinaten. Schlömilch's Zeitschr. f. Math. u. Phys. 12. 45—78. 1867.

Unter Anwendung lemniscatischer Coordinaten wurden in der Eingangs erwähnten Abhandlung hinsichtlich des Axenbildes zweiaxiger (und somit auch einaxiger) Krystalle unter anderen folgende Resultate gewonnen.

Die Gleichung der Curven gleicher Lichtstärke (Isophoten) ist:

$$\sin 2(\alpha - \varphi) \sin 2(\alpha - \psi) \sin^2 \frac{\pi}{a^2} \varrho^2 = k.$$

Zu ihnen gehören vor allem (für $k = o$) die Lemniscaten $\varrho^2 = n a^2$ („Hauptlemniscaten") und die beiden Hyperbeln $\alpha = \varphi$ und $\alpha = \psi$ („Haupthyperbeln"), auf welchen die nämliche Lichtstärke $A^2 \cos^2 (\varphi - \psi)$ herrscht, die ohne die Krystallplatte das ganze Gesichtsfeld gleichmässig erfüllend wahrgenommen würde. In ihren Durchkreuzungspunkten, also in jedem Pole, bilden die beiden Haupthyperbeln einen Winkel $2(\varphi - \psi)$ mit einander, der doppelt so gross ist als der spitze Winkel $\varphi - \psi \left(o < \varphi - \psi \leqq \frac{\pi}{2}\right)$ zwischen den Schwingungsrichtungen des Polarisators und des Analysators.

Durch die Hauptlemniscaten und die beiden zu ihnen rechtwinkligen Haupthyperbeln wird das ganze Bild in rechteckige krummlinig begrenzte Felder zerschnitten. Innerhalb der Felder, welche zwischen den beiden Haupthyperbeln $(\psi < \alpha < \varphi)$ liegen, ist die Lichtstärke grösser, in den übrigen kleiner als $A^2 \cos^2 (\varphi - \psi)$.

Denkt man sich in jedem Punkte der Bildebene die Lichtstärke als Ordinate senkrecht errichtet, so wird durch das so erhaltene Lichtgebirge die Vertheilung der Intensität anschaulich dargestellt. Die Hauptlemniscaten und die Haupthyperbeln bilden dann ein im Niveau $A^2 \cos^2 (\varphi - \psi)$ verlaufendes horizontales Strassennetz, wodurch das ganze Terrain in die erwähnten Felder zerlegt wird. Ueber jedem Felde innerhalb der helleren Scheitelräume erhebt sich ein Lichtberg über das Niveau der Strassen, in jedem Felde der dunkleren Räume senkt sich ein muldenförmiges Thal unter dieses Niveau hinab.

Die Maxima und Minima der Lichtstärke (Berggipfel und Thaltiefen) liegen auf den „Maximum- und Minimum-Lemniscaten" $\varrho^2 = \frac{1}{2}(2n+1)a^2$, und zwar die Maxima $(J^2 = A^2)$ da, wo sie von der „Maximum-Hyberbel" $\alpha = \frac{1}{2}(\varphi + \psi)$, die Minima $(J^2 = 0)$ dort, wo sie von der „Minimum-Hyperbel" $\alpha = \frac{1}{2}(\varphi + \psi) - \frac{1}{4}\pi$ geschnitten werden. Maximum- und Minimum-Hyperbel halbiren in den Polen die Winkel zwischen den zwei Haupthyperbeln, und stehen daselbst auf einander senkrecht.

Die Linien gleicher Lichtstärke, für welche k von Null verschieden ist, umgeben in jedem Felde als geschlossene Curven (Horizontalcurven des Gebirges) die Maximal- oder Minimalpunkte; jede derselben umschliesst nur ein Maximum oder Minimum, mit Ausnahme derjenigen, welche den Mittelpunkt O in sich schliessen, woselbst das Lichtgebirge im allgemeinen eine sattelförmige Gestalt besitzt.[1])

In den helleren Scheitelräumen sind alle Curven gleicher Lichtstärke $J^2 = A^2\left(\cos^2(\varphi - \psi) + k\right)$ zwischen zwei Hyperbeln eingeschlossen, deren Schwingungsrichtungen (Asymptoten) von denjenigen der Maximumhyperbel, also auch von denjenigen der zwei Haupthyperbeln beiderseits um gleichviel abweichen, nämlich zwischen den Hyperbeln $\alpha = \psi + \alpha^1$, $\alpha = \varphi - \alpha^1$, wo α^1 der Gleichung $\sin^2 2\alpha^1 = k$ genügt. Diese beiden Hyperbeln berühren die Isophoten in den Punkten, wo sie den Maximum- und Minimum-Lemniscaten begegnen.

Im dunkleren Gebiete werden ebenso alle Isophoten von der Lichtstärke $J^2 = A^2\left(\cos^2(\varphi - \psi) - k\right)$ von den beiden Hyperbeln $\alpha = \psi - \alpha^1$, $\alpha = \varphi + \alpha^1$ berührt.

---

1) Man vergleiche hiezu die in der erwähnten Abhandlung beigegebene genaue Zeichnung Pogg. Ann. 120. Taf. I. Fig. 5. 1863.

Jede Curve gleicher Lichtstärke ist zwischen zwei Lemniscaten $\varrho^2 = na^2 + \delta$ und $\varrho^2 = (n+1)\,a^2 - \delta$ (wo δ der Gleichung $\sin^2(\varphi - \psi)\sin^2\frac{\pi}{a^2}\delta = k$ genügt) eingeschlossen, welche hinsichtlich ihres Gangunterschiedes von den beiden Hauptlemniscaten $\left(\varrho^2 = na^2,\ \varrho^2 = (n+1)\,a^2\right)$, die das entsprechende Feld begrenzen, und demnach auch von der das Feld durchsetzenden Maximum- und Minimum-Lemniscate $\varrho^2 = \frac{1}{2}(2n+1)\,a^2$ um gleichviel abweichen. Die Berührungspunkte jener Lemniscaten mit der Isophote liegen auf der Maximum- (oder Minimum-) Hyperbel.

Jede zwischen diesen berührenden Lemniscaten liegende Lemniscate $\varrho_1^2 = n^2a^2 + \varepsilon\,(\varepsilon > \delta)$ schneidet die Isophote in zwei Punkten, die auf Hyperbeln liegen, deren Schwingungsrichtungen (Asymptoten) $\alpha = \psi + \beta$ und $\alpha = \varphi - \beta$ von denjenigen der Haupthyperbeln um gleichviel abweichen. Die beiden andern Schnittpunkte dieser Hyperbeln mit derselben Isophote liegen auf einer zweiten Lemniscate $\varrho_2^2 = (n+1)\,a^2 - \varepsilon$, deren Gangunterschied von demjenigen der Maximum- und Minimum-Lemniscate um ebensoviel abweicht wie bei jener ersten Lemniscate. Die Werte β und ε genügen der Gleichung

$$\sin 2\beta \sin 2(\varphi - \psi - \beta)\sin^2\frac{\pi}{a^2}\varepsilon = k.$$

Fur alle auf der Hyperbel $\alpha = \psi + \beta$ liegende Punktepaare aller k-Isophoten ist hienach die Differenz der Gangunterschiede $\varrho_2^2 - \varrho_1^2 = a^2 - 2\varepsilon$ die nämliche, und unabhängig von der Ordnungszahl n der Isophote. Denselben Werth hat diese Differenz auch auf der Hyperbel $\alpha = \varphi - \beta$, welche jenseits von der Maximum-Hyperbel um gleichviel abweicht.

Da ferner $\varrho_2^2 + \varrho_1^2 = (2n+1)\,a^2$ unabhängig von ε, folglich auch unabhängig von k ist, so ist diese Summe für alle in demselben n^{ten} Felde liegenden Isophoten constant, und nimmt nach aussen hin von Feld zu Feld um $2a^2$ zu.

Ist ϱ_m der Parameter einer Maximum- und Minimum-Lemniscate $\left(\varrho_m^2 = \frac{1}{2}(2n+1)a^2\right)$, so ist $\varrho_2^2 - \varrho_m^2 = \varrho_m^2 - \varrho_1^2 = \frac{1}{2}a^2 - \varepsilon = \frac{1}{2}(\varrho_2^2 - \varrho_1^2)$ ebenfalls unabhängig von der Ordnungszahl n.

Für Punktpaare derselben Hyperbel, welche auf den einander zugewendeten Theilen zweier aufeinanderfolgender Isophoten und sonach auf den Lemniscaten $\varrho'^2 = na^2 + \varepsilon$ und $\varrho^2 = na^2 - \varepsilon$, ergibt sich $\varrho'^2 - \varrho^2 = 2\varepsilon$ ebenfalls unabhängig von n. Bezeichnet $\varrho_0^2 = na^2$ die zwischenliegende Hauptlemniscate, so hat man noch $\varrho'^2 - \varrho_0^2 = \varrho_0^2 - \varrho^2 = \frac{1}{2}(\varrho'^2 - \varrho^2) = \varepsilon$ und $\frac{1}{2}(\varrho'^2 + \varrho^2) = \varrho_0^2 = na^2$. Auch diese Differenzen und Summen haben auf den beiden Hyperbeln, welche von der Maximum- (oder Minimum-) Hyperbel beiderseits um gleichviel abweichen, den nämlichen Werth.

Alle diese Sätze gelten sowohl für zweiaxige als auch für einaxige Krystalle, indem für letztere unter ϱ und a statt lemniscatischer Coordinaten gewöhnliche Polarcoordinaten zu verstehen sind.

Man erkennt nun leicht, dass der Satz, welchen Herr Glazebrook[1]) zwanzig Jahre später nur für einaxige senk-

1) R. T. Glazebrook, On the isochromatic curves of polarized light seen in a uniaxal crystal cut at right angles to the optic axis. Proceed. Cambridge Philos. Society, 4, 299—304. 1883.

Sowohl Herr Glazebrook als Herr Niven bezeichnen die Curven gleicher Intensität mitunter als „isochromatic curves". Diese Bezeichnung ist nicht zutreffend. „Isochromatisch" kann man nur die Curven gleichen Gangunterschiedes nennen, welche bei Anwendung von weissem Licht in ihrer ganzen Erstreckung denselben Farbenton, nur mit verschiedener Lichtstärke und Sättigung, aufweisen, also in den vorliegenden Fällen die Lemniscaten oder Kreise. Eine Isophote dagegen, welche längs ihres Umfanges für eine bestimmte Wellenlänge überall die gleiche Lichtstärke besitzt, zeigt in ihren verschiedenen Punkten verschiedene Farben, nämlich in jedem Punkte denjenigen Farbenton, welcher der Isochromate (hier Lemniscate oder Kreislinie) angehört, die durch diesen Punkt hindurchgeht; sie ist also nicht „isochromatisch".

Jede Curve gleicher Lichtstärke ist zwischen zwei Lemniscaten $\varrho^2 = na^2 + \delta$ und $\varrho^2 = (n+1)a^2 - \delta$ (wo δ der Gleichung $\sin^2(\varphi - \psi)\sin^2\frac{\pi}{a^2}\delta = k$ genügt) eingeschlossen, welche hinsichtlich ihres Gangunterschiedes von den beiden Hauptlemniscaten $\left(\varrho^2 = na^2,\ \varrho^2 = (n+1)a^2\right)$, die das entsprechende Feld begrenzen, und demnach auch von der das Feld durchsetzenden Maximum- und Minimum-Lemniscate $\varrho^2 = \frac{1}{2}(2n+1)a^2$ um gleichviel abweichen. Die Berührungspunkte jener Lemniscaten mit der Isophote liegen auf der Maximum- (oder Minimum-) Hyperbel.

Jede zwischen diesen berührenden Lemniscaten liegende Lemniscate $\varrho_1^2 = n^2 a^2 + \varepsilon\ (\varepsilon > \delta)$ schneidet die Isophote in zwei Punkten, die auf Hyperbeln liegen, deren Schwingungsrichtungen (Asymptoten) $\alpha = \psi + \beta$ und $\alpha = \varphi - \beta$ von denjenigen der Haupthyperbeln um gleichviel abweichen. Die beiden andern Schnittpunkte dieser Hyperbeln mit derselben Isophote liegen auf einer zweiten Lemniscate $\varrho_2^2 = (n+1)a^2 - \varepsilon$, deren Gangunterschied von demjenigen der Maximum- und Minimum-Lemniscate um ebensoviel abweicht wie bei jener ersten Lemniscate. Die Werte β und ε genügen der Gleichung

$$\sin 2\beta \sin 2(\varphi - \psi - \beta)\sin^2\frac{\pi}{a^2}\varepsilon = k.$$

Fur alle auf der Hyperbel $\alpha = \psi + \beta$ liegende Punktepaare aller k-Isophoten ist hienach die Differenz der Gangunterschiede $\varrho_2^2 - \varrho_1^2 = a^2 - 2\varepsilon$ die nämliche, und unabhängig von der Ordnungszahl n der Isophote. Denselben Werth hat diese Differenz auch auf der Hyperbel $\alpha = \varphi - \beta$, welche jenseits von der Maximum-Hyperbel um gleichviel abweicht.

Da ferner $\varrho_2^2 + \varrho_1^2 = (2n+1)a^2$ unabhängig von ε, folglich auch unabhängig von k ist, so ist diese Summe für alle in demselben n^{ten} Felde liegenden Isophoten constant, und nimmt nach aussen hin von Feld zu Feld um $2a^2$ zu.

Ist ϱ_m der Parameter einer Maximum- und Minimum-Lemniscate $\left(\varrho_m^2 = \frac{1}{2}(2n+1)a^2\right)$, so ist $\varrho_2^2 - \varrho_m^2 = \varrho_m^2 - \varrho_1^2 = \frac{1}{2}a^2 - \varepsilon = \frac{1}{2}(\varrho_2^2 - \varrho_1^2)$ ebenfalls unabhängig von der Ordnungszahl n.

Für Punktpaare derselben Hyperbel, welche auf den einander zugewendeten Theilen zweier aufeinanderfolgender Isophoten und sonach auf den Lemniscaten $\varrho'^2 = na^2 + \varepsilon$ und $\varrho^2 = na^2 - \varepsilon$, ergibt sich $\varrho'^2 - \varrho^2 = 2\varepsilon$ ebenfalls unabhängig von n. Bezeichnet $\varrho_0^2 = na^2$ die zwischenliegende Hauptlemniscate, so hat man noch $\varrho'^2 - \varrho_0^2 = \varrho_0^2 - \varrho^2 = \frac{1}{2}(\varrho'^2 - \varrho^2) = \varepsilon$ und $\frac{1}{2}(\varrho'^2 + \varrho^2) = \varrho_0^2 = na^2$. Auch diese Differenzen und Summen haben auf den beiden Hyperbeln, welche von der Maximum- (oder Minimum-) Hyperbel beiderseits um gleichviel abweichen, den nämlichen Werth.

Alle diese Sätze gelten sowohl für zweiaxige als auch für einaxige Krystalle, indem für letztere unter ϱ und α statt lemniscatischer Coordinaten gewöhnliche Polarcoordinaten zu verstehen sind.

Man erkennt nun leicht, dass der Satz, welchen Herr Glazebrook[1]) zwanzig Jahre später nur für einaxige senk-

1) R. T. Glazebrook, On the isochromatic curves of polarized light seen in a uniaxal crystal cut at right angles to the optic axis. Proceed. Cambridge Philos. Society, 4, 299—304. 1883.

Sowohl Herr Glazebrook als Herr Niven bezeichnen die Curven gleicher Intensität mitunter als „isochromatic curves". Diese Bezeichnung ist nicht zutreffend. „Isochromatisch" kann man nur die Curven gleichen Gangunterschiedes nennen, welche bei Anwendung von weissem Licht in ihrer ganzen Erstreckung denselben Farbenton, nur mit verschiedener Lichtstärke und Sättigung, aufweisen, also in den vorliegenden Fällen die Lemniscaten oder Kreise. Eine Isophote dagegen, welche längs ihres Umfanges für eine bestimmte Wellenlänge überall die gleiche Lichtstärke besitzt, zeigt in ihren verschiedenen Punkten verschiedene Farben, nämlich in jedem Punkte denjenigen Farbenton, welcher der Isochromate (hier Lemniscate oder Kreislinie) angehört, die durch diesen Punkt hindurchgeht; sie ist also nicht „isochromatisch".

recht zur Axe geschnittene Krystallplatten bewiesen hat, nämlich:

„Alle Curven (Ovale) gleicher Intensität berühren zwei von vier geraden Linien in Punkten, welche durch die Gleichung

$$\varrho = a\sqrt{\frac{2n+1}{2}}$$

gegeben sind,"

sowie eine Anzahl der Sätze, welche hierauf Herr Spurge[1]) hinsichtlich dieser Curven ebenfalls nur für einaxige Krystalle und nur für $\varphi - \psi = o$ oder $= \frac{1}{2}\pi$ abgeleitet hat, in obigen Sätzen als besondere Fälle bereits enthalten sind.

Gelten die bisher erwähnten Sätze sowohl für zweiaxige als für einaxige Krystalle, indem im letzteren Falle nur an Stelle der Lemniscaten concentrische Kreise, an Stelle der Hyperbeln die Radien dieser Kreise treten, so ist der zweite Satz Glazebrook's: „Alle Ovale gleicher Intensität sind von gleichem Flächeninhalt", nur für die einaxigen Krystalle richtig; denn nur bei diesen wird das von zwei consecutiven Radien und einer Isophote begrenzte Flächenelement durch $\frac{1}{2}(\varrho_2^2 - \varrho_1^2)\,d\alpha$ ausgedrückt, und ist demnach für alle k-Isophoten, welches auch ihre Ordnungszahl sein mag, von gleicher Grösse.

Wir können diesem Satze noch hinzufügen, dass jedes von einer Isophote umgrenzte Flächenstück sowohl durch den Maximum- und Minimum-Kreis, als auch durch die Maximum- (oder Minimum-) Gerade halbirt wird.

Physikalisch von grösserem Interesse als diese geometrischen Sätze ist die Frage nach der Lichtmenge, welche durch eine zwischen zwei Polarisatoren befindliche Krystallplatte oder einen begrenzten Theil derselben hindurchgeht. In

1) C. Spurge, On the curves of constant intensity of homogeneous polarized light seen in a uniaxal crystal cut at right angles to the optic axis. Proceed. Cambridge Philos. Society, 5, 74—86. 1884.

einer früheren Notiz [1]) habe ich diese Frage hinsichtlich der mittleren Lichtmenge, welche durch die ganze Platte dringt, bereits behandelt, und unter anderen folgende Sätze bewiesen:

Bringt man zwischen zwei Polarisatoren, deren Polarisationsebenen parallel oder rechtwinklich gekreuzt sind, eine einaxige, senkrecht zur Axe geschnittene Krystallplatte, so ist die mittlere Erleuchtung des Gesichtsfeldes dieselbe, als wenn man bei Abwesenheit der Platte die eine Polarisationsebene um 30⁰ drehen würde.

Bilden die Polarisationsebenen einen Winkel von 45⁰ mit einander, so ist die mittlere Erleuchtung eben so gross, als wenn die Krystallplatte gar nicht vorhanden wäre.

Ist bei einer zweiaxigen senkrecht zur ersten Mittellinie geschnittenen Krystallplatte die eine Polarisationsebene parallel oder senkrecht, die andere unter 45⁰ geneigt zur Ebene der optischen Axen, so findet im Gesichtsfeld dieselbe mittlere Erleuchtung statt, als wenn die Krystallplatte gar nicht vorhanden wäre.

Diesen früher bewiesenen auf die mittlere Erleuchtung des ganzen Gesichtsfeldes sich beziehenden Sätzen sei nun hier betreffs der Lichtmenge, welche durch ein von einer Isophote begrenztes Flächenstück hindurchgeht, nach Folgendes hinzugefügt.

Die auf das Flächenelement $\varrho d\varrho d\alpha$ im Axenbilde eines einaxigen Krystalls treffende Lichtmenge beträgt, wenn man $A = 1$ setzt:

$$\cos^2(\varphi - \psi)\cdot\varrho d\varrho d\alpha - \sin 2(\alpha - \varphi)\sin 2(\alpha - \psi)\sin^2\frac{\pi}{a^2}\varrho^2\cdot\varrho d\varrho d\alpha,$$

und ergibt durch Integration nach ϱ für den zwischen den

2) Lommel, Ueber die Lichtmenge, welche im Polarisationsapparat durch eine zur optischen Axe oder zur ersten Mittellinie senkrecht geschnittene Krystallplatte hindurchgeht. Schlöm. Zeitschrift 12, 514—520. 1867.

bezüglichen Sätze im allgemeinen nicht, oder vielmehr sie gelten genähert erst in so grosser Entfernung von der Bildmitte, dass die Lemniscaten daselbst als mit um diese Mitte beschriebenen Kreisen zusammenfallend angesehen werden können. Nur in dem Falle, dass $\varphi = 45^0$, $\psi = o$ ist, lässt sich ohne Schwierigkeit wie vorhin zeigen, dass an jedes Feld in einem der helleren Scheitelräume ein zwischen denselben beiden Hauptlemniscaten gelegenes ganz gleiches Feld in einem der dunkleren Scheitelräume angrenzt, und dass der über jenem sich erhebende Lichtberg congruent ist mit dem unter letzteres sich hinabsenkenden Thal. Obgleich also hier die Berge oder die Thäler über Isophoten verschiedener Ordnungszahl unter sich nicht gleich sind, so compensiren sich doch paarweise je ein Berg mit einem Nachbarthal von derselben Ordnungszahl, und es ergibt sich wie früher der Satz, dass in diesem Falle die mittlere Erleuchtung des Gesichtsfeldes die nämliche ist, als wenn die Krystallplatte gar nicht vorhanden wäre.