Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Classe

der

k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.

Band XX. Jahrgang 1890.

München.
Verlag der K. Akademie.
1891.

In Commission bei G. Franz.

Ueber die interpolatorische Darstellung einer Function durch eine nach Kugelfunctionen fortschreitende Reihe.

Von H. Seeliger.

(Eingelaufen 8. November.)

Mit derselben Allgemeinheit, mit der man eine Function einer Variablen durch eine Reihe darstellen kann, die nach Sinus und Cosinus der Vielfachen der Variablen fortschreitet, kann man bekanntlich eine Function zweier Variablen nach Kugelfunctionen entwickeln. In der Astronomie und Physik tritt nun sehr häufig die Aufgabe auf, aus gegebenen Werthen der unbekannten Function die unbestimmten Constanten der allgemeinen Reihenentwickelung zu berechnen. Im Allgemeinen bleibt nun freilich nichts übrig, als die in linearer Form auftretenden Constanten durch die gewöhnlichen Ausgleichungsmethoden zu berechnen, was bei einigermassen grosser Anzahl derselben stets mit bedeutender Mühe verbunden ist. Wählt man aber, und dies ist in vielen Fällen der Praxis ausführbar, die Werthe, welche den Verlauf der Function angeben, in ganz bestimmter Weise, so lassen sich die genannten mühsamen Rechnungen zum grössten Theil vermeiden. Für eine Function einer Variablen gelangt man bekanntlich zu solch einfachen Rechenvorschriften, wenn man aequidistante Argumentenwerthe zu Grunde legt.

Die für diesen Fall aufgestellten Formeln zu Berechnung der Coefficienten der Sinus- und Cosinusreihen lassen an Einfachheit nichts zu wünschen übrig und geben für diese die besten Werthe im Sinne der Methode der kleinsten Quadrate.

Genau dasselbe gilt nun auch von der Bestimmung der Coefficienten einer nach Kugelfunctionen fortschreitenden Reihe, wenn man die Vorschriften anwendet, welche Fr. Neumann entwickelt hat. Diese schöne und wichtige Methode führt aber geradezu auf ein Minimum von Rechenarbeit, wenn man gewisse Hülfstafeln zur Verfügung hat. Der Nutzen derselben ist in die Augen fallend und ihr Vorhandensein für eine leichte Anwendbarkeit der Neumann'schen Methode sehr wünschenswerth. Ich habe mich deshalb der Berechnung solcher Tabellen unterzogen und theile dieselben im Folgenden mit.

Die Vorschriften Fr. Neumann's selbst hier abzuleiten ist um so weniger nöthig, als dieselben ausser in der Originalabhandlung [1]) erst neuerlich eine sehr durchsichtige und allgemein zugängliche Darstellung [2]) erfahren haben. Ich werde mich deshalb nur auf dasjenige beschränken, was zum Verständniss der Tabellen und zu deren Anwendung erforderlich ist.

Es seien die gegebenen Werthe der Function f auf einer Kugelfläche (etwa der Erde) ausgebreitet. ϑ ($\cos\vartheta = \mu$) sei die Nordpolardistanz, φ die geographische Länge. Setzt man dann:

$$f(\mu, \varphi) = {}_n\sum_0^p Y^n \qquad \text{I)}$$

so handelt es sich um die Bestimmung der Coefficienten der Kugelfunction Y^n vom Grade n. Man hat aber allgemein

$$Y^n(\mu, \varphi) = {}_i\sum_0^n (A_{ni} \cos i\varphi + B_{ni} \sin i\varphi)\, P_{ni}(\mu)$$

1) Fr. Neumann. Astronom. Nachr. Band 15, pag. 313 etc.

2) Vorlesungen über die Theorie des Potentiales etc. von Fr. Neumann, herausgegeben von C. Neumann. Leipzig 1887. pg. 131 ff.

worin die A und B die $2n+1$ willkürlichen also jetzt zu bestimmenden Constanten sind und

$$P_{ni}(\mu) = (1-\mu^2)^{\frac{i}{2}} \frac{d^i P^n(\mu)}{d\mu^i}$$

wenn P^n die Laplace-Legendre'sche Kugelfunction n^{ten} Grades von einer Variablen ist.

Die Fr. Neumann'sche Methode schreibt nun vor: Gegeben seien die $2p(p+1)$ Functionswerthe:

$$\begin{array}{llll}
f(\mu_1, 0), & f\left(\mu_1, \frac{\pi}{p}\right) & \cdots & f\left(\mu_1, (2p-1)\frac{\pi}{p}\right) \\
f(\mu_2, 0), & f\left(\mu_2, \frac{\pi}{p}\right) & \cdots & f\left(\mu_2, (2p-1)\frac{\pi}{p}\right) \\
- & - & - & - \\
f(\mu_{p+1}, 0), & f\left(\mu_{p+1}, \frac{\pi}{p}\right) & \cdots & f\left(\mu_{p+1}, (2p-1)\frac{\pi}{p}\right)
\end{array}$$

worin $\mu_1 \cdots \mu_{p+1}$ die $p+1$ Wurzeln der Gleichung

$$P^{p+1}(\mu) = 0$$

sind.

Man bestimmt nun zunächst für jedes

$$\lambda = 1, 2, \cdots p+1$$

und

$$i = 0, 1, 2 \cdots p$$

die Grössen C und S durch

$$\text{II)} \quad \left\{ \begin{aligned}
\varepsilon_i \, p \, C_i(\mu_\lambda) &= \sum_{\nu=0}^{2p-1} f\left(\mu_\lambda, \nu\frac{\pi}{p}\right) \cos\nu\frac{i\pi}{p} \\
p \, S_i(\mu_\lambda) &= \sum_{\nu=0}^{2p-1} f\left(\mu_\lambda, \nu\frac{\pi}{p}\right) \sin\nu\frac{i\pi}{p}
\end{aligned} \right.$$

worin $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \ldots \varepsilon_{p-1} = 1$; $\varepsilon_0 = \varepsilon_p = 2$

Hieraus ergiebt sich:

$$1) \left\{ \begin{aligned}
A_{ni} &= \frac{2n+1}{2} \frac{\Pi(n-i)}{\Pi(n+i)} \sum_{\lambda=1}^{p+1} a_\lambda P_{ni}(\mu_\lambda) C_i(\mu_\lambda) \\
B_{ni} &= \frac{2n+1}{2} \frac{\Pi(n-i)}{\Pi(n+i)} \sum_{\lambda=1}^{p+1} a_\lambda P_{ni}(\mu_\lambda) S_i(\mu_\lambda)
\end{aligned} \right.$$

Hierin bedeutet $\Pi(\lambda) = 1 \cdot 2 \ldots \lambda$ und die Zahlen a ergeben sich durch die Auflösung des Systemes linearer Gleichungen:

$$
2) \quad \begin{gathered} a_1 \mu_1^\lambda + a_2 \mu_2^\lambda + \cdots + a_{p+1} \mu_{p+1}^\lambda = \alpha_\lambda \\ \lambda = 0, 1, \cdots p\,; \; \alpha_\lambda = \int_{-1}^{+1} x^\lambda \, dx \end{gathered}
$$

Setzt man aber

$$
\mathfrak{A}_{ni}(\mu_\lambda) = \frac{2n+1}{2} \frac{\Pi(n-i)}{\Pi(n+i)} a_\lambda P_{ni}(\mu_\lambda)
$$

so wird einfach

$$
\text{III)} \quad \left\{ \begin{aligned} A_{ni} &= \sum_{\lambda=1}^{p+1} \mathfrak{A}_{ni}(\mu_\lambda) \quad C_i(\mu_\lambda) \\ B_{ni} &= \sum_{\lambda=1}^{p+1} \mathfrak{A}_{ni}(\mu_\lambda) \quad S_i(\mu_\lambda) \end{aligned} \right.
$$

Man kann nun die Zahlen $\mathfrak{A}_{ni}$ ein für alle Mal für bestimmte Werthe von p berechnen und in einfachen und wenig umfangreichen Tabellen unterbringen. Dann ist die Berechnung der gesuchten A und B durch die höchst einfachen Formeln II) und III) gegeben. Solche Tabellen enthält nun das Folgende und zwar bis $p + 1 = 7$, welche Grenze auch in der Gauss'schen Abhandlung: Methodus nova integralium valores per approximationem inveniendi 1814 (Werke Band III) eingehalten ist. Diese wunderbare Arbeit enthält bis $p + 1 = 7$ nicht nur die numerischen Werthe der Wurzeln der Gleichung

$$
P^{p+1}(\mu) = 0
$$

sondern auch die Grössen a. Es ist nämlich

$$
\begin{aligned} \mu &= 2\,a\,(\text{Gauss}) - 1 \\ a &= 2\,R\,(\text{Gauss}) \end{aligned}
$$

Um die letztere Beziehung, die nicht unmittelbar einleuchtend ist, einzusehen, braucht nur daran erinnert zu werden, dass die Gauss'sche Abhandlung unser a_1 so definirt:

$$a_1 = \left(\frac{x-\mu_1}{P^{p+1}(x)}\right)_{x=\mu_1} \cdot \int_{-1}^{+1} \frac{P^{p+1}(x)}{x-\mu_1}\,dx$$

Man kann nun leicht zeigen, dass die directe Auflösung des Systemes 2) auf dieselbe Form führt. Setzt man nämlich

$$\varDelta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \mu_1 & \mu_2 & \dots & \mu_{p+1} \\ \mu_1^2 & \mu_2^2 & \dots & \mu_{p+1}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mu_1^p & \mu_2^p & \dots & \mu_{p+1}^p \end{vmatrix}$$

und bezeichnet man die auftretenden Partialdeterminanten mit δ, so hat man

$$3) \qquad \begin{aligned} \varDelta &= \delta_0 + \mu_1 \delta_1 + \mu_1^2 \delta_2 + \cdots + \mu_1^p \delta_p \\ &= (\mu_2 - \mu_1)(\mu_3 - \mu_1) \cdots (\mu_{p+1} - \mu_1) \\ &\qquad\qquad (\mu_3 - \mu_2) \cdots (\mu_{p+1} - \mu_2) \\ &\qquad\qquad\quad - \quad - \quad - \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad (\mu_{p+1} - \mu_p) \end{aligned}$$

Die Auflösung von 2) giebt aber:

$$4) \qquad \varDelta\, a_1 = \alpha_0 \delta_0 + \alpha_1 \delta_1 + \cdot + \alpha_p \delta_p$$

Bezeichnet man den von μ_1 freien Theil von $\varDelta$ mit C so ist nach 3)

$$\varDelta = C(\mu_2 - \mu_1)(\mu_3 - \mu_1) \cdots (\mu_{p+1} - \mu_1)$$

Weiter ist, weil $\mu_1 \cdots \mu_{p+1}$ Wurzeln von $P^{p+1}(\mu) = 0$ sind

$$P^{p+1}(x) = \varepsilon\,(x-\mu_1)(x-\mu_2) \cdots (x - \mu_{p+1})$$

wo ε der Zahlencoefficient des Gliedes x^{p+1} in dem Ausdrucke der Kugelfunction ist. Man kann hiernach schreiben

$$\varDelta\,\varepsilon = (-1)^p \cdot C \left(\frac{P^{p+1}(x)}{x-\mu_1}\right)_{x-\mu_1}$$

Nun ist $\dfrac{P^{p+1}(x)}{x-\mu_1}$ eine ganze Function vom Grade p d. h.

$$5) \qquad \frac{P^{p+1}(x)}{x-\mu_1} = \beta_0 + \beta_1 x + \cdots + \beta_p x^p$$

Hieraus ergiebt sich zunächst:

$$\Delta = (-1)^p \frac{C}{\varepsilon} (\beta_0 + \beta_1 \mu_1 + \cdots + \beta_p \mu_1^p)$$

und dann durch Vergleichung mit 3)

$$\delta_i = (-1)^p \cdot \frac{C}{\varepsilon} \beta_i$$

Durch Einsetzen in 4) ergiebt sich:

$$\Delta a_1 = (-1)^p \frac{C}{\varepsilon} (\alpha_0 \beta_0 + \alpha_1 \beta_1 + \cdots + \alpha_p \beta_p)$$

was man aber mit Hülfe der obigen Gleichungen und der in 2) gegebenen Definition von α_λ schreiben kann:

$$a_1 = \left(\frac{x - \mu_1}{P^{p+1}(x)}\right)_{x = \mu_1} \cdot \int_{-1}^{+1} \frac{P^{p+1}(x)}{x - \mu_1} \, dx$$

welches der von Gauss benutzte Ausdruck ist.

Sind die Coefficienten A und B bekannt, so kann man die Function f in der expliciten Form aufstellen:

$$\left.\begin{aligned} f(\mu, \varphi) = & (P_{00} A_{00} + P_{10} A_{10} + \cdots + P_{p0} A_{p0}) \\ & + (P_{11} A_{11} + P_{21} A_{21} + \cdots + P_{p1} A_{p1}) \cos \varphi \\ & + (P_{11} B_{11} + P_{21} B_{21} + \cdots + P_{p1} B_{p1}) \sin \varphi \\ & + (P_{22} A_{22} + P_{32} A_{32} + \cdots + P_{p2} A_{p2}) \cos 2\varphi \\ & + (P_{22} B_{22} + P_{32} B_{32} + \cdots + P_{p2} B_{p2}) \sin 2\varphi \\ & - \quad - \quad - \quad - \quad - \\ & + P_{pp} A_{pp} \cos p \varphi \end{aligned}\right\}$$

Die einzelnen P_{ni} sind mit der bei wirklicher Anwendung erforderlichen Ausführlichkeit in Tabelle 1 zusammengestellt.

Zur Erklärung der nun folgenden Tabellen ist dem Mitgetheilten nur wenig hinzuzufügen. Da die $\mathfrak{A}_{ni}$ stets kleiner als 1 sind, so ist in den Logarithmen die Kennziffer -10 fortgeblieben. Die Tafeln selbst habe ich mit wesentlicher Beihülfe des Herrn Dr. Anding strenge siebenstellig berechnet und dann auf 6 Stellen abgekürzt, so dass die letzte Stelle in den Logarithmen im Allgemeinen bis auf 1 oder 2 Einheiten richtig sein wird, was für die meisten praktischen Anwendungen genügen dürfte. Die Rechnungen wurden zwar nur einmal ausgeführt, ihre Richtigkeit ist aber durch mehrere sehr durchgreifende Controlen wahrscheinlich sicherer geprüft, als durch eine Neurechnung.

Solcher Controlgleichungen lassen sich natürlich mit Hülfe der bekannten Relationen zwischen Kugelfunctionen sehr viele ableiten. Als besonders geeignet im vorliegenden Falle wurden aber gefunden

$$\sum_i \mathfrak{A}_{ni} P_{ni} = 1$$

und

$$a = \frac{2}{2n+1} \sum_{i=0}^{n} \frac{\Pi(n+i)}{\Pi(i)\,\Pi(n-i)} \cdot \mathrm{tg}^{i} \frac{\vartheta}{2} \cdot \mathfrak{A}_{ni}$$

weil bei passender Anwendung sich diese beiden Formeln in der sicheren Prüfung der berechneten Zahlen auf das Beste ergänzen.

Tabelle 1.

$$x = \cos\vartheta \qquad P_{ni}(+x) = \sin^i\vartheta\, P_i^n(x)$$

$$P_i^n(x) = \frac{d^i P^n(x)}{dx^i} \qquad P_{ni}(-x) = (-1)^{n-i} \cdot P_{ni}(x)$$

$P^0(x) = 1$

$P_0^1(x) = x$	$P_0^2(x) = 1.5\,x^2 - 0.5$	$P_0^3(x) = x(-1.5 + 2.5\,x^2)$	$P_0^4(x) = 0.375 - 3.75\,x^2 + 4.375\,x^4$
$P_1^1(x) = 1$	$P_1^2(x) = 3\,x$	$P_1^3(x) = -1.5 + 7.5\,x^2$	$P_1^4(x) = x(-7.5 + 17.5\,x^2)$
	$P_2^2(x) = 3$	$P_2^3(x) = 15\,x$	$P_2^4(x) = -7.5 + 52.5\,x^2$
		$P_3^3(x) = 15$	$P_3^4(x) = 105\,x$
			$P_4^4(x) = 105$

$P_0^5(x) = x(1.875 - 8.75\,x^2 + 7.875\,x^4)$	$P_0^6(x) = -0.3125 + 6.5625\,x^2 - 19.6875\,x^4 + 14.4375\,x^6$
$P_1^5(x) = 1.875 - 26.25\,x^2 + 39.375\,x^4$	$P_1^6(x) = x(13.125 - 78.75\,x^2 + 86.625\,x^4)$
$P_2^5(x) = x(-52.5 + 157.5\,x^2)$	$P_2^6(x) = 13.125 - 236.25\,x^2 + 433.125\,x^4$
$P_3^5(x) = -52.5 + 472.5\,x^2$	$P_3^6(x) = x(-472.5 + 1732.5\,x^2)$
$P_4^5(x) = 945\,x$	$P_4^6(x) = -472.5 + 5197.5\,x^2$
$P_5^5(x) = 945$	$P_5^6(x) = 10395\,x$
	$P_6^6(x) = 10395$

Tabelle 2.

$p + 1 = 3$

$\log \mathfrak{A}_{ni}$

n	i	μ_1	μ_2	μ_3
0	0	9.443698	9.647818	9.443698
1	0	9.809894$_n$	$-\infty$	9.809894
1	1	9.420819	9.823909	9.420819
2	0	9.744728	0.045758$_n$	9.744728
2	1	9.531743$_n$	$-\infty$	9.531743
2	2	8.841638	9.443698	8.841638

num. $\mathfrak{A}_{ni}$

n	i	μ_1	μ_2	μ_3
0	0	0.277778	0.444444	0.277778
1	0	$-$ 0.645497	0	0.645497
1	1	0.263523	0.666667	0.263523
2	0	0.555556	$-$ 1.111111	0.555556
2	1	$-$ 0.340207	0	0.340207
2	2	0.069444	0.277778	0.069444

	a	$\log a$	$\log \mu$	ϑ
1	0.555556	9.744728	9.889076$_n$	140° 46′ 6″.5
2	0.888889	9.948847	$-\infty$	90
3	0.555556	9.744728	9.889076	39 13 53.5

Tabelle 3.

$p + 1 = 4$

$\log \mathfrak{A}_{ni}$

n	i	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4
0	0	9.240368	9.513314	9.513314	9.240368
1	0	9.652561$_n$	9.521890$_n$	9.521890	9.652561
1	1	9.122643	9.662733	9.662733	9.122643
2	0	9.726326	9.726326$_n$	9.726326$_n$	9.726326
2	1	9.279563$_n$	9.416037$_n$	9.416037	9.279563
2	2	8.448615	9.255849	9.255849	8.448615
3	0	9.569405$_n$	9.973023	9.973023$_n$	9.569405
3	1	9.321173	9.054029$_n$	9.054029$_n$	9.321173
3	2	8.529815$_n$	8.933432$_n$	8.933432	8.529815
3	3	7.522775	8.597154	8.597154	7.522775

num. $\mathfrak{A}_{ni}$

n	i	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4
0	0	0.173927	0.326073	0.326078	0.173927
1	0	— 0.449326	— 0.332576	0.332576	0.449326
1	1	0.132630	0.459974	0.459974	0.132630
2	0	0.532508	— 0.532508	— 0.532508	0.532508
2	1	— 0.190355	— 0.260637	0.260637	0.190355
2	2	0.028094	0.180239	0.180239	0.028094
3	0	— 0.371027	0.939772	— 0.939772	0.371027
3	1	0.209495	— 0.113247	— 0.113247	0.209495
3	2	— 0.033870	— 0.085789	0.085789	0.033870
3	3	0.003333	0.039551	0.039551	0.003333

	$\log a$	$\log \mu$	ϑ
1	9.541398	9.935072$_n$	149° 26′ 39″.8
2	9.814344	9.531455$_n$	109 52 32.6
3	9.814344	9.531455	70 7 27.4
4	9.541398	9.935072	30 33 20.2

Tabelle 4.

$p + 1 = 5$

log $\mathfrak{A}_{ni}$

n	i	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	μ_5
0	0	9.073584	9.378969	9.453998	9.378969	9.073584
1	0	9.507920$_n$	9.587251$_n$	$-\infty$	9.587251	9.507920
1	1	8.875906	9.480705	9.630089	9.480705	8.875906
2	0	9.636913	8.891361$_n$	9.851938$_n$	8.891361$_n$	9.636913
2	1	9.054969$_n$	9.433714$_n$	$-\infty$	9.433714	9.054969
2	2	8.121924	9.026138	9.249878	9.026138	8.121924
3	0	9.618547$_n$	9.844601	$-\infty$	9.844601$_n$	9.618547
3	1	9.133997	8.899589	9.396006$_n$	8.899589	9.133997
3	2	8.225267$_n$	8.903427$_n$	$-\infty$	8.903427	8.225267
3	3	7.116131	8.319760	8.617854	8.319760	7.116131
4	0	9.418295	9 870401$_n$	9.982271	9.870401$_n$	9.418295
4	1	9.147219$_n$	9.073858	$-\infty$	9.073858$_n$	9.147219
4	2	8.275569	8.515947	8.726999$_n$	8.515947	8.275569
4	3	7.182490$_n$	8.160065$_n$	$-\infty$	8.160065	7.182490
4	4	5.948416	7.451459	7.823909	7.451459	5.948416

num. $\mathfrak{A}_{n\,i}$

n	i	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	μ_5
0	0	0.118463	0.239314	0.284444	0.239314	0.118463
1	0	−0.322048	−0.386590	0	0.386590	0.322048
1	1	0.075146	0.302486	0.426667	0.302486	0.075146
2	0	0.433424	−0.077868	−0.711111	−0.077868	0.433424
2	1	−0.113493	−0.271465	0	0.271465	0.113493
2	2	0.013241	0.106203	0.177778	0.106203	0.013241
3	0	−0.415477	0.699199	0	−0.699199	0.415477
3	1	0.136144	0.079358	−0.248889	0.079358	0.136144
3	2	−0.016798	−0.080062	0	0.080062	0.016798
3	3	0.001307	0.020881	0.041481	0.020881	0.001307
4	0	0.261997	−0.741996	0.960000	−0.741996	0.261997
4	1	−0.140352	0.118538	0	−0.118538	0.140352
4	2	0.018861	0.032806	−0.053333	0.032806	0.018861
4	3	−0.001522	−0.014457	0	0.014457	0.001522
4	4	0.000089	0.002828	0.006667	0.002828	0.000089

Logarithmen

				ϑ
α_1	9.374614	μ_1	9.957214_n	154° 58′ 57″6
α_2	9.679999	μ_2	9.731161_n	122 34 46.2
α_3	9.755027	μ_3	$-\infty$	90
α_4	9.679999	μ_4	9.731161	57 25 13.8
α_5	9.374614	μ_5	9.957214	25 1 2.4

Tabelle 5.

$p + 1 = 6$ $\log \mathfrak{A}_{n\,i}$

n	i	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	μ_5	μ_6
0	0	8.932790	9.256190	9.369136	9.369136	9.256190	8.932790
1	0	9.379546$_n$	9.553651$_n$	9.223963$_n$	9.223963	9.553651	9.379546
1	1	8.666687	9.307460	9.532497	9.532497	9.307460	8.666687
2	0	9.537150	9.147719	9.685726$_n$	9.685726$_n$	9.147719	9.537150
2	1	8.858170$_n$	9.349647$_n$	9.132051$_n$	9.132051	9.349647	8.858170
2	2	7.844282	8.802426	9.139556	9.139556	8.802426	7.844282
3	0	9.576020$_n$	9.531227	9.724728	9.724728$_n$	9.531227$_n$	9.576020
3	1	8.957324	9.147457	9.152905$_n$	9.152905$_n$	9.147457	8.957324
3	2	7.960044$_n$	8.768893$_n$	8.663389$_n$	8.663389	8.768893	7.960044
3	3	6.770064	8.045581	8.494802	8.494802	8.045581	6.770064
4	0	9.512349	9.842126$_n$	9.568057	9.568057	9.842126$_n$	9.512349
4	1	9.000848$_n$	7.783788$_n$	9.200475	9.200475$_n$	7.783788	9.000848
4	2	8.027822	8.593496	8.395859$_n$	8.395859$_n$	8.593496	8.027822
4	3	6.848843$_n$	7.975064$_n$	7.981652$_n$	7.981652	7.975064	6.848843
4	4	5.533925	7.126813	7.688127	7.688127	7.126813	5.533925
5	0	9.287441$_n$	9.766515	9.935079$_n$	9.935079	9.766515$_n$	9.287441
5	1	9.000301	9.012706$_n$	8.626545	8.626545	9.012706$_n$	9.000301
5	2	8.061730$_n$	8.157746$_n$	8.477304	8.477304$_n$	8.157746	8.061730
5	3	6.897404	7.806361	7.476025$_n$	7.476025$_n$	7.806361	6.897404
5	4	5.590711$_n$	7.034302$_n$	7.152982$_n$	7.152982	7.034302	5.590711
5	5	4.178882	6.089141	6.762547	6.762547	6.089141	4.178882

num. $\mathfrak{A}_{n\,i}$

n	i	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	μ_5	μ_6
0	0	0.085662	0.180381	0.233957	0.233957	0.180381	0.085662
1	0	−0.239632	−0.357808	−0.167480	0.167480	0.357808	0.239632
1	1	0.046418	0.202983	0.340798	0.340798	0.202983	0.046418
2	0	0.344469	0.140514	−0.484983	−0.484983	0.140514	0.344469
2	1	−0.072139	−0.223690	−0.135535	0.135535	0.223690	0.072139
2	2	0.006987	0.063449	0.137897	0.137897	0.063449	0.006987
3	0	−0.376721	0.339803	0.530552	−0.530552	−0.339803	0.376721
3	1	0.090641	0.140429	−0.142202	−0.142202	0.140429	0.090641
3	2	−0.009121	−0.058734	−0.046067	0.046067	0.058734	0.009121
3	3	0.000589	0.011107	0.031247	0.031247	0.011107	0.000589
4	0	0.325349	−0.695226	0.369877	0.369877	−0.695226	0.325349
4	1	−0.100196	−0.006078	0.158663	−0.158663	0.006078	0.100196
4	2	0.010662	0.039219	−0.024881	−0.024881	0.039219	0.010662
4	3	−0.000706	−0.009442	−0.009586	0.009586	0.009442	0.000706
4	4	0.000034	0.001339	0.004877	0.004877	0.001339	0.000034
5	0	−0.193839	0.584137	−0.861151	0.861151	−0.584137	0.193839
5	1	0.100069	−0.102969	0.042320	0.042320	−0.102969	0.100069
5	2	−0.011527	−0.014380	0.030013	−0.030013	0.014380	0.011527
5	3	0.000790	0.006403	−0.002992	−0.002992	0.006403	0.000790
5	4	−0.000039	−0.001082	−0.001422	0.001422	0.001082	0.000039
5	5	0.000002	0.000123	0.000579	0.000579	0.000123	0.000002

Logarithmen

a_1	9.233819	μ_1	9.969635$_n$	$\vartheta_1 =$	$158^0\ 49'\ 23.2$
a_2	9.557220	μ_2	9.820339$_n$	$\vartheta_2 =$	131 23 31.8
a_3	9.670166	μ_3	9.377705$_n$	$\vartheta_3 =$	103 48 18.2
a_4	9.670166	μ_4	9.377705	$\vartheta_4 =$	76 11 41.8
a_5	9.557220	μ_5	9.820339	$\vartheta_5 =$	48 36 28.2
a_6	9.233819	μ_6	9.969635	$\vartheta_6 =$	21 10 36.8

Tabelle 6.

$p + 1 = 7$

$\log \mathfrak{A}_{n\,i}$

n	i	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	μ_5	μ_6	μ_7
0	0	8.811189	9.145671	9.280840	9.320104	9.280840	9.145671	8.811189
1	0	9.265626$_n$	9.492922$_n$	9.366322$_n$	$-\infty$	9.366322	9.492922	9.265626
1	1	8.485524	9.148432	9.417850	9.496195	9.417850	9.148432	8.485524
2	0	9.440196	9.356260	9.382818$_n$	9.718044$_n$	9.382818$_n$	9.356260	9.440196
2	1	8.684688$_n$	9.240410$_n$	9.248059$_n$	$-\infty$	9.248059	9.240410	8.684688
2	2	7.603556	8.594890	8.998557	9.115984	8.998557	8.594890	7.603556
3	0	9.509829$_n$	8.958949	9.771017	$-\infty$	9.771017$_n$	8.958949$_n$	9.509829
3	1	8.796008	9.157223	8.430385$_n$	9.262112$_n$	8.430385$_n$	9.157223	8.796008
3	2	7.726999$_n$	8.611148$_n$	8.753046$_n$	$-\infty$	8.753046	8.611148	7.726999
3	3	6.469776	7.789537	8.327453	8.483961	8.327453	7.789537	6.469776
4	0	9.503480	9.661256$_n$	9.328407$_n$	9.848378	9.328407$_n$	9.661256$_n$	9.503480
4	1	8.857156$_n$	8.822571$_n$	9.167745	$-\infty$	9.167745$_n$	8.822571	8.857156
4	2	7.805415	8.526716	7.660290	8.593105$_n$	7.660290	8.526716	7.805415
4	3	6.556236$_n$	7.768811$_n$	8.044958$_n$	$-\infty$	8.044958	7.768811	6.556236
4	4	5.174073	6.822261	7.494426	7.690015	7.494426	6.822261	5.174073
5	0	9.413240$_n$	9.801721	9.741786$_n$	$-\infty$	9.741786	9.801721$_n$	9.413240
5	1	8.881441	8.352059$_n$	8.946042$_n$	9.157377	8.946042$_n$	8.352059$_n$	8.881441
5	2	7.853330$_n$	8.319062$_n$	8.352349	$-\infty$	8.352349$_n$	8.319062	7.853330
5	3	6.614682	7.679208	7.304058	7.777165$_n$	7.304058	7.679208	6.614682
5	4	5.238539$_n$	6.779541$_n$	7.189936$_n$	$-\infty$	7.189936	6.779541	5.238539
5	5	3.759466	5.736081	6 542494	6.777165	6.542494	5.736081	3.759466
6	0	9.172685	9.668350$_n$	9.870184	9.928897$_n$	9.870184	9.668350$_n$	9.172685
6	1	8.873604$_n$	8.933660	8.739475$_n$	$-\infty$	8.739475	8.933660$_n$	8.873604
6	2	7.877494	7.839205	8.238596$_n$	8.326837	8.238596$_n$	7.839205	7.877494
6	3	6.652253$_n$	7.509515$_n$	7.376453	$-\infty$	7.376453$_n$	7.509515	6.652253
6	4	5.283596	6.685129	6.563583	6.849716$_n$	6.563583	6.685129	5.283596
6	5	3.809333$_n$	5.678761$_n$	6.223405$_n$	$-\infty$	6.223405	5.678761	3.809333
6	6	2.251079	4.556120	5.496782	5.770585	5.496782	4.556120	2.251079

num. $\mathfrak{A}_{n\,i}$

n	i	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	μ_5	μ_6	μ_7
0	0	0.064742	0.139853	0.190915	0.208980	0.190915	0.139853	0.064742
1	0	−0.184343	−0.311115	−0.232446	0	0.232446	0.311115	0.184343
1	1	0.030586	0.140745	0.261728	0.313469	0.261728	0.140745	0.030586
2	0	0.275547	0.227123	−0.241445	−0.522449	−0.241445	0.227123	0.275547
2	1	−0.048382	−0.173944	−0.177035	0	0.177035	0.173944	0.048382
2	2	0.004014	0.039345	0.099668	0.130612	0.099668	0.039345	0.004014
3	0	−0.323466	0.090981	0.590224	0	−0.590224	−0.090981	0.323466
3	1	0.062518	0.143623	−0.026939	−0.182857	−0.026939	0.143623	0.062518
3	2	−0.005333	−0.040846	−0.056630	0	0.056630	0.040846	0.005338
3	3	0.000295	0.006159	0.021255	0.030476	0.021255	0.006159	0.000295
4	0	0.318772	−0.458412	−0.213013	0.705306	−0.213013	−0.458412	0.318772
4	1	−0.071971	−0.066462	0.147145	0	−0.147145	0.066462	0.071971
4	2	0.006389	0.033629	0.004574	−0.039184	0.004574	0.033629	0.006389
4	3	−0.000360	−0.005872	−0.011091	0	0.011091	0.005872	0.000360
4	4	0.000015	0.000664	0.003122	0.004898	0.003122	0.000664	0.000015
5	0	−0.258964	0.633463	−0.551805	0	0.551805	−0.633463	0.258964
5	1	0.076110	−0.022494	−0.088316	0.143673	−0.088316	−0.022494	0.076110
5	2	−0.007134	−0.020848	0.022509	0	−0.022509	0.020848	0.007134
5	3	0.000412	0.004778	0.002014	−0.005986	0.002014	0.004778	0.000412
5	4	−0.000017	−0.000602	−0.001549	0	0.001549	0.000602	0.000017
5	5	0.000001	0.000054	0.000349	0.000599	0.000349	0.000054	0.000001
6	0	0.148828	−0.465962	0.741624	−0.848980	0.741624	−0.465962	0.148828
6	1	−0.074749	0.085834	−0.054888	0	0.054888	−0.085834	0.074749
6	2	0.007542	0.006906	−0.017322	0.021224	−0.017322	0.006906	0.007542
6	3	−0.000449	0.003232	0.002379	0	−0.002379	0.003232	0.000449
6	4	0.000019	0.000484	0.000366	−0.000707	0.000366	0.000484	0.000019
6	5	−0.000001	−0.000048	−0.000167	0	0.000167	0.000048	0.000001
6	6	0	0.000004	0.000031	0.000059	0.000031	0.000004	0

Logarithmen

α_1	9.112219	μ_1	9.977316_n	$\vartheta_1 =$	$161^\circ\ 38'\ 31''.7$
α_2	9.446701	μ_2	9.870129_n	$\vartheta_2 =$	137 51 43.2
α_3	9.581870	μ_3	9.608360_n	$\vartheta_3 =$	113 56 38.8
α_4	9.621134	μ_4	$-\infty$	$\vartheta_4 =$	90
α_5	9.581870	μ_5	9.608360	$\vartheta_5 =$	66 3 21.2
α_6	9.446701	μ_6	9.870129	$\vartheta_6 =$	42 8 16.8
α_7	9.112219	μ_7	9.977316	$\vartheta_7 =$	18 21 28.3