Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Classe

der

k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.

Band XXII. Jahrgang 1892.

München.
Verlag der K. Akademie.
1893.

In Commission bei G. Franz.

Ueber die Bestimmung einer Fläche durch geodätische Messungen.

Von J. Lüroth in Freiburg i. Br.

(Eingelaufen 5. März.)

§ 1. Eine Betrachtung, die sich an die Berechnung einer Landesvermessung anschliesst und von der unten in § 16 noch weiter die Rede sein wird, legte mir die Behandlung der folgenden Aufgabe nahe.

Gegeben sind zwei stetige Flächenstücke F und F'. Durch jeden ihrer Punkte sei eine Linie, die Lothlinie des fraglichen Punktes gezogen. Der Punkt, zu dem die Lothlinie gehört, heisse der Fusspunkt der Lothlinie. Eine Ebene durch die Lothlinie eines Punktes werde Verticalebene dieses Punktes genannt.

Keine Lothlinie, weder von F noch von F' liege in der betreffenden Fläche. Die Richtung der Lothlinien von F und F' ändere sich stetig mit dem Fusspunkt.

Es sei weiter eine Abbildung $\mathfrak{A}$ gegeben, welche die Fläche F auf die F' so abbildet, dass deren Punkte sich gegenseitig eindeutig entsprechen. Damit ist dann auch ein Entsprechen der Lothlinien gegeben, indem zwei Lothlinien entsprechend heissen sollen, wenn ihre Fusspunkte durch $\mathfrak{A}$ sich zugeordnet sind.

Sind nun $A\,B\,C\,D\,E\ldots$ Punkte von F, $A'\,B'\,C'\,D'\,E'\ldots$ die entsprechenden Punkte von F', ist a die Lothlinie in A, a' die in A', so soll endlich $\mathfrak{A}$ so beschaffen sein, dass die beiden Ebenenbüschel $a\,(B\,C\,D\,E\ldots)$ und $a'\,(B'\,C'\,D'\,E'\ldots)$ projectiv sind.

Die Beziehung

$$a\,(B\,C\,D\,E\ldots)\,\barwedge\,a'\,(B'\,C'\,D'\,E'\ldots)$$

soll gelten, wo auch die Punkte $A\;B\;C\;D\ldots$ auf F gelegen sein mögen.

Es soll die Natur der Abbildung $\mathfrak{A}$ bestimmt werden.

§ 2. Aus der projectiven Beziehung folgt sofort, dass wenn die Ebenen $a\,B$ und $a\,C$ zusammenfallen, auch die $a'\,B'$ und $a'\,C'$ identisch sein müssen und umgekehrt; also entsprechen Punkte von F, die irgend einer Verticalebene angehören, Punkten einer Verticalebene von F'. Vermöge $\mathfrak{A}$ kann in Folge dessen jetzt auch jeder Ebene ε, die in einem Punkte A von F Verticalebene ist, eine andere Ebene zugeordnet werden. Denn ist B ein Punkt der Schnittcurve von F und ε, entsprechen den Punkten A, B und der Lothlinie a in A, die Punkte A', B' und die Lothlinie a' in A', so kann man die Verticalebene $a'\,B'$ der $a\,B$ entsprechen lassen. Und diese Art der Zuordnung ist dann, dem eben gefundenen Resultate gemäss, nicht abhängig von der Wahl des Punktes B auf der Schnittcurve von ε mit F.

Gesetzt, es seien A und B zwei Punkte von F, deren Lothlinien a und b sich schneiden, sei es in einem endlichen oder in einem unendlich fernen Punkt. Sei C ein anderer Punkt von F in der Ebene $a\,b$. Weil B und C einer Verticalebene von A angehören, liegen B' und C' in einer Ebene durch a'. Und weil A und C auf einer Ebene durch b sich befinden, liegen A' und C' auf einer Ebene durch b'. Die drei Punkte $A'\,B'\,C'$ gehören folglich einer Ebene durch a' und einer durch b' an; liegen also $A'\,B'\,C'$ nicht in einer geraden Linie, so müssen jene beiden Ebenen zusammenfallen, also a' und b' sich schneiden. Nehmen wir daher an, dass weder F noch F' gerade Linien enthalten, so folgt, dass wenn zwei Lothlinien von F sich schneiden, auch die entsprechenden von F' sich treffen.

§ 3. Für die weitere Untersuchung hat man nun verschiedene Fälle zu unterscheiden.

Es ist erstens möglich, dass je zwei Lothlinien von F, und damit auch die von F', sich schneiden. Dann liegen die sämmtlichen Lothlinien von F entweder in einer Ebene oder sie gehen durch einen Punkt. Der erste Fall ist ausgeschlossen, weil er nur stattfinden könnte, wenn F selbst eine Ebene wäre, die die sämmtlichen Lothlinien enthielte, gegen unsere Voraussetzung, dass diese nicht in F liegen liegen sollen. Somit müssen alle Lothlinien von F durch einen Punkt A gehen und die von F' müssen durch einen Punkt A' gehen. A sei der eine Eckpunkt $x_1 = 0$ $x_2 = 0$ $x_3 = 0$ eines homogenen Tetraedercoordinatensystems; die Kanten $x_1 = 0$ $x_2 = 0$, $x_1 = 0$ $x_3 = 0$, $x_2 = 0$ $x_3 = 0$ mögen die Lothlinien der drei Punkte $C\,B\,A$ von F sein. Entsprechende Festsetzungen seien für F' getroffen, indem die Coordinaten mit $x'_1\,x'_2\,x'_3\,x'_4$ bezeichnet seien. Weil die beiden Büschel, deren Axen die Lothlinien $C\,A$ und $C'\,A'$ sind, projectiv bezogen sind, sind die Gleichungen von zwei sich entsprechenden Ebenen dieser Büschel

$$x_2 = \lambda\, x_1 \quad \text{und} \quad x'_2 = c\,\lambda\, x_1$$

Für einen Punkt von F und den entsprechenden von F' muss also

$$\frac{x'_2}{x'_1} = c\,\frac{x_2}{x_1}$$

sein. Ebenso findet man für jene Punkte die Gleichungen

$$\frac{x'_3}{x'_2} = a\,\frac{x_3}{x_2} \qquad \frac{x'_3}{x'_1} = b\,\frac{x_3}{x_2}$$

Diese Gleichungen definiren eine projective Beziehung der beiden Strahlenbündel A und A' aufeinander. Ueber die Natur der beiden Flächen F und F' aber lässt sich nichts weiter ausmachen. Ist F gegeben, so kann F' jedes beliebige Flächenstück sein, das von den Strahlen des Bündels A' in nur je einem Punkte getroffen wird. Wenn dann $\mathfrak{A}$ einem Punkte P von F denjenigen Punkt P' von F' zuordnet, welcher aus F' von dem Strahl ausgeschnitten wird, der im Bündel A' dem Strahl PA entspricht, so sind alle oben dem $\mathfrak{A}$ auferlegten Bedingungen erfüllt.

§ 4. Es kann aber zweitens der Fall sein, dass nicht je zwei Lothlinien sich schneiden. Dann kann man zwei Lothlinien a und b von F finden, die sich nicht treffen. Wir nehmen a zur Axe $x_1 = 0$ $x_2 = 0$, b zur Axe $x_3 = 0$ $x_4 = 0$ eines homogenen Systems von Tetraedercoordinaten, und die a, b entsprechenden Lothlinien a' und b' zu den Axen $x_1' = 0$ $x_2' = 0$ bezw. $x_3' = 0$ $x_4' = 0$ eines Systems der $x_1'\, x_2'\, x_3'\, x_4'$.

Wegen der projectiven Beziehung der Büschel mit den Axen a und a' muss der Ebene, deren Gleichung ist $x_2 - \lambda x_1 = 0$ die Ebene $x_2' - \lambda p\, x_1' = 0$ entsprechen. Für Punkte von F und ihre entsprechenden ist also

$$\frac{x_2'}{x_1'} = p \frac{x_2}{x_1}$$

was wir, $p = \frac{a_2}{a_1}$ gesetzt, in die beiden Gleichungen

$$x_1' = l\, a_1\, x_1 \qquad x_2' = l\, a_2\, x_2$$

auflösen können.

Ganz ähnlich ergeben sich die Beziehungen

$$x_3' = m\, a_3\, x_3 \qquad x_4' = m\, a_4\, x_4. \qquad 1)$$

Seien nun c und c' eine dritte, von a und b verschiedene, Lothlinie von F und ihre entsprechende von F'. Durch c legen wir die beiden von einander verschiedenen Verticalebenen α, β und durch c' die α', β', die so gewählt seien, dass α' der α, β' der β entspricht. Die Gleichungen der Ebenen α' und β' seien bezw.

$$\alpha' \ldots\ldots \alpha'_1 x'_1 + \alpha'_2 x'_2 + \alpha'_3 x'_3 + \alpha'_4 x'_4 = \alpha'(x') = 0$$

$$\beta' \ldots\ldots \beta'_1 x'_1 + \beta'_2 x'_2 + \beta_3 x'_3 + \beta'_4 x'_4 = \beta'(x') = 0,$$

die von α und β seien $\alpha(x) = 0$ $\beta(x) = 0$. Wegen der projectiven Beziehung der Büschel mit den Axen c und c' muss dann

$$\frac{\alpha'(x')}{\beta'(x')} = \frac{r}{s} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$$

sein. Setzt man hier die Werthe aus 1) ein und bezeichnet

$$\alpha'_1 a_1 x_1 + \alpha'_2 a_2 x_2 = A(x) \quad \alpha'_3 a_3 x_3 + \alpha'_4 a_4 x_4 = \mathfrak{A}(x)$$

$$\beta'_1 a_1 x_1 + \beta'_2 a_2 x_2 = B(x) \quad \beta'_3 a_3 x_3 + \beta'_4 a_4 x_4 = \mathbf{B}(v)$$

so kommt

$$\frac{l A(x) + m \mathfrak{A}(x)}{l B(x) + m \mathbf{B}(x)} = \frac{r}{s} \cdot \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$$

$$l\{s A(x) \beta(x) - r \alpha(x) B(x)\} = m\{r \alpha(x) \mathbf{B}(x) - s \beta(x) \mathfrak{A}(x)\}.$$

Mit Hilfe der Zeichen

$$\text{2)} \qquad \begin{aligned} S &= r \alpha(x) \mathbf{B}(x) - s \beta(x) \mathfrak{A}(x) \\ T &= s A(x) \beta(x) - r \alpha(x) B(x) \end{aligned}$$

kann man also

$$l = \varrho S \qquad m = \varrho T$$

schreiben und findet dann in

$$\text{I.} \qquad \left\{ \begin{aligned} x'_1 &= \varrho S x_1 \\ x'_2 &= \varrho S x_2 \\ x'_3 &= \varrho T x_3 \\ x'_4 &= \varrho T x_4 \end{aligned} \right.$$

die Beziehung der Fläche F' auf F, wie sie durch die Abbildung $\mathfrak{A}$ gegeben ist. Diese Formeln sind aber auf Punkte von F beschränkt. Sie stellen, allgemein betrachtet, eine birationale Raumtransformation vor, wie sie von Clifford, Cremona und Nöther untersucht worden sind, und zwar geben sie diejenige specielle Umformung, die Nöther auf Seite 570 seiner Arbeit im 3. Bande der Math. Annalen aufführt.

§ 5. Diese Formeln können illusorisch werden, wenn S oder T für die Punkte von F, oder gar identisch, verschwinden.

Wenn S identisch Null ist, so ist entweder $\mathcal{A}(x) = 0$ $\boldsymbol{B}(x) = 0$. Dann wären, weil a_3 und a_4 nicht Null sein können, $\alpha_3', \alpha_4', \beta_3', \beta_4'$ alle Null und es enthielten die Functionen $\alpha'(x'), \beta'(x')$ nur x_1' und x_2', so dass c' mit a' zusammenfiele und dann auch c mit a. Oder es ist

$$\boldsymbol{B}(x) = \frac{s}{r}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)} \cdot \mathcal{A}(x)$$

also, weil $\beta(x)$ zu $\alpha(x)$ prim ist, $\mathcal{A}(x)$ durch $\alpha(x)$ theilbar, $\mathcal{A}(x) \equiv c_0\, \alpha(x)$ und $\boldsymbol{B}(x) \equiv \frac{s}{r}\, c_0\, \beta(x)$, wo c_0 constant. Dann würden α und β für $x_3 = 0$, $x_4 = 0$ verschwinden, d. h. c fiele mit b zusammen, gegen die Annahme. Also kann S nicht identisch $= 0$ sein. Wenn es aber bedingt, für die Punkte von F, verschwindet, so ist F ein Stück der Fläche zweiter Ordnung S, deren Gleichung $S = 0$ ist. Würde S nicht zerfallen, so wäre sie durch F vollständig bestimmt und könnte von der Wahl der Lothlinien a, b, c nicht abhängen. Weil aber für c die Functionen α und β Null sind, liegt c auf der Fläche S, und weil c ganz beliebig ist, müssten dann alle Lothlinien der Fläche S angehören, was nicht möglich ist, weil die Lothlinien eines Flächentheils einen Raumtheil erfüllen und S dann identisch Null wäre. Wenn aber S zerfiele, so könnte es nur aus zwei Ebenen bestehen, und F wäre ein Stück von einer derselben, was auch ausgeschlossen ist. Daher ist S nicht $= 0$; Aehnliches gilt für T, das auch weder identisch noch bedingt Null sein kann. Die durch die Gleichungen I dargestellte Abbildung kann folglich nicht illusorisch werden.

§ 6. Es empfiehlt sich jetzt, zuerst den Fall zu betrachten, dass man c so annehmen kann, dass es sowohl a wie b schneidet. Dann kann man für die beiden Ebenen $\alpha = 0$ und $\beta = 0$ die ac und bc nehmen, und deren Gleichungen bezw.

$$x_1 = 0 \qquad x_3 = 0$$

schreiben. Diesen beiden Ebenen entsprechen dann die beiden $a'c'$ und $b'c'$, so dass man

$$\alpha' = x_1' \qquad \beta' = x_3'$$

setzen kann. Damit wird

$$A(x) = a_1 x_1 \qquad B(x) = 0 \qquad \mathfrak{A}(x) = 0 \qquad \mathfrak{B}(x) = a_3 x_3$$

$$S = r\, a_3\, x_1\, x_3 \qquad T = s\, a_1\, x_1\, x_3$$

und die Formeln I des § 4 geben, wenn man $\sigma = \varrho\, x_1\, x_3$ nimmt,

$$x_1' = \sigma r a_3 x_1, \; x_2' = \sigma r a_3 x_2, \; x_3' = \sigma s a_1 x_3, \; x_4' = \sigma s a_1 x_4.$$

Diese Formeln stellen eine projective Transformation vor.

Kann man also drei Lothlinien finden, von welchen zwei die dritte schneiden, ohne in einer Ebene zu liegen, so ist die Abbildung $\mathfrak{A}$ eine projective.

§ 7. Im Folgenden nehmen wir nun, $\mathfrak{A}$ sei nicht projectiv und zeigen, dass diese Annahme auf unzulässige Resultate führt.

Wenn es nicht möglich ist, c so zu finden, dass es beide Lothlinien, a und b trifft, so gibt es entweder gar keine Lothlinie, die a oder b trifft, oder es gibt Lothlinien, die eine dieser beiden schneiden. In diesem letzten Falle können nun entweder je zwei der Lothlinien, die a begegnen, auch sich gegenseitig schneiden, oder es gibt Paare, deren Linien a schneiden, ohne sich zu treffen.

Wenn diese letztere Möglichkeit einträfe, so wäre nach § 6 $\mathfrak{A}$ projectiv. Im ersten Falle müssten a und alle Lothlinien, die a treffen, entweder in einer Ebene liegen, oder durch einen Punkt gehen. Der Ort G der Fusspunkte wäre also ein Curvenstück oder höchstens ein Flächentheil, der von F verschieden ist, wenn wir den in § 3 absolvirten Fall ausschliessen. Aehnliche Verhältnisse treten bei b ein. Der Ort H der Fusspunkte der Lothlinien, die b treffen, ist auch eine Curve oder höchstens ein Flächentheil, wenn nicht die Abbildung $\mathfrak{A}$ projectiv ist. Wenn G und H zusammen F ausfüllten, würde, weil a und b sich nicht schneiden, nicht an allen Punkten, wo G und H aneinander grenzen, Stetigkeit in der Richtung der Lothlinien stattfinden können. Da wir diese angenommen haben, muss es sicher auch einen Flächentheil K von F geben, dessen Punkte weder G noch H angehören. Die Lothlinien, deren Fusspunkte auf K liegen, schneiden dann weder a noch b. Aus ihnen sei nun die in den Formeln I § 4 benutzte Lothlinie c gewählt; dann müssen $\alpha(x)$, wie $\beta(x)$ jedenfalls mindestens eine Variable des Paares $x_1\,x_2$ und mindestens eine des Paares $x_3\,x_4$ enthalten, weil sonst c die Linie b bezw. a schneiden würde.

Unter den Lothlinien, deren Fusspunkte K angehören, gibt es unendlich viele, die c nicht treffen. Denn eine Ueberlegung, die der im Anfang des § angestellten analog ist, zeigt, dass die Fusspunkte der c schneidenden Lothlinien einen Flächentheil L höchstens erfüllen können und dass sie durch einen Punkt gehen müssen, wenn $\mathfrak{A}$ nicht projectiv ist. Wenn L mit K identisch wäre, hätten wir an den Grenzen von K und G, sowie von K und H Unstetigkeiten der Richtungen der Lothlinien. Daher muss nach Abzug von L aus K noch ein Flächentheil M übrig bleiben, dessen Lothlinien c nicht treffen.

§ **8.** Die weitere Untersuchung zerfällt in mehrere Theile.

Die Abbildung $\mathfrak{A}$ der Fläche F auf F' kann von der besonderen Wahl des Coordinatensystems und besonders der Lothlinie c nicht abhängen. Nehmen wir also für c eine andere Lothlinie d, die ebenfalls weder a noch b trifft, so werden sich die Functionen S und T in andere U und V verwandeln und die Formeln

$$x_1' = \varrho' U x_1, \quad x_2' = \varrho' U x_2, \quad x_3' = \varrho' V x_3, \quad x_4' = \varrho' V x_4$$

werden also ebenfalls die Abbildung $\mathfrak{A}$ darstellen müssen, d. h. sie werden für die Punkte von F dasselbe geben müssen, wie die Formeln I. Dies verlangt, dass

$$\text{II.} \qquad \Phi = U T - V S = 0$$

sei für die Punkte von F. Der Ausdruck Φ kann aber auch identisch Null sein.

§ **9.** Betrachten wir zuerst diesen Fall. Dann muss, da ja ein identisches Verschwinden von S und T, wie auch von U und V nach § 5 ausgeschlossen ist,

$$\text{III.} \qquad V = \frac{U T}{S}$$

ganz sein. Ist T prim zu S, so muss U durch S theilbar und der Quotient, weil U und S von gleicher Dimension — der zweiten — sind, constant $= k$ sein. Dann hat man also $U = k S$, $V = k T$. Wie S und T für die Lothlinie c verschwinden, werden U und V für d zu Null. Den letzten Gleichungen zu Folge würde aber die Linie d gleichzeitig auch den beiden Flächen $S = 0$ und $T = 0$ angehören, die schon c gemein haben. Da aber diese beiden Flächen von der zweiten Ordnung sind, können sie, wenn sie nicht einen Flächentheil gemein haben — und dann wären S und T nicht theilerfremd — höchstens noch in einer Geraden sich schneiden, die c nicht trifft und die natürlich von a, b und c abhängen wird. Da aber (§ 7) d noch unter unendlich vielen Lothlinien gewählt werden kann, die c nicht treffen, kann man sie immer von jener Linie verschieden annehmen. Somit ist der Fall nicht möglich; die Gleichung II kann nicht identisch bestehen, wenn S und T theilerfremd sind, sondern höchstens, wenn sie einen gemeinsamen Theiler haben.

§ 10. Sind S und T nicht relativ prim, so können sie einen Factor ersten oder einen zweiten Grades gemein haben. Im letzten Falle muss $T = \mu S$ sein, wo μ eine Constante. Dann aber geben die Formeln I

$$x_1' = \varrho S \cdot x_1 \quad x_2' = \varrho S \cdot x_2 \quad x_3' = \varrho S \cdot \mu x_3 \quad x_4' = \varrho S \cdot \mu x_4,$$

die eine projective Transformation liefern.

Es können aber S und T auch einen gemeinsamen Factor ersten Grades τ haben, so dass $S = \tau S_1$, $T = \tau T_1$ ist. Dann müssten die beiden Functionen S und T zerfallen. Soll S zerfallen, so muss, weil $\mathcal{A}$ und $\boldsymbol{B}$ nur x_3 und x_4 enthalten, einer der beiden Factoren eine Function nur von diesen beiden Variabeln sein, die wir $m x_3 - l x_4$ setzen wollen. Dann müsste S für $x_3 = l$ $x_4 = m$ verschwinden, oder, wenn wir $\mathcal{A}(l, m) = g$, $\boldsymbol{B}(l, m) = f$ setzen

$$r f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + l \alpha_3 + m \alpha_4) = s\, g(\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + l \beta_3 + m \beta_4),$$

somit auch

$$r f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = s\, g(\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2)$$

sein. Nach einer Bemerkung in § 7 können die beiden hier vorkommenden Functionen nicht Null sein. Ist nun weder f noch g Null, so folgt, dass für $x_1 = \alpha_2$, $x_2 = -\alpha_1$ $x_3 = 0$ $x_4 = 0$ die Functionen $\alpha(x)$ und $\beta(x)$ verschwinden, dass also c und b sich schneiden. Wäre $f = 0$, so müsste auch $g = 0$ sein, weil $\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2$ nicht identisch Null sein kann. Danach ist jene Gleichung möglich, wenn f und g gleichzeitig Null sind, in welchem Falle $\mathfrak{B}$ sich nur durch einen constanten Factor von $\mathcal{A}$ unterscheiden kann, so dass es $= \mathcal{A} h$ gesetzt werden kann. Damit wird

$$S = \mathcal{A}(r h \alpha - s \beta).$$

In ähnlicher Weise kann T nur zerfallen, wenn $B(x) = k A(x)$ also

$$T = A(s \beta - r k \alpha)$$

ist. Beide müssen aber einen Factor gemein haben. Dass er in $\mathcal{A}$ und A aufgehe, ist ausgeschlossen, weil diese Functionen verschiedene Variabeln enthalten. Dass $\mathcal{A}$ mit $s\beta - rk\alpha$ proportional ist oder A mit $rh\alpha - s\beta$ ist auch unmöglich, weil sonst c die Linie b oder die a schneiden würde. Also wäre nur möglich, dass $rh\alpha - s\beta$ durch $s\beta - r\alpha k$ theilbar ist; der Quotient muss dann -1, und $h = k$ sein. Dann wäre also

$$S = \mathcal{A}(r h \alpha - s \beta)$$
$$T = - A(r h \alpha - s \beta).$$

Die Gleichung III in § 9 würde

$$V = -\frac{U A}{\mathcal{A}}$$

verlangen. Da A und $\mathcal{A}$ theilerfremd sind, müssen U und V ebenfalls einen gemeinsamen Factor ersten Grades haben. Wenn man die vorigen Ueberlegungen nun auf U und V anwendet, so zeigt sich, dass diese Functionen die Formen

$$U = \Gamma(t n \gamma - u \delta)$$
$$V = - C(t n \gamma - u \delta)$$

haben müssen und dass dann

$$C = \frac{\Gamma A}{\mathcal{A}}$$

sein muss, wobei $\gamma = 0$ $\delta = 0$ zwei Ebenen durch d darstellen und C, $\varGamma$ an die Stelle von A und $\mathit{\Lambda}$ treten, wenn man c durch d ersetzt. Die letzte Gleichung gibt aber

$$\varGamma = v\,\mathit{\Lambda} \qquad C = v\,A,$$

wo v ein constanter Factor. Aus der ersten dieser beiden

$$\gamma_3' a_3 x_3 + \gamma_4' a_4 x_4 = v(\alpha_3' a_3 x_3 + \alpha_4' a_4 x_4)$$

folgt aber $\gamma_3' = \alpha_3' v$, $\gamma_4' = \alpha_4' v$ und aus der zweiten $\gamma_1' = \alpha_1' v$, $\gamma_2' = \alpha_2' v$. Beide zusammen ergeben daher

$$\gamma'(x') = v\,\alpha'(x').$$

Es ist aber $\gamma'(x') = 0$ eine Ebene durch die Linie d', $\alpha'(x') = 0$ eine Ebene durch c'; daher sagt die letzte Gleichung aus, dass c' und d', also auch c und d sich schneiden, was durch Wahl von d nach § 8 stets vermieden werden kann.

Die Gleichung II kann also auch dann nicht identisch bestehen, wenn S und T einen Factor ersten Grades haben. Haben sie einen Factor zweiten Grades, ist also $\mathfrak{A}$ projectiv, so ist die Betrachtung jener Gleichung überhaupt unnöthig.

§ 11. Die Gleichung II kann aber vielleicht nur bedingt, für die Punkte von F, bestehen.

Ist $\varPhi = 0$ die Gleichung einer unzerlegbaren Fläche vierter Ordnung $\varPhi$, so ist sie durch das Flächenstück F vollständig bestimmt und kann von der Wahl der Lothlinien $a\,b\,c\,d$ nicht abhängen. Da aber S und T für c, U und V für d, S und U für b, T und V für a verschwinden, so gehören diese Linien $\varPhi$ an. Die Betrachtung von § 7 zeigt jedoch, dass die Lothlinie a ganz beliebig gewählt werden kann. Läge sie auf $\varPhi$, so müssten alle Lothlinien auf $\varPhi$ liegen. Dann aber müsste die Function $\varPhi$, gegen die hier gemachte Annahme, identisch Null sein, weil die Lothlinien eines Flächentheils einen Raumtheil erfüllen. Daher muss die Function $\varPhi$ zerfallen, entweder in einen Factor dritten Grades $\varPhi_3$, der nicht weiter zerfällt, und einen Factor ersten

Grades Φ_1, oder in einen unzerlegbaren Factor zweiten Grades Φ_2 und einen andern Factor zweiten Grades Φ_2'.

Im ersten Falle muss F, weil es nicht Theil einer Ebene sein soll, der Fläche dritter Ordnung $\Phi_3 = 0$ angehören, die durch F vollständig bestimmt ist, weil sie unzerlegbar sein soll, und von der Wahl der Linien a b c d nicht abhängen kann. Jede Linie, die auf Φ liegt, muss nun entweder auf der Fläche dritter Ordnung oder auf der Ebene liegen. Läge a auf Φ_3, so würden, weil a beliebig, alle Lothlinien dieser Fläche angehören, also Φ identisch Null sein. Daher muss a auf Φ_1 liegen. Die Lothlinie b kann aber auch nicht auf Φ_3 liegen. Denn ihr Fusspunkt kann (§ 7) jeder Punkt des Flächentheils G' sein, der übrig bleibt, wenn man G von F wegnimmt. Wenn b auf Φ_3 läge, so müssten alle Lothlinien von G' auf Φ_3 liegen, daher die Function Φ_3 und damit auch Φ identisch Null sein.

Die beiden Lothlinien a und b können aber auch nicht auf Φ_1 liegen, weil sie sich nicht schneiden. Daher ist ein Zerfallen von Φ in dieser Weise nicht möglich. Zerfällt es aber in zwei Factoren zweiten Grades, so ist nur der Fall zu betrachten, dass F dem irreducibelen Factor Φ_2 angehört, der dann von der Wahl der Lothlinien a b c d nicht abhängen könnte. Lägen nun c oder d auf Φ_2, so müsste, weil c und d beliebige Lothlinien aus K sind, alle Lothlinien dieses Flächentheils auf Φ_2 liegen, und dies ist nicht möglich. Daher können jene beiden Lothlinien nur auf Φ_2' liegen. Keine der Lothlinien a oder b kann aber Φ_2 angehören. Läge a auf Φ_2, so lägen alle Lothlinien auf dieser Fläche; läge b auf ihr, so würde das Gleiche von allen Lothlinien von G' gelten. Somit liegen die vier Lothlinien a b c d auf einer und derselben Fläche zweiter Ordnung $\Phi_2' = 0$, die nicht zerfallen kann, weil sonst c sicher a oder b treffen müsste. Daher gehören je zwei Lothlinien von K mit a und b derselben Fläche zweiter Ordnung an.

Sind d, e, f, g .... andere Lothlinien, deren Fusspunkte auf K liegen, so gehören also $abcd$, $abce$, $abcf$, $abcg$, ... je derselben Fläche zweiter Ordnung an. Weil diese aber die drei windschiefen Geraden abc gemein haben, fallen sie zusammen, so dass alle Lothlinien aus K der nämlichen Fläche zweiter Ordnung angehören müssten, was nicht eintreten kann. Folglich kann die Gleichung II auch nicht bedingt, für die Punkte von F, erfüllt sein.

Ueberblickt man die gefundenen Resultate, so zeigt sich, dass keine Möglichkeit bleibt, als dass die Abbildung $\mathfrak{A}$ projectiv ist.

§ **12.** Diese projective Umformung gilt zunächst nur für die Punkte von F. Man kann sie aber auch auf die Punkte, Geraden und Ebenen im Raume anwenden und in dieser allgemeineren Weise sei sie mit $\mathfrak{T}$ bezeichnet. Dann ist $\mathfrak{A} = \mathfrak{T}$ zunächst nur für die Punkte von F.

Sei nun ε eine Verticalebene von F; A, B, C drei in ihr gelegene Punkte von F. Dann gehen diese durch $\mathfrak{A}$ oder $\mathfrak{T}$ in A', B', C' über, die in der Ebene $\mathfrak{A}\varepsilon$ gelegen sind, die ε durch $\mathfrak{A}$ nach § 1 zugeordnet ist. Da aber vermöge $\mathfrak{T}$ aus ε wieder eine Ebene $\mathfrak{T}\varepsilon$ hervorgeht, welche die drei Punkte A', B', C' enthalten muss, so muss $\mathfrak{T}\varepsilon = \mathfrak{A}\varepsilon$ sein, weil ja nach unserer Annahme F' keine geraden Linien enthalten soll. Da weiter zwei Verticalebenen desselben Punktes sich in der Lothlinie des Punktes schneiden, so folgt, dass auch die Lothlinien von F durch die Transformation $\mathfrak{T}$ in die von F' übergehen, so dass also Punkte, Ebenen und Geraden, die sich vermöge $\mathfrak{A}$ entsprechen, auch durch $\mathfrak{T}$ aus einander hervorgehen.

§ **13.** Nimmt man an, man hätte durch ein gehörig dichtes Netz von Messungen auf einer unbekannten Fläche F' mit einem nicht bekannten System von Lothlinie Σ' die Ueberzeugung gewonnen, dass sie sich auf einer bekannten

Fläche F in der im § 1 geschilderten Art abbilden lasse, wenn man die Lothlinien von F, deren System Σ sei, passend annimmt, so kann man also schliessen, dass F' und Σ' durch projective Umformung aus F und Σ hervorgeht. Da aber die gegenseitige Lage der Punkte und Lothlinien von F' nicht bekannt ist, ist man auch nicht im Stande, die Beziehung $\mathfrak{T}$ von F auf F' zu finden. Es kann vielmehr F' jede Fläche sein, die durch irgend eine derartige Umformung der F entspricht, so dass sich über die Gestalt von F' nichts weiter aussagen lässt, wenn über die Art der projectiven Beziehung zwischen entsprechenden Büscheln von Verticalebenen nichts weiter bekannt ist.

§ 14. Anders gestaltet sich dies in dem speciellen Falle, den wir von jetzt ab in's Auge fassen wollen.

Die Abbildung $\mathfrak{A}$ erfülle die Bedinguugen des § 1 mit der Modification, dass der Winkel zwischen zwei beliebigen Verticalebenen irgend eines Punktes von F, dem Winkel zwischen den entsprechenden Verticalebenen von F' gleich sei. Diese Voraussetzung schliesst die in § 1 gemachte über die projective Beziehung entsprechender Büschel von Verticalebenen ein. Die Transformation $\mathfrak{T}$ lässt sich dann finden, wenn man die Lothlinien von F zu Hilfe nimmt. Denn sei a eine Lothlinie von F, seien $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon \ldots$ Ebenen durch a, a' die entsprechende Lothlinie von F' und $\alpha', \beta', \gamma', \delta', \varepsilon' \ldots$ die entsprechenden Verticalebenen. Ist ferner ω der unendlich ferne Kugelkreis und sind λ, μ die beiden durch a an ω zu legenden Tangentenebenen, die wir die Hauptebenen der Linie nennen wollen, λ', μ' die Hauptebenen von a', so ist der Winkel zwischen α und β gegeben durch $\frac{1}{2i} l(\lambda \mu \alpha \beta)$ und der zwischen α' und β' durch $\frac{1}{2i} l(\lambda' \mu' \alpha' \beta')$, wo ein Symbol wie $(\alpha \beta \gamma \delta)$ das Doppelverhältniss der vier Ebenen $\alpha \beta \gamma \delta$ bezeichnet. Wegen der Gleichheit der Winkel zwischen entsprechenden Ebenen muss dann $(\lambda\mu\alpha\beta) = (\lambda'\mu'\alpha'\beta')$ sein. Weiter erfordert die Winkelgleichheit die Gleichungen $(\lambda\mu\alpha\gamma) = (\lambda'\mu'\alpha'\gamma')$, $(\lambda\mu\alpha\delta) = (\lambda'\mu'\alpha'\delta')\ldots$, die zusammen

$$\lambda\mu\alpha\beta\gamma\delta\ldots \barwedge \lambda'\mu'\alpha'\beta'\gamma'\delta'\ldots$$

liefern. Da $\mathfrak{T}$ projectiv ist, ist es auch die umgekehrte Transformation $\mathfrak{T}^{-1}$; wenn man diese auf $\lambda'\mu'\alpha'\beta'\ldots$ anwendet und $\mathfrak{T}^{-1}\lambda' = \lambda_1$, $\mathfrak{T}^{-1}\mu' = \mu_1$ setzt, folgt, dass $\lambda'\mu'\alpha'\beta'\gamma'\delta'\ldots \barwedge \lambda_1\mu_1\alpha\beta\gamma\delta\ldots$ und also auch $\barwedge \lambda\mu\alpha\beta\gamma\delta\ldots$ sein muss. Daher müssen die Ebenen $\lambda_1\mu_1$ mit $\lambda\mu$ identisch sein. Da aber $\lambda'\mu'$ die von a' an ω zu legenden Tangentenebenen sind und a' durch $\mathfrak{T}^{-1}$ in a übergeht, werden $\lambda_1\mu_1$ die beiden Tangentenebenen sein, welche man von a aus an den Kegelschnitt Ω legen kann, der aus ω durch die Umformung $\mathfrak{T}^{-1}$ hervorgeht. Die Lothlinie a hat somit die Eigenschaft, dass von ihr zwei Ebenen ausgehen, die gleichzeitig ω und $\mathfrak{T}^{-1}\omega = \Omega$ berühren (Vgl. Sturm Math. Annalen Bd. 28 Seite 263/64 Nr. 5). Ist demnach $\mathfrak{T}$ gegeben, so ist auch die Richtung der Lothlinie in jedem Punkte von F bestimmt (und zwar zweideutig). Nur dann ist diese Richtung willkürlich, wenn $\Omega = \omega$ ist, was eintritt, wenn $\mathfrak{T}$ eine Aehnlichkeitstransformation ist.

§ 15. Umgekehrt, wenn in den Punkten von F die Lothlinien bekannt sind, so ist $\mathfrak{T}$ bestimmt. Denn die Hauptebenen der Lothlinien müssen einen Kegelschnitt Ω berühren, und da F' in der Eingangs erwähnten Beziehung zu F steht, muss auch ein solcher Kegelschnitt existiren, der freilich entweder ω selbst ist, oder von ω verschieden sein kann. Man habe nun entweder I. gefunden, dass die sämmtlichen Hauptebenen der Lothlinien keinen anderen Kegelschnitt als ω berühren, oder II. erkannt, dass sie einen anderen berühren und diesen bestimmt.

Im Falle I ist $\Omega = \mathfrak{T}^{-1}\omega = \omega$, daher $\mathfrak{T}$ eine Aehnlichkeitstransformation, F' ist zu F ähnlich.

Im Falle II nehmen wir eine Lothlinie a zur Axe $x_1 = 0$ $x_2 = 0$ eines homogenen rechtwinkeligen Systems, den Fusspunkt A von a zum Ursprung. Die entsprechenden Gebilde A', a' nehmen wir zum Ursprung und zur Axe $x_1' = 0$ $x_2' = 0$ eines zweiten homogenen rechtwinkeligen Systems, dessen Ebenen $x_1' = 0$ $x_2' = 0$ den $x_1 = 0$ $x_2 = 0$ bezw. entsprechen mögen. Bezeichnen wir die homogenen Ebenencoordinaten des ersten Systems mit $u_1 u_2 u_3 u_4$, die des zweiten mit $u_1' u_2' u_3' u_4'$, beachten, dass $\mathfrak{T}$ eine Ebene durch A in eine durch A' überführt, und, wegen der Winkelgleichheit, die Ebene $x_2 = \lambda x_1$ in die $x_2' = \lambda x_1'$ übergehen muss, so erhalten wir die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\varrho u_1' &= \alpha u_1 + \gamma u_3 + \delta u_4 \\
\varrho u_2' &= \alpha u_2 + \varepsilon u_3 + \zeta u_4 \\
\varrho u_3' &= \vartheta u_3 + \eta u_4 \\
\varrho u_4' &= \varkappa u_4.
\end{aligned}$$

Die Gleichung von ω im ersten System ist

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 0$$

und im zweiten

$$u_1'^2 + u_2'^2 + u_3'^2 = 0.$$

Daher ist die Gleichung von $\mathfrak{T}^{-1}\omega = \Omega$

$$\begin{aligned}
0 = \alpha^2 (u_1^2 + u_2^2) &+ (\gamma^2 + \varepsilon^2 + \vartheta^2) u_3^2 + (\delta^2 + \zeta^2 + \eta^2) u_4^2 \\
&+ 2\alpha\gamma u_1 u_3 + 2\alpha\delta u_1 u_4 + 2\alpha\varepsilon u_2 u_3 + 2\alpha\zeta u_2 u_4 \\
&+ 2(\gamma\delta + \varepsilon\zeta + \vartheta\eta) u_3 u_4.
\end{aligned}$$

Man kann stets $\alpha = 1$ setzen. Ist Ω gefunden und $\Sigma a_{ik} u_i u_k = 0$ seine Gleichung, so müssen die von a ausgehenden Hauptebenen, deren Coordinaten $u_1 = i$ $u_2 = 1$ $u_3 = u_4 = 0$ und $u_1 = -i$ $u_2 = 1$ $u_3 = u_4 = 0$ sind, diese Gleichung erfüllen, woraus $a_{11} = a_{22}$, $a_{12} = 0$ sich ergibt.

Nimmt man an, es sei $a_{11} = a_{22} = 1$ gemacht, so gibt die Vergleichung der Coefficienten

$$\gamma = a_{13} \quad \delta = a_{14} \quad \varepsilon = a_{23} \quad \zeta = a_{24}$$
$$\vartheta^2 = a_{33} - a_{13}^2 - a_{23}^2$$
$$\eta^2 = a_{44} - a_{14}^2 - a_{24}^2$$
$$\vartheta\,\eta = a_{34} - a_{13}\,a_{14} - a_{23}\,a_{24}$$

Die letzte Gleichung bestimmt die Combination der Zeichen von ϑ und η; sie ist erfüllt, denn sie drückt aus, wie man leicht sieht, dass die Determinante von Ω Null ist. Man hat also zwei Möglichkeiten, je nachdem man, unter $\vartheta_0\,\eta_0$ ein Werthsystem von ϑ, η verstanden,

$$\varrho\,u_3' = \vartheta_0\,u_3 + \eta_0\,u_4$$

oder

$$\varrho\,u_3' = -\vartheta_0\,u_3 - \eta_0\,u_4$$

nimmt. Die zweite Formel geht in die erste über, wenn man den Sinn der x_3' Axe umkehrt, was mit einer Spiegelung an der Ebene $x_3' = 0$ übereinkommt. Abgesehen von dieser Spiegelung ist also $\mathfrak{T}$ durch Ω eindeutig bestimmt und folglich kann man dann F' und Σ' aus F und Σ ableiten.

§ 16. Man könnte von dem gewonnenen Resultate, wenigstens der Idee nach, eine Anwendung machen auf die Bestimmung der Gestalt eines Theiles der Erdoberfläche aus geodätischen Messungen. In der That liefern ja diese, von Basismessungen abgesehen, die Winkel zwischen den Verticalebenen eines Punktes. Wenn man dann, etwa durch Probiren, ein Modell F hergestellt hätte mit einem System Σ von Lothlinien, für das die Winkel der Verticalebenen ebenso gross wären, wie die auf der Erde beobachteten, so wäre man im Stande, die Beziehung der Gestalt der Erde zu diesem Modell anzugeben.

In der Praxis freilich geht dies nicht an. Bei der geringen Neigung gegen einander, welche die Lothlinien von

Punkten haben, die noch gegenseitig sichtbar sind, erweisen sich die unvermeidlichen Beobachtungsfehler, insbesondere auch die von der Seitenrefraction herrührenden, als von zu bedeutendem Einfluss.

Man benutzt daher die gemessenen Winkel in anderer Weise. Man projicirt die Orte von der physischen Erdoberfläche auf die mathematische Erdoberfläche, das Geoid, durch Linien, welche Normalen zur Geoidfläche sind, und berechnet dann aus den beobachteten Winkeln zwischen den Verticalebenen der physischen Erdoberfläche, die Winkel, die die Normalebenen des Geoids zeigen würden, indem man die Höhen der Punkte über dem Geoid anderweitig, etwa nivellitisch, bestimmt. Als Lothlinien der Geoidfläche benützt man dann ihre Normalen und bildet sie auf eine „Referenzfläche" — gewöhnlich das Bessel'sche oder Clarke'sche Ellipsoid — ab, indem man als Lothlinien der Referenzfläche deren Normalen verwendet. Man bestimmt nämlich die Coordinaten der Punkte auf der Referenzfläche so, nöthigenfalls mit Benutzung der Methode der kleinsten Quadrate, dass die Horizontalwinkel auf der Referenzfläche, d. h. die Winkel zwischen deren Normalschnitten, mit den beobachteten und auf das Geoid reducirten Horizontalwinkeln möglichst übereinstimmen. Und da zeigt es sich, dass, wenn die Ausdehnung des betrachteten Theils des Geoids ein Paar Hundert Kilometer nicht überschreitet, die Differenzen zwischen den Horizontalwinkeln auf dem Geoid und auf der Referenzfläche so gering sind, dass man sie den Beobachtungsfehlern zuschreiben kann.

§ 17. Nehmen wir nun an, die genannte Abbildung erfülle die im § 14 aufgestellte Bedingung strenge.

Indem wir unter F ein beliebiges Flächenstück verstehen und als Lothlinien ihre Normalen annehmen, sowie Gleiches von F' voraussetzen, wollen wir nun die Art der

Abbildung $\mathfrak{T}$ in diesem Falle weiter studieren. Diese muss hier noch eine Bedingung erfüllen. Da sie die Lothlinien von F, in die Lothlinien von F', die Normalen dieser Fläche sein sollen, überführen muss, so muss $\mathfrak{T}$ aus einer beliebigen Normalen n von F, eine n' von F', hervorgehen lassen. Ist τ die Tangentenebene von F im Fusspunkte von n, τ' die von F' im Fusspunkt von n', die vermöge $\mathfrak{T}$ der τ entspricht, so geht n durch den Pol von τ in Bezug auf ω, und n' durch den Pol von τ' in Bezug auf ω. Wendet man $\mathfrak{T}^{-1}$ an und beachtet, dass eine projective Umformung das Verhältniss von Pol und Polarebene nicht ändert, so folgt, dass $\mathfrak{T}^{-1} n'$ durch den Pol von $\mathfrak{T}^{-1} \tau'$ in Bezug auf $\mathfrak{T}^{-1} \omega$, somit n durch den Pol von τ in Bezug auf Ω gehen muss. Die Normale n muss daher die Pole von τ in Bezug auf ω und Ω enthalten.

Die Transformation $\mathfrak{T}_s$ führt also in unserem Falle die Fläche F mit ihrem Normalensystem in eine andere Fläche mit ihrem Normalensystem über und bildet zugleich F conform ab. Man könnte somit die vorliegende Aufgabe lösen, indem man zu einer gegebenen Transformation $\mathfrak{T}$ die Flächen bestimmte, welche die erste Eigenschaft haben und die mit der zweiten Eigenschaft und nun diejenige Beschaffenheit von $\mathfrak{T}$ suchte, für welche es Flächen gibt, die beiden Systemen gemeinsam sind. Die Flächen zu finden, welche durch $\mathfrak{T}$ conform abgebildet werden, ist mir nicht gelungen. Dagegen gestaltet sich die Behandlung der andern Aufgabe einfach, indem man die Flächen sucht, für welche die Pole einer Tangentenebene τ in Bezug auf ω und Ω mit dem Berührungspunkt in einer Geraden liegen.

Ist nämlich $F(u_1 u_2 u_3 u_4) = 0$ die Gleichung der Fläche in homogenen Ebenencoordinaten (sie brauchen nicht rechtwinkelig zu sein) und sind $\tau_1 \tau_2 \tau_3 \tau_4$ die Coordinaten von τ, bezeichnet man ferner bei einer homogenen Function f der

u_i $\frac{\partial f}{\partial u_i}$ mit $f_i(u)$ $(i=1,2,3,4)$ und $\sum_1^4 f_i(u)\,v_i$ mit $f(u,v)$, so sind die Coordinaten des Berührungspunktes von τ $F_i(\tau)$ (i, wie immer $= 1, 2, 3, 4$), die des Poles von τ in Bezug auf ω und Ω bezw. $\omega_i(\tau)$ und $\Omega_i(\tau)$, wenn $\omega=0$ und $\Omega=0$ die Gleichungen dieser Kegelschnitte in den homogenen Ebenen coordinaten sind. Somit muss sein

$$F_i(\tau) = h\,\omega_i(\tau) + k\,\Omega_i(\tau)$$

woraus folgt, weil $F(\tau\,\tau) = 0$ ist,

$$0 = h\,\omega(\tau) + k\Omega(\tau),$$

so dass

$$F_i(\tau) = h\left\{\omega_i(\tau) - \frac{\omega(\tau)}{\Omega(\tau)} \cdot \Omega^i(\tau)\right\}$$

wird. Bestimmt man nun die Differentiale $d\,\tau_i$ so, dass die Gleichung $F=0$ erfüllt bleibt, dass also $F(\tau, d\,\tau) = 0$ ist, so folgt, dass

$$0 = \omega(\tau, d\,\tau) - \frac{\omega(\tau)}{\Omega(\tau)}\Omega(\tau, d\,\tau)$$

oder dass $d\frac{\omega(\tau)}{\Omega(\tau)} = 0$ ist. Für die Fläche F ist folglich ω/Ω constant, d. h. ihre Gleichung ist

$$\omega(u) - C\Omega(u) = 0.$$

Diese Gleichung definirt eine Schaar confocaler Flächen zweiter Klasse, welche die Curve Ω zur imaginären Focalcurve haben.

§ 18. Wenn man die beiden Anforderungen, die an $\mathfrak{T}$ gestellt werden, combinirt, bestimmt es sich in folgender Weise.

Die Normale n muss durch die Pole von τ in Bezug ω und Ω gehen, deren Gleichungen

$$\omega(u, \tau) = 0 \qquad \Omega(u, \tau) = 0$$

sind. Sind ferner λ und μ zwei durch n gehende reelle Ebenen, λ_i und μ_i ihre Coordinaten, so verlangt die Forderung, dass durch n zwei Ebenen gehen, welche ω und Ω gleichzeitig berühren (§ 14), dass

$$\Omega(\lambda\lambda) = c\,\omega(\lambda\lambda), \quad \Omega(\lambda\mu) = c\,\omega(\lambda\mu), \quad \Omega(\mu\mu) = c\,\omega(\mu\mu)$$

sei. Da die Ebenen λ und μ durch n gehen, ist die Bedingung dafür, dass n die Pole von τ in Bezug auf ω und Ω enthalte, durch die vier Gleichungen

$$\omega(\lambda\tau) = \omega(\mu\tau) = \Omega(\lambda\tau) = \Omega(\mu\tau) = 0$$

gegeben.

Setzen wir $\Omega(u) - c\,\omega(u) = W(u)$, so ist auch

$$W(\lambda\lambda) = W(\lambda\mu) = W(\mu\mu) = W(\lambda\tau) = W(\mu\tau) = 0.$$

Ist σ eine Ebene, die nicht durch den Schnitt von λ, μ und τ geht, und solche gibt es, da diese drei Ebenen nicht dieselbe Gerade enthalten, und multiplicirt man die Hesse'sche Determinante von W zweimal mit $\Sigma \pm \lambda_1 \mu_2 \tau_3 \sigma_4$, so entsteht Null. Daher ist W eine Grenzfläche nach der Bezeichnung von Hesse (Anal. Geom. des Raumes 3. Auflage Seite 173). Aus den drei ersten der letzten Gleichungen folgt noch

$$W(\lambda + p\,\mu, \lambda + p\,\mu) = 0$$

für beliebige p, also gehen durch den Schnitt von λ und μ unendlich viele Tangentenebenen der Grenzfläche, so dass n Tangente eines Kegelschnitts ist, wenn die Grenzfläche W nicht zerfällt. Da aber in dem Büschel $\Omega - c\,\omega$, wenn nicht alle Flächen Grenzflächen sind, höchstens zwei Grenzflächen vorhanden sind — ω und Ω selbst sind unbrauchbar, weil sie imaginäre Kegelschnitte enthalten — so liegen, wenn jene zwei Grenzflächen nicht zerfallen, ihre Tangenten, also die Normalen von F, in zwei Ebenen, was nicht möglich ist.

Also muss Ω so beschaffen sein, dass jenes Büschel zerfallende Grenzflächen enthält. Eine Grenzfläche zweiter Klasse kann aber entweder in zwei Punkte zerfallen oder aus einem einzigen Punkte bestehen. Sei im ersten Falle

$$W(u) = r(u) \cdot s(u)$$

so muss demnach

$$r(\lambda)\, s(\lambda) = r(\mu)\, s(\mu) = r(\lambda)\, s(\mu) + r(\mu)\, s(\lambda) = 0$$

sein. Wenn n durch keinen der beiden Punkte r oder s ginge, könnte man λ und μ so annehmen, dass keine der vier Grössen $r(\lambda)$, $s(\lambda)$, $r(\mu)$, $s(\mu)$ Null wäre. Daher muss n etwa durch r gehen. Legen wir dann μ noch durch s, so ist $r(\lambda) = r(\mu) = s(\mu) = 0$, $s(\lambda)$ nicht 0. Dann muss sein

$$0 = W(\lambda\, \tau) = s(\lambda)\, r(\tau), \quad \text{also} \quad r(\tau) = 0,$$

es muss somit τ durch r gehen. Alle Normalen gingen folglich durch einen Punkt, der auch in allen Tangentenebenen enthalten wäre, was nicht möglich ist. Ebenso ist es, wenn n durch s geht.

Also kann W nur ein Quadrat $= r(u)^2$ sein. Dann müssen die Gleichungen bestehen

$$r(\lambda)^2 = r(\mu)^2 = r(\lambda)\, r(\mu) = r(\lambda)\, r(\tau) = r(\mu)\, r(\tau) = 0,$$

welchen zufolge n jede Linie durch den Punkt r sein kann. In diesem Falle gehen folglich alle Normalen durch einen Punkt. Die beiden letzten Gleichungen sind dann für jedes τ erfüllt, so dass τ aus $\omega(\lambda\, \tau) = 0$ $\omega(\mu\, \tau) = 0$ bestimmt werden muss.

Wenn nicht alle Flächen des Büschels Grenzflächen sind, so kann es unter den Functionen $\Omega - c\, \omega$ höchstens zwei geben, die Quadrate sind, so dass die Normalen zwei Strahlenbündel bilden könnten.

§ 19. Sollen alle Flächen des Büschels Grenzflächen sein, so muss entweder die Ebene von Ω Tangentenebene von ω sein oder umgekehrt oder die Ebenen von ω und Ω müssen zusammenfallen. Da die Transformation $\mathfrak{T}$ reell ist und die Ebene von ω ebenfalls, so ist es auch die von Ω und somit ist der erste Fall nicht möglich. Im zweiten ist $\mathfrak{T}$ affin, weil die unendlich ferne Ebene sich selbst entspricht.

Wenn dann ω und Ω nicht identisch sind, bilden die Ebenen, welche beide berühren, je nach der Lage von Ω gegen ω, 4, 3, 2 oder 1 Ebenenbüschel, deren Axen die gemeinsamen Tangenten beider Kegelschnitte sind und in der unendlich fernen Ebene liegen. Die Normalen sind also dann Schnitte von zwei Ebenen aus zwei verschiedenen Büscheln. Die Tangentialebene τ muss den vier Gleichungen

$$\omega(\lambda u) = 0 \quad \omega(\mu u) = 0 \quad \Omega(\lambda u) = 0 \quad \Omega(\mu u) = 0$$

genügen, welche die Berührungspunkte der Ebenen λ und μ mit ω und Ω vorstellen. Sie ist also die unendlich ferne Ebene, wenn die Zahl der Berührungspunkte mindestens drei ist. Einen brauchbaren Fall erhalten wir daher nur, wenn die gewählten beiden Büschel zusammen nur zwei Berührungspunkte haben. Dies tritt weder ein, wenn ω und Ω vier gemeinsame Tangenten besitzen, noch wenn sie deren drei haben. Haben sie dagegen nur zwei Tangenten gemein, so können diese drei oder zwei Berührungspunkte haben. Nur den letzten Fall können wir benutzen, in dem sich dann ω und Ω doppelt berühren. Die Berührungssehne der beiden Tangenten ist dann Axe eines Ebenenbüschels, dessen Ebenen Tangentenebenen sein können. Die Ebenen aus beiden Büscheln, deren Axen die gemeinsamen Tangenten sind, schneiden sich aber in einem unendlich fernen Punkte, d. h. alle Normalen sind parallel. Haben ω und Ω nur eine Tangente gemein, so wären λ und μ aus dem Büschel zu wählen, dessen Axe sie ist und n wäre eine unendlich ferne Gerade.

§ 20. Also bleibt nur übrig, dass die beiden Kegelschnitte ω und Ω zusammenfallen oder dass alle Normalen durch einen oder zwei, endliche oder unendlich ferne, Punkte gehen. Der erste Fall liefert eine Aehnlichkeitstransformation.

Gehen alle Normalen durch einen endlichen Punkt, so nehmen wir ihn zum Ursprung eines rechtwinkeligen Systems. Dann muss sein

$$x + z\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \quad y + z\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

oder

$$x^2 + y^2 + z^2 = \text{Constante};$$

die Fläche F ist Theil einer Kugelfläche.

Schneiden sich die Normalen in einem unendlich fernen Punkt der z Axe, so verlangt dies

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

also z constant, wobei F eine Ebene wäre.

Dass alle Normalen zwei Bündel bilden, ist ausgeschlossen durch unsere Annahme, dass die Lothlinien, folglich hier die Normalen, ihre Richtung stetig ändern.

Ist F Stück einer Kugel, so muss auch F' ein Kugelstück sein und folglich ist auch hier die Abbildung von F' auf F eine ähnliche. Eine Abbildung einer Kugel auf eine Ebene ist offenbar unter der Bedingung der §§ 14 und 17 nicht möglich, wegen der Winkelsumme im Dreieck. Dagegen lassen sich zwei Ebenen selbstverständlich ähnlich aufeinander abbilden.

Sind also die Lothlinien Normalen und findet Gleichheit der Horizontalwinkel statt, so sind die beiden Flächen F und F' in allen Fällen einander ähnlich.

Da wie in § 16 erwähnt ein mässig grosser Bezirk der

Geoidfläche sich in der angegebenen Weise auf ein Rotationsellipsoid abbilden lässt, so könnte man schliessen, dass das betreffende Geoidstück einem Stücke eines Rotationsellipsoids ähnlich wäre, wenigstens mit einer gewissen Annäherung. Freilich müsste nach unseren Resultaten auch die relative Lage der Lothlinien beider Flächen die nämliche sein. Solange nur geodätische Messungen vorliegen, lässt sich die Richtigkeit dieser Folgerung nicht prüfen. Sind aber, wie gewöhnlich, auch astronomische Beobachtungen über die Richtung der Lothlinie auf der Erde gemacht, wenn auch nur in beschränkter Zahl, so kann man diese mit den Normalen des Ellipsoids vergleichen. Wie bekannt zeigen sich dann kleine Differenzen, die Lothabweichungen. Zum Theil sind sie dadurch bedingt, dass man ja auf der physischen Erdoberfläche beobachtet, während man die Lothrichtungen auf dem Geoid mit jenen auf dem Ellipsoid vergleichen müsste. Wenn man die Wirkung der über dem Geoid liegenden Massen auf die Lothrichtung berechnet und diese danach corrigirt, kann man, wenigstens genähert, die Lothrichtung auf dem Geoid bestimmen. Wenn auch dann noch Lothabweichungen übrig bleiben, so ist dies ein Zeichen, dass das Ellipsoid dem Geoid nicht genau genug ähnlich ist. Man kann dann, wenn genug Lothabweichungen bekannt sind, das Ellipsoid durch eine andere von ihm wenig verschiedene Fläche ersetzen, deren Normalen keine Abweichungen mehr zeigen, während die Unterschiede der gemessenen und corrigirten Horizontalwinkel von denen auf der Bildfläche noch in den Grenzen der Beobachtungsfehler bleiben. Die so entstandene Fläche ist dann dem Geoid mit genügender Genauigkeit ähnlich.