Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Classe

der

k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.

Band XIX. Jahrgang 1889.

München.
Verlag der K. Akademie.
1890.

In Commission bei G. Franz.

Ueber einen Satz aus der Theorie der Determinanten.

Von A. Voss.

(Eingelaufen 2. November.)

Im 86. Bande des Borchardt'schen Journals hat Herr Stickelberger den folgenden Satz ausgesprochen:

„Ist die Determinante w der Schaar bilinearer Formen $C = \Sigma c_{ik} x_i y_k = r A - B$ nicht identisch Null, und bestimmt man in den Determinanten

$$W_{k-1} = \begin{vmatrix} c_{11} & . & . & c_{1n} & u_1^1 & . & . & u_1^{k-1} & u_1 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ c_{n1} & . & . & c_{nn} & u_n^1 & . & . & u_n^{k-1} & u_n \\ v_1^1 & . & . & v_n^1 & 0 & . & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ v_1^{k-1} & . & . & v_n^{k-1} & 0 & . & . & 0 & 0 \\ v_1 & . & . & v_n & 0 & . & . & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

$$w_k = \begin{vmatrix} c_{11} & . & . & c_{1n} & u_1^1 & . & . & u_1^k \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ c_{n1} & . & . & c_{nn} & u_n^1 & . & . & u_n^k \\ v_1^1 & . & . & v_n^1 & 0 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ v_1^k & . & . & v_n^k & 0 & . & . & 0 \end{vmatrix},$$

die Constanten u_α^1, v_α^1 ($\alpha = 1, 2 \ldots n$) so, dass w durch keine höhere Potenz des Linearfactors $r - r_0$ der Determinante w theilbar ist, als alle Coeffizienten der bilinearen Form W, alsdann die Constanten u_α^2, v_α^2 so, dass w_2 durch keine höhere Potenz von $r - r_0$ theilbar ist, als alle Coefficienten von W'_1 u. s. w.; so ist w_k durch keine höhere Potenz von $r - r_0$ theilbar, als sämmtliche k^{ten} Unterdeterminanten von w."

Herr Stickelberger hat diesen, zunächst für die Theorie der bilinearen Formen wichtigen Satz durch eine eigenthümliche Betrachtung bewiesen, welche auf der Weierstrass'schen Reduction der Schaar auf ihre Normalform beruht, und sich daher namentlich nicht auf den Fall anwenden lässt, wo die c_{ik} nicht mehr lineare Functionen eines Parameters r, sondern überhaupt rationale ganze Functionen eines solchen, resp. analytische Functionen sind, die in der Nähe von r_0 sämmtlich den Character einer ganzen rationalen Function haben.

Ich beabsichtige im folgenden zu zeigen, wie der Beweis dieses Satzes auf eine identische Determinantenrelation gegründet werden kann,[1] und damit sowohl eine Schwierigkeit zu beseitigen, die Herr Stickelberger besonders nachdrücklich hervorgehoben hat (a. a. O. S. 22) als auch das Theorem selbst von der genannten Einschränkung zu befreien, und in einen allgemeinen Satz der Determinantentheorie zu verwandeln.

Diese Relation leitet man leicht aus einem bekannten Satze der Determinantentheorie ab. Bezeichnet man die mit

1) Einen auf ganz anderen Grundlagen beruhenden Beweis der genannten Sätze deutet Herr Frobenius, Journal v. Borchardt Bd. 88, S. 116, kurz an, doch ist es vielleicht nicht überflüssig, dieselben, abgesehen von der im Texte gegebenen Verallgemeinerung, unabhängig von der Theorie der Jacobi'schen Normalformen herzuleiten.

k-Grössenreihen u_α^s, v_α^s; $s = 1, 2 \ldots k$; $\alpha = 1, 2 \ldots n$ geränderte Determinante der Elemente c_{ik}, welche irgend welche rationale ganze Functionen eines Parameters r oder auch solche Functionen sind, die in der Nähe irgend einer Nullstelle r_0 von w oder auch der Unterdeterminanten von w nach Potenzen von $r - r_0$ mit ganzen positiven Exponenten entwickelbar sind, durch

$$\begin{pmatrix} u^1 \, u^2 \, . \, . \, u^{k-2} \, u^{k-1} \, u^k \\ v^1 \, v^2 \, . \, . \, v^{k-2} \, v^{k-1} \, v^k \end{pmatrix}$$

oder auch durch:

$$\begin{pmatrix} u^{k-r} \, . \, . \, u^{k-2} \, u^{k-1} \, u^k \\ v^{k-r} \, . \, . \, v^{k-2} \, v^{k-1} \, v^k \end{pmatrix}$$

$$r = k - 1, \; k - 2, \ldots 0,$$

sodass im letzteren Falle nur die Symbole der letzten $r + 1$-Reihen angedeutet werden, so ist

$$1) \quad \begin{pmatrix} u^{k-2} \\ v^{k-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^{k-1} \, u^k \\ v^{k-1} \, v^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^{k-2} \, u^k \\ v^{k-1} \, v^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^{k-2} \, u^k \\ v^{k-2} \, v^k \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u^{k-2} \, u^{k-1} \\ v^{k-2} \, v^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^{k-2} \, u^k \\ v^{k-2} \, v^{k-1} \end{pmatrix}.$$

Setzt man in dieser bekannten Identität zuerst

$$u_i^{k-1} = \alpha_i; \quad i = 1, 2 \ldots n,$$

wo die α_i beliebige Grössen bedeuten, so ist

$$2) \quad \begin{pmatrix} u^{k-2} \\ v^{k-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^{k-2} \, \alpha \, u^k \\ v^{k-2} \, v^{k-1} \, v^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^{k-2} \, \alpha \\ v^{k-2} \, v^{k-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^{k-2} \, u^k \\ v^{k-2} \, v^k \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u^{k-2} \, \alpha \\ v^{k-2} \, v^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^{k-2} \, u^k \\ v^{k-2} \, v^{k-1} \end{pmatrix};$$

vertauscht man nun u_i^k mit u_i^{k-1}, so wird aus 2)

$$3) \quad \begin{pmatrix} u^{k-2} \\ v^{k-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^{k-2} \, \alpha \, u^{k-1} \\ v^{k-2} \, v^{k-1} \, v^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^{k-2} \, \alpha \\ v^{k-2} \, v^{k-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^{k-2} \, u^{k-1} \\ v^{k-2} \, v^k \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u^{k-2} \, \alpha \\ v^{k-2} \, v^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^{k-2} \, u^{k-1} \\ v^{k-2} \, v^{k-1} \end{pmatrix}.$$

Multiplicirt man die Identitäten 2) und 3) respective mit

$$\begin{pmatrix} u^{k-2} & u^{k-1} \\ v^{k-2} & v^{k-1} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} u^{k-2} & u^{k} \\ v^{k-2} & v^{k-1} \end{pmatrix}$$

und subtrahirt dieselben dann, so wird

$$\begin{pmatrix} u^{k-2} \\ v^{k-2} \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} u^{k-2} & \alpha & u^{k} \\ v^{k-2} & v^{k-1} & v^{k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^{k-2} & u^{k-1} \\ v^{k-2} & v^{k-1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u^{k-2} & \alpha & u^{k-1} \\ v^{k-2} & v^{k-1} & v^{k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^{k-2} & u^{k} \\ v^{k-2} & v^{k-1} \end{pmatrix} \right]$$

$$= \begin{pmatrix} u^{k-2} & \alpha \\ v^{k-2} & v^{k-1} \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} u^{k-2} & u^{k} \\ v^{k-2} & v^{k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^{k-2} & u^{k-1} \\ v^{k-2} & v^{k-1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u^{k-2} & u^{k-1} \\ v^{k-2} & v^{k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^{k-2} & u^{k} \\ v^{k-2} & v^{k-1} \end{pmatrix} \right],$$

oder, wenn man den Ausdruck rechts nach 1) ersetzt und den beiderseits auftretenden Factor fortlässt:

$$\text{I.} \quad \begin{pmatrix} u^{k-2} & \alpha & u^{k} \\ v^{k-2} & v^{k-1} & v^{k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^{k-2} & u^{k-1} \\ v^{k-2} & v^{k-1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u^{k-2} & \alpha & u^{k-1} \\ v^{k-2} & v^{k-1} & v^{k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^{k-2} & u^{k} \\ v^{k-2} & v^{k-1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} u^{k-2} & \alpha \\ v^{k-2} & v^{k-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^{k-2} & u^{k-1} & u^{k} \\ v^{k-2} & v^{k-1} & v^{k} \end{pmatrix}.$$

welche Identität auch dann bestehen bleibt, wenn der in 1. 2. 3. linkerhand auftretende Factor identisch verschwinden sollte.

Um aus I noch eine weitere Identität abzuleiten, setze man in dieser Relation der Reihe nach

$$u_i^k = \beta_i; \quad u_i^{k-1} = \beta_i,$$

so folgt

$$\begin{pmatrix} u^{k-2} & \alpha & \beta \\ v^{k-2} & v^{k-1} & v^{k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^{k-2} & u^{k-1} \\ v^{k-2} & v^{k-1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u^{k-2} & \alpha & u^{k-1} \\ v^{k-2} & v^{k-1} & v^{k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^{k-2} & \beta \\ v^{k-2} & v^{k-1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} u^{k-2} & u^{k-1} & \beta \\ v^{k-2} & v^{k-1} & v^{k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^{k-2} & \alpha \\ v^{k-2} & v^{k-1} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} u^{k-2} & \alpha & \beta \\ v^{k-2} & v^{k-1} & v^{k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^{k-2} & u^{k} \\ v^{k-2} & v^{k-1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u^{k-2} & \alpha & u^{k} \\ v^{k-2} & v^{k-1} & v^{k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^{k-2} & \beta \\ v^{k-2} & v^{k-1} \end{pmatrix}$$

$$= - \begin{pmatrix} u^{k-2} & \beta & u^{k} \\ v^{k-2} & v^{k-1} & v^{k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^{k-2} & \alpha \\ v^{k-2} & v^{k-1} \end{pmatrix};$$

also, wenn man die erste Gleichung mit

$$\begin{pmatrix} u^{k-2} & \alpha & u^k \\ v^{k-2} & v^{k-1} & v^k \end{pmatrix},$$

die zweite mit

$$\begin{pmatrix} u^{k-2} & \alpha & u^{k-1} \\ v^{k-2} & v^{k-1} & v^k \end{pmatrix}$$

multiplicirt und subtrahirt, und mit Hülfe von I reducirt

$$\text{II.} \qquad \begin{pmatrix} u^{k-2} & \alpha & \beta \\ v^{k-2} & v^{k-1} & v^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^{k-2} & u^{k-1} & u^k \\ v^{k-2} & v^{k-1} & v^k \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} u^{k-2} & \beta & u^k \\ v^{k-2} & v^{k-1} & v^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^{k-2} & \alpha & u^{k-1} \\ v^{k-2} & v^{k-1} & v^k \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u^{k-2} & \beta & u^{k-1} \\ v^{k-2} & v^{k-1} & v^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^{k-2} & \alpha & u^k \\ v^{k-2} & v^{k-1} & v^k \end{pmatrix}.$$

Von dieser Identität wird indess im folgenden kein Gebrauch gemacht werden.

Der Exponent, mit welchem ein Wurzelfactor $r - r_0 = \xi$ der Determinante der c_{ik} in einer k-fach geänderten Determinante

$$\begin{pmatrix} u^k \\ v^k \end{pmatrix}$$

enthalten ist, heisse der Character derselben in Bezug auf den Modul ξ.[1]) Werden die Grössen u, v sämmtlich als völlig willkürlich vorausgesetzt, so ist der Character zugleich der Exponent des grössten gemeinsamen Wurzelfactors ξ der sämmtlichen k^{ten} Unterdeterminanten, welcher durch l_k bezeichnet werden mag. Ersetzt man einige oder alle der Grössen u, v durch bestimmt gewählte Grössen, so kann sich der Charakter erhöhen oder ungeändert bleiben. Ist das letztere der Fall, so heisse die Determinante der ur-

1) Sind die Elemente c_{ik} ganze Zahlen, mit welchem Falle sich auch namentlich Herr Frobenius a. a. O. Bd. 86 und 88, sowie Herr St. H. J. Smith, Phil. Trans. Vol. 151; Proc. of the London Math. Society, Vol. IV, beschäftigt haben, so hat man unter ξ eine Primzahl zu verstehen, wenn die folgenden Betrachtungen gültig bleiben sollen.

sprünglichen congruent, und es mag dies durch das Zeichen $\equiv$ ausgedrückt werden.

Es seien nun u_i^{k-1} und u_i^k willkürliche Variabele, und nach Potenzen von ξ entwickelt

$$\begin{pmatrix} u^{k-2} & u^{k-1} & u^k \\ v^{k-2} & v^{k-1} & v^k \end{pmatrix} = A\,\xi^{\lambda_k} + \ldots,$$

$$\begin{pmatrix} u^{k-2} & \alpha & u^k \\ v^{k-2} & v^{k-1} & v^k \end{pmatrix} = c_k\,\xi^{\lambda_k + \eta''} + \ldots,$$

$$\begin{pmatrix} u^{k-2} & \alpha & u^{k-1} \\ v^{k-2} & v^{k-1} & v^k \end{pmatrix} = c_{k-1}\,\xi^{\lambda_k + \eta''} + \ldots,$$

$$\begin{pmatrix} u^{k-2} & u^{k-1} \\ v^{k-2} & v^{k-1} \end{pmatrix} = a_{k-1}\,\xi^{\lambda_{k-1}} + \ldots,$$

$$\begin{pmatrix} u^{k-2} & u^k \\ v^{k-2} & v^{k-1} \end{pmatrix} = a_k\,\xi^{\lambda_{k-1}} + \ldots,$$

$$\begin{pmatrix} u^{k-2} & \alpha \\ v^{k-2} & v^{k-1} \end{pmatrix} = a\,\xi^{\lambda_{k-1} + \eta'} + \ldots,$$

wo die von ξ freien Coefficienten

$$A,\ a,\ c_k,\ c_{k-1},\ a_k,\ a_{k-1},$$

nicht verschwinden und die Exponenten η', η'' gleich oder grösser als Null sind. Setzt man diese Entwickelungen in I ein, so wird

$$a A\,\xi^{\lambda_k + \lambda_{k-1} + \eta'} + \ldots = (c_k a_{k-1} - c_{k-1} a_k)\,\xi^{\lambda_k + \lambda_{k-1} + \eta''} + \ldots,$$

und aus dieser Identität folgt, dass

$$\eta'' \leqq \eta'$$

sein muss. In dem besonderen Falle, wo $\eta' = o$, ist daher auch $\eta'' = o$, und zugleich

$$c_k a_{k-1} - c_{k-1} a_k$$

von Null verschieden.

Dies liefert den Satz:

1) Aendert die Ersetzung der willkürlichen Grössen u^{k-1} durch irgend welche bestimmte Grössen α den Character λ_{k-1} nicht, so wird auch keiner der Charactere λ_h, $h > k$, geändert, falls die u^k, $u^{k+1}, \ldots$ als vollkommen willkürlich angesehen werden.

Hieraus folgt sogleich:

2) Bringt die jeweilige Ersetzung der willkürlichen Grössen u^{k-1}, respective der Grössen v^{k-1}, durch irgend welche Grössen α, β keine Aenderung des Characters hervor, so findet eine Aenderung auch bei gleichzeitiger Ersetzung der u, v durch die α, β in keiner der höher geränderten Determinanten statt, falls die u^k, v^k; u^{k+1}, v^{k+1}, . . als vollkommen willkürlich angesehen werden.

Es seien nämlich die Grössen α, β so gewählt, dass

4) $$\begin{pmatrix}\alpha \\ v^{k-1}\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}u^{k-1} \\ v^{k-1}\end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix}u^{k-1} \\ \beta\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}u^{k-1} \\ v^{k-1}\end{pmatrix},$$

wobei in der ersten Congruenz die u^{k-1}, in der zweiten die v^{k-1} vollkommen willkürlich gedacht sind. Dann ist nach dem oben bewiesenen Satze

$$\begin{pmatrix}\alpha & u^k \\ v^{k-1} & v^k\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}u^{k-1} & u^k \\ v^{k-1} & v^k\end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix}u^{k-1} & u^k \\ \beta & v^k\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}u^{k-1} & u^k \\ v^{k-1} & v^k\end{pmatrix};$$

und die erste Congruenz gilt für jedes auch specielle System der v_k. Setzt man daher in derselben

$$v^k = \beta; \quad v^{k-1} = v^k,$$

so wird

$$\begin{pmatrix}\alpha & u^k \\ \beta & v^k\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}u^{k-1} & u^k \\ \beta & v^k\end{pmatrix},$$

welcher Ausdruck nach der zweiten Congruenz eben mit

$$\begin{pmatrix}u^{k-1} & u^k \\ v^{k-1} & v^k\end{pmatrix}$$

congruent wird, wie gezeigt werden sollte. Insbesondere folgt aus der Voraussetzung

$$5)\qquad \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}u^{k-1}\\ v^{k-1}\end{pmatrix},$$

auch

$$\begin{pmatrix}\alpha & u^k\\ \beta & v^k\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}u^{k-1} & u^k\\ v^{k-1} & v^k\end{pmatrix},$$

denn aus 5) ergeben sich die beiden Voraussetzungen 4), während umgekehrt von 4) nicht auf 5) geschlossen werden kann. Aus 4) folgt mithin

$$\begin{pmatrix}\alpha & u^k & u^{k+1} & ..\\ \beta & v^k & v^{k+1} & ..\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}u^{k-1} & u^k & u^{k+1} & ..\\ v^{k-1} & v^k & v^{k+1} & ..\end{pmatrix},$$

welches eben der Satz 2) ist.

Aus diesem letzteren Satze ergiebt sich nun sofort ein Beweis des Stickelberger'schen Satzes. Es seien zunächst (unter u, v jetzt willkürliche Grössen verstanden) die Grössen α, β so gewählt, dass

$$6)\qquad \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}u^1\\ v^1\end{pmatrix}\ ^{1)}$$

wird. Dann ist nach Satz 2)

$$7)\qquad \begin{pmatrix}\alpha & u^2 & u^3 & ..\\ \beta & v^2 & v^3 & ..\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}u^1 & u^2 & u^3 & ..\\ v^1 & v^2 & v^3 & ..\end{pmatrix}.$$

Nun seien α_1, β_1 wieder so gewählt, dass

$$\begin{pmatrix}\alpha & \alpha_1\\ \beta & \beta_1\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}\alpha & u^2\\ \beta & v^2\end{pmatrix}$$

wird. Dann ist nicht allein nach 7)

$$\begin{pmatrix}\alpha & \alpha_1\\ \beta & \beta_1\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}u^1 & u^2\\ v^1 & v^2\end{pmatrix},$$

1) Hierbei hat man unter $\begin{pmatrix}u^1\\ v^1\end{pmatrix}$ die einfach mit u^1, v^1 geränderte Determinante C der c_{ik} zu verstehen, falls dieselbe nicht identisch verschwindet. Im entgegengesetzten Falle muss man C erst mit so vielen Reihen rändern, dass nunmehr $\begin{pmatrix}u^1\\ v^1\end{pmatrix}$ von Null verschieden ist.

sondern auch nach Satz 2)

$$8) \qquad \begin{pmatrix} \alpha & \alpha_1 & u^3 \\ \beta & \beta_1 & v^3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \alpha & u^2 & u^3 \\ \beta & v^2 & v^3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} u^1 & u^2 & u^3 \\ v^1 & v^2 & v^3 \end{pmatrix},$$

und überhaupt

$$9) \quad \begin{pmatrix} \alpha & \alpha_1 & u^3 & u^4 & .. \\ \beta & \beta_1 & v^3 & v^4 & .. \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \alpha & u^2 & u^3 & u^4 & .. \\ \beta & v^2 & v^3 & v^4 & .. \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} u^1 & u^2 & u^3 & u^4 & .. \\ v^1 & v^2 & v^3 & v^4 & .. \end{pmatrix}.$$

Wählt man wieder die α_2, β_2 so, dass

$$\begin{pmatrix} \alpha & \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta & \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \alpha & \alpha_1 & u^3 \\ \beta & \beta_1 & v^3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} u^1 & u^2 & u^3 \\ v^1 & v^2 & v^3 \end{pmatrix}$$

wird, so folgt ganz ebenso nach Satz 2) und 9)

$$\begin{pmatrix} \alpha & \alpha_1 & \alpha_2 & u^4 \\ \beta & \beta_1 & \beta_2 & v^4 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \alpha & \alpha_1 & u^3 & u^4 \\ \beta & \beta_1 & v^3 & v^4 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} u^1 & u^2 & u^3 & u^4 \\ v^1 & v^2 & v^3 & v^4 \end{pmatrix} \text{ u. s. w.}$$

In dieser Weise kann man immer weiter fortfahren und ersieht so unmittelbar (oder auch durch Anwendung des Schlusses von $n-1$ auf n), dass bei Anwendung der im Eingange gegebenen Vorschrift jede mit bestimmten Grössenreihen k-fach geänderte Determinante den Character l_k hat.

Bei diesem Verfahren hat man jedesmal die Grössen α, β so zu bestimmen, dass eine gewisse bilineare Form, welche nicht identisch verschwindet, von Null verschieden bleibt. Es hat keine Schwierigkeit, andere Vorschriften ähnlichen Characters zu bilden. Eine solche erhält man z. B., wenn man den Satz 2), der soeben nur in einer specielleren Form zur Verwendung kam, in seiner allgemeinsten Gestalt benutzt. Man wähle zuerst die α, β, so dass

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ v^1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} u^1 \\ \beta \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} u^1 \\ v^1 \end{pmatrix}$$

ist. Dann wird nach Satz 2)

$$\begin{pmatrix} \alpha & u_2 & u_3 & .. \\ \beta & v_2 & v_3 & .. \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} u^1 & u^2 & u^3 & .. \\ v^1 & v^2 & v^3 & .. \end{pmatrix}.$$

Wählt man wieder die α_1, β_1 so, dass

$$\begin{pmatrix}\alpha & \alpha_1 \\ \beta & v^2\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}\alpha & u^2 \\ \beta & \beta_1\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}\alpha & u^2 \\ \beta & v^2\end{pmatrix}, \text{ also } \equiv \begin{pmatrix}u^1 & u^2 \\ v^1 & v^2\end{pmatrix}$$

wird, so folgt

$$\begin{pmatrix}\alpha & \alpha_1 & u^3 & u^4 & \ldots \\ \beta & \beta_1 & v^3 & v^4 & \ldots\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}\alpha & u^2 & u^3 & u^4 & \ldots \\ \beta & v^2 & v^3 & v^4 & \ldots\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}u^1 & u^2 & u^3 & u^4 & \ldots \\ v^1 & v^2 & v^3 & v^4 & \ldots\end{pmatrix}.$$

Wählt man demnach

$$\begin{pmatrix}\alpha \\ v\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}u \\ \beta\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}u \\ v\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}\alpha & \alpha_1 \\ \beta & v\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\alpha & u \\ \beta & \beta_1\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}\alpha & u \\ \beta & v\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}\alpha & \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta & \beta_1 & v\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\alpha & \alpha_1 & u \\ \beta & \beta_1 & \beta_2\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}\alpha & \alpha_1 & u \\ \beta & \beta_1 & v\end{pmatrix} \text{ etc.,}$$

so wird jede der Determinanten

$$\begin{pmatrix}u \\ v\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\alpha & u \\ \beta & v\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\alpha & \alpha_1 & u \\ \beta & \beta_1 & v\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\alpha & \alpha_1 & \alpha_2 & u \\ \beta & \beta_1 & \beta_2 & v\end{pmatrix}, \ldots$$

der Reihe nach congruent mit

$$\begin{pmatrix}u^1 \\ v^1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}u^1 & u^2 \\ v^1 & v^2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}u^1 & u^2 & u^3 \\ v^1 & v^2 & v^3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}u^1 & u^2 & u^3 & u^4 \\ v^1 & v^2 & v^3 & v^4\end{pmatrix}, \ldots .$$

Herr Stickelberger hat darauf aufmerksam gemacht, dass bei seinem Verfahren die Elemente der Ränder nicht allgemein aus symmetrischen Grössen gebildet werden können, wenn der Character ungeändert bleiben soll. Dagegen lässt sich immer bei dem letzteren Verfahren bewirken, dass jedes System der α dem entsprechenden der β gleich wird. Denn, wenn die bilineare Form

$$\Sigma\, a_{ik}\, u_i\, v_k = a_{uv}$$

nicht identisch Null ist, kann man immer erreichen, dass $a_{u\alpha}$ und $a_{\alpha v}$ beide gleichfalls von Null verschieden sind.

Von den mehrfachen Folgerungen, die mit Hülfe der erwähnten Sätze gezogen werden können, seien nur noch die nachstehenden angeführt. Specialisirt man die Grössen α, β so, dass alle in einer Reihe auftretenden bis auf eine einzige gleich Null gewählt werden, so folgt

1) Ist D_k eine k^{te} Unterdeterminante von C, welche vom Charakter l_k ist, so giebt es auch unter den k_1^{ten} Unterdeterminanten von D_k solche, die vom Character l_{k+k_1} sind.[1])

2) Ist w_k eine Unterdeterminante vom Charakter w_k, w_{k+2} eine ihrer zweiten Unterdeterminanten vom Character l_{k+2}, so ergiebt sich nach der Identität, welche das Product w_k, w_{k+2} durch die Differenz der Producte erster Unterdeterminanten von w_k darstellt,

$$l_k + l_{k+2} \geqq 2\, l_{k+1}$$

oder

$$l_k - l_{k+1} \geqq l_{k+1} - l_{k+2}$$ [2])

3) Bilden die Elemente $c_{ik} = -c_{ki}$ eine schiefe Determinante, so ist der Exponent des $2\,k^{\text{ten}}$ „Elementartheilers“ gleich dem des $2\,k+1^{\text{ten}}$.[3])

---

1) Vgl. Frobenius a. a. O. S. 116.

2) Sind die c_{ik} Functionen eines Parameters r, so ist

$$l_0 > l_1 > l_2 > \ldots$$

Versteht man dagegen unter den c_{ik} ganze Zahlen und unter ξ einen Primzahlmodul, für welchen Fall die Betrachtungen des Textes ebenfalls gültig bleiben, so kann natürlich auch $l_k \geqq l_{k+1}$ werden.

3) Vgl. Frobenius, Theorie der linearen Formen mit ganzen Coefficienten, Journal von Borchardt Bd. 86, S. 167.