Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Classe

der

k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.

Band XXII. Jahrgang 1892.

München.
Verlag der K. Akademie.
1893.

In Commission bei G. Franz.

Ueber die Fundamentalgleichungen der Flächentheorie.

Von A. Voss in Würzburg.

(Eingelaufen 7. Mai.)

Die Gruppe der Formeln, durch welche seit Gauss' Disquisitiones generales circa superficies curvas die Eigenschaften einer krummen Fläche dargestellt werden, erhalten ihr eigenthümliches Gepräge durch die Art und Weise, wie dieselben auf die bei der Biegung unveränderlichen Coefficienten des Längenelementes bezogen sind. Man scheint aber bisher weniger darauf geachtet zu haben, dass in diesen Formeln nur in analytischer Weise die bei der Biegung unveränderlichen Elemente eingeführt sind, während gerade in geometrischer Hinsicht die Einführung von Biegungsinvarianten rein geometrischen Characters in den Vordergrund zu treten hat, wenn man den Gedankengang, der Gauss geleitet zu haben scheint, verfolgt.

Es ist die Absicht der folgenden Bemerkungen, die Fundamentalgleichungen der Flächentheorie so darzustellen, dass, soweit wie überhaupt möglich, nur geometrische Biegungsinvarianten[1]) in denselben auftreten, insbesondere auch in allgemeinster Weise das Krümmungsmaass als Function solcher auszudrücken.

1) Ueber die Unterscheidung zwischen analytischen und geometrischen Biegungsinvarianten vergl. unten Nr. 4.

Die Form, welche die allgemeinen Gleichungen der Flächentheorie in Folge dessen annehmen, steht zwar in naher Beziehung zu den von Aoust und Codazzi[1]) eingeführten Gleichungen, durch welche eine gerade für die Anwendungen sehr wichtige geometrische Interpretation derselben erreicht wird, unterscheidet sich aber eben durch den vorhin angeführten principiellen Gesichtspunkt von denselben.

In Beziehung auf orthogonale Curvensysteme auf einer Oberfläche hat übrigens neuerdings Herr Knoblauch[2]) in einer Arbeit, deren Tendenz sich, soweit sie das Krümmungsmaass betrifft, mit der vorliegenden berührt, an die Bonnet'sche Formel erinnert, welche das Krümmungsmaass durch die geodätischen Krümmungen der Coordinatenlinien ausdrückt.

Nr. 1. Bezeichnet man mit e, f, g die Coefficienten des Längenelementes auf einer Fläche, so ist nach Gauss das Krümmungsmaass K nur abhängig von den Grössen e, f, g, den ersten Differentialquotienten derselben nach den unabhängigen Parametern u, v und den zweiten Differentialquotienten e_{vv}, f_{uv}, g_{uu}. Aus dieser analytischen Thatsache folgt für zwei isometrisch[3]) auf einander bezogene Flächen die Unveränderlichkeit des Krümmungsmaasses.

---

1) Diese Formeln geben bekanntlich die Fundamentalgleichungen in einer für die Anwendungen ausserordentlich wichtigen Gestalt (vgl. namentlich das grundlegende Mémoire von Bonnet, Journal de l'École Polyt. Bd. 25 und 26, sowie die Théorie générale des surfaces von Ribaucour, Journ. v. Liouville Ser. IV, tom. 7), insofern nur geometrische Grössen, nämlich die normale und geodätische Krümmung, sowie die geodätische Torsion der Coordinatenlinien in denselben auftreten, entfernen sich aber eben durch die Einführung dieser grösstentheils nicht invarianten Elemente von der Beziehung auf das Längenelement.

2) Ueber die geometrische Bedeutung der flächentheoretischen Fundamentalgleichungen, Acta Mathematica Bd. 15 S. 249.

3) Der Kürze wegen nenne ich zwei auf einander abwickelbare Flächen isometrisch auf einander bezogen oder isometrisch.

Für diesen fundamentalen Satz der Flächentheorie giebt es nun eine Reihe verschiedener Darstellungen, welche denselben in mehr oder minder anschaulicher Weise durch geometrische Betrachtungen begründen, die sich auf invariante Elemente bei der Isometrie beziehen. Zu erwähnen ist hier zunächst die Gauss'sche Definition des Krümmungsmaasses als Grenzwerth des Quotienten des sphärischen Bildes eines Flächenstückes durch den Inhalt des letzteren selbst, welche, wie Minding[1]) gezeigt und auch Herr Sturm neuerdings wieder in Erinnerung gebracht hat,[2]) leicht so gefasst werden kann, dass die Invarianz von K dabei unmittelbar hervorgeht.

Auf eine andere Art hat Herr Natani das Krümmungsmaass mittelst eines Winkelexcesses durch den folgenden Satz[3]) ausgedrückt:

„Wird eine Fläche durch zwei Curvenschaaren in Vierecke und diese wieder durch eine dritte Curvenschaar in je zwei Dreiecke getheilt, so ist die Krümmung gleich dem Unterschied der um einen Schnittpunkt herumliegenden sechs Dreieckswinkel von 2π dividirt durch den Inhalt des anstossenden Viereckes."

Dieser Satz, welcher auf der Auffassung der Fläche als Grenze eines Polyeders mit dreiseitigen ebenen Flächen be-

---

Diese Ausdrucksweise dürfte sich auch dadurch rechtfertigen, dass es sich bei den meisten die Abwickelbarkeit der Flächen auf einander betreffenden Untersuchungen nicht um die wirkliche Ausführung der Abwickelung, die hinsichtlich ihres Umfanges jedesmal von der speciellen Natur der Gleichungen abhängt, handelt, sondern nur um die durch die Erhaltung der metrischen Verhältnisse bedingte Möglichkeit derselben.

1) Journal v. Crelle, Bd. 19.

2) Mathematische Annalen Bd. 21 S. 380—382.

3) Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf die allgemeine Theorie der Flächen und der Linien doppelter Krümmung von F. Joachimsthal, 2. Aufl. bearb. von L. Natani, 1881 S. 233.

ruht, bei dessen Deformation der Excess der Kantenwinkel an den Eckpunkten ungeändert bleibt, liefert eine mit dem geometrischen Character der Fläche im engsten Zusammenhang stehende Deutung für den Zähler des Krümmungsmaasses. Aehnliche Ueberlegungen finden sich indessen auch in Herrn Sturm's Note, in der auf Grund Steiner'scher Betrachtungen die Fläche als Grenze eines Polyeders aufgefasst und der Begriff der Ecken und Kantenkrümmung desselben eingeführt wird.

Nr. 2. Während bei diesen Untersuchungen allerdings die gehäufte Betrachtung infinitesimaler Beziehungen nicht wohl zu vermeiden ist, so namentlich in der Natani'schen Darstellung, der man wohl in mehrfacher Beziehung eine strengere Form wünschen möchte,[1]) bringen andere Formeln in analytischer Darstellung, aber in directer Beziehung auf geometrisch invariante Elemente, die Unveränderlichkeit des Krümmungsmaasses zum Ausdruck.

So besteht nach Bertrand und Puiseux für den Excess E der Länge einer hinreichend kleinen geodätischen den Flächenpunkt umgebenden Kreislinie mit dem Radius s über die Peripherie einer ebenen Kreislinie mit demselben Radius, dividirt durch die $\frac{3}{2}$ Potenz des Inhaltes J jenes geodätischen Kreises die Formel

$$\lim\left(\frac{E}{J^{\frac{3}{2}}}\right)_{s=0} = -\frac{K}{3\sqrt{\pi}}\ ^{2})$$

welche K direct durch den Grenzwerth des Verhältnisses zweier bei der Biegung invarianter Grössen ausdrückt.

Nach Beltrami[3]) gilt für den Bogen ϱ einer von einem

1) Eine solche wurde mir übrigens unlängst durch Herrn Finsterwalder mitgetheilt.

2) Vgl. Monge, Applications, Ausg. v. Liouville, S. 583 u. f. Der Satz selbst ist dort freilich auf andere Art ausgedrückt.

3) Beltrami, Zur Theorie des Krümmungsmaasses, Math. Annalen Bd. I, S. 580. Die Beltrami'sche Darstellung von K durch

beliebigen Punkte der Fläche ausgehenden Linie die merkwürdige Formel

$$\lim \left[\varDelta_2 \log\left(\frac{1}{\varrho}\right)\right]_{\varrho=0} = \frac{K}{3}$$

welche K durch den an der geometrischen Invariante ϱ auszuführenden invarianten Differentialprocess $\varDelta_2$ ausdrückt.[1])

Nr. 3. Die flächentheoretischen Fundamentalgleichungen d. h. die Relationen zwischen den Fundamentalgrössen erster und zweiter Ordnung und die partiellen Differentialgleichungen der Fläche selbst, besitzen dagegen an und für sich keine Form, aus welcher sich ihr invarianter Character in geometrischer Hinsicht unmittelbar erkennen liesse. Denn die Coefficienten e, f, g des Längenelementes sind nur analytische Biegungsinvarianten, sie haben aber an und für sich keine geometrische Bedeutung, da sie von der Bestimmungsweise der Variabeln u, v selbst abhängig sind und sich ändern, sowie diese durch Functionen je einer neuen unabhängigen Variabeln u', v' ersetzt werden.

Allerdings haben die Gauss'schen Relationen zwischen den Fundamentalgrössen und die partiellen Differentialgleichungen der Fläche durch die Codazzi'schen Formeln, namentlich in der kinematischen Deutung, welche Herr

den integrirenden Factor der Differentialgleichung der Linien von der Länge Null kommt wegen ihres rein analytischen Characters hier nicht in Betracht.

1) Die Erörterungen in Nr. 1. und 2. beabsichtigen nicht, eine Darlegung aller auf das Krümmungsmaass bezüglichen geometrischen Betrachtungen zu geben. Mit Ausnahme der Puiseux'schen Formel, welche dasselbe als Grenzwerth eines von einer Variabeln abhängigen Quotienten darstellt, aber die Construction geodätischer Kreise erfordert, unterliegen alle dem Umstande, dass es sich um das Verhältniss zweier von zwei unabhängigen Variabeln abhängenden infinitesimalen Grössen zweiter Ordnung handelt, welcher meines Erachtens die geometrische Anschaulichkeit beeinträchtigt.

Darboux[1]) ausführlich in seiner Théorie générale des surfaces dargelegt hat, eine sehr bemerkenswerthe Interpretation erfahren.

Herr Darboux denkt sich in Verbindung mit der Fläche ein rechtwinkeliges Raumcoordinatensystem — triédre trirectangle — dessen z-Axe die Normale des Flächenpunktes ist, und dessen x-Axe in der Tangentenebene der Fläche einen Winkel m mit der Curve u bildet. Schreitet man auf der letzteren fort, so geht dasselbe in eine benachbarte Lage über. Ist nun $r\,du$ die Rotationscomponente um die z-Axe, welche, abgesehen von einer geeigneten Translation, in Verbindung mit zwei anderen analogen partiellen Rotationen $p\,du$, $q\,du$ um die Axen x und y jenes System aus der ursprünglichen Lage in die zweite überführt, und bezeichnet man mit $r'\,dv$ die dem Fortschreiten auf der Curve v entsprechende Rotationscomponente, so ergiebt sich für den Ausdruck

$$K \sin \alpha \sqrt{e\,g}$$

— unter α den Winkel der Coordinatenlinien u, v verstanden — die elegante Formel[2])

$$K \sin \alpha \sqrt{e\,g} = \frac{\partial r}{\partial v} - \frac{\partial r'}{\partial u}$$

Nun hängen freilich die Rotationen r und r', sowie auch die von Herrn Darboux eingeführten Translationscomponenten des Trieders nur vom Längenelemente ab. Sie sind aber nur analytische Invarianten, wie auch schon aus dem Anblick der für K angeführten Formel hervorgeht, welche neben den Differentialquotienten nach u, v auch noch die Coefficienten e, g enthält, während die übrigen in Darboux'

---

1) Leçons sur la théorie générale des surfaces, Tom. I, Tom. II S. 361—387.

1) a. a. O. S. 364.

Theorie auftretenden vier Rotationen überhaupt keinen invarianten Character besitzen.

Nr. 4. Als geometrische Invarianten von wesentlicher Bedeutung kennt man die geodätische Krümmung einer beliebigen auf der Fläche gezogenen Linie, insbesondere die geodätischen Krümmungen der Coordinatenlinien u, v,[1]) mittelst deren allein sich nach Bonnet das Krümmungsmaass in Bezug auf jedes orthogonale Curvensystem auf der Fläche darstellen lässt, wie dies Herr Knoblauch neuerdings wieder hervorgehoben hat.[2]) Bei allgemeiner Wahl des Coordinatensystems reichen aber diese beiden Invarianten nicht mehr aus.

Es ist jedoch leicht, noch andere geometrische Invarianten aufzustellen, welche ebenso wie die geodätischen Krümmungen nur von den e, f, g und den ersten Differentialquotienten derselben abhängen. Eine solche muss nämlich eine Function dieser Grössen sein, welche bei einer Transformation von der Form

$$u = F(u')$$
$$v = \Phi(v')$$

ihre Gestalt nicht ändert, denn nur dann ist sie von der Wahl der Variabeln unabhängig, so lange die Coordinatenlinien nicht geändert werden.

Bezeichnet man nun die Werthe, welche die e, f, g vermöge dieser Transformation annehmen durch e', f', g' und in analoger Weise die Differentialquotienten $e_u, \cdots g_v$ durch $e'_{u'}, \cdots g'_{v'}$, so erhält man, wenn die Differentialquotienten der F, Φ durch Striche bezeichnet werden,

---

1) Als Curve $u(v)$ soll hier immer diejenige bezeichnet werden, längs welcher $u(v)$ variabel ist.

2) Vgl. Knoblauch, a. a. O., Darboux, Théor. générale, Tom. III, S. 130.

$$\begin{aligned}
e' &= e\,F'^2 \\
f' &= f\,F'\,\Phi' \\
g' &= g\,\Phi'^2 \\
f'_{u'} &= f_u\,F'^2\,\Phi' + f\,F''\,F'\,\Phi' \\
f'_{v'} &= f_v\,F'\,\Phi'^2 + f\,\Phi''\,\Phi'\,F' \\
e'_{u'} &= e_u\,F'^3 + 2\,e\,F'^2\,F'' \\
e'_{v'} &= e_v\,F'^2\,\Phi' \\
g'_{u'} &= g_u\,F'\,\Phi'^2 \\
g'_{v'} &= g_v\,\Phi'^3 + 2\,g\,\Phi'^2\,\Phi''\ ^{1)}
\end{aligned}$$

Aus diesen neun Gleichungen lassen sich durch Elimination der vier willkürlichen Grössen F', Φ', F'', Φ'' nur fünf von diesen freie Gleichungen zwischen den $e\ f\ g$ und ihren Differentialquotienten herleiten, welche die Transformationsrelationen im Aronhold'schen Sinne darstellen. Beschränkt man sich daher auf solche Verbindungen, welche höchstens erste Differentialquotienten der e, f, g enthalten, so lassen sich nur fünf Invarianten bilden. Es sind dies die folgenden:

$$\frac{f'^2}{e'\,g'} = \frac{f^2}{e\,g},$$

---

1) Vermöge dieser Transformation ergeben sich für die entsprechenden Coefficienten $[A_1]$, $[C]$ der Gleichungen 3) in Nr. 5 die Beziehungen:

$$[A'] = A\,\frac{F'^2}{\Phi'},\quad [C] = C\,\frac{\Phi'^2}{F'}.$$

In meiner Arbeit über die Krümmung der Flächen, Klein, Annalen Bd. 39 sind S. 198, Gleichung 13) diese Gleichungen in Folge eines bei der Correctur entstandenen Schreibfehlers unrichtig angegeben, indem auch die Nenner rechterhand zum Quadrat erhoben sind. Derselbe findet sich dann auf Seite 249 wiederholt, während die dort geführte Rechnung die richtigen Werthe von $[A_1]$, $[C]$ zu Grunde legt.

$$\frac{1}{2\sqrt{H'}}\frac{e'_{v'}}{\sqrt{e'}} = \frac{1}{2\sqrt{H}}\frac{e_v}{\sqrt{e}} = j,$$

$$\frac{1}{2\sqrt{H'}}\frac{g'_{u'}}{\sqrt{g'}} = \frac{1}{2\sqrt{H}}\frac{g_u}{\sqrt{g}} = j_1,$$

$$\frac{1}{\sqrt{H'}}\frac{\partial\frac{f'}{\sqrt{e'}}}{\partial u'} = \frac{1}{\sqrt{H'}}\frac{\partial\frac{f}{\sqrt{e}}}{\partial u} = \varkappa,$$

$$\frac{1}{\sqrt{H'}}\frac{\partial\frac{f'}{\sqrt{g'}}}{\partial v'} = \frac{1}{\sqrt{H}}\frac{\partial\frac{f}{\sqrt{g}}}{\partial v} = \varkappa_1.$$

wobei $H = e\,g - f^2$, $H' = e'\,g' - f'^2$ gesetzt ist. Die erste dieser Gleichungen stellt das Quadrat des Cosinus des Winkels α der Coordinatenlinien vor; in den übrigen erkennt man sofort die Bestandtheile, aus denen die geodätischen Krümmungen γ, γ_1 der Coordinatenlinien u, v sich zusammensetzen, denn es ist bekanntlich

$$\gamma = \varkappa - j,$$
$$\gamma_1 = \varkappa_1 - j_1.$$

Es ist nun zu vermuthen, dass sich aus diesen fünf Invarianten,[1]) zu denen allerdings noch die Bogenlängen der Coordinatenlinien selbst hinzuzunehmen sind, die Fundamentalgleichungen der Flächentheorie aufbauen lassen werden, wie im folgenden seine Bestätigung finden wird.

Es erweist sich indessen nicht als zweckmässig, jene Invarianten direct einzuführen. Vielmehr wird es sich empfehlen, die bereits definirten Krümmungen γ, γ_1 beizubehalten und diesen diejenigen beiden Biegungsinvarianten hinzuzufügen, welche ich bereits in meiner Arbeit über die

1) Dieselben sind indessen nicht von einander unabhängig. Man vergleiche weiter unten Nr. 6. die Gleichungen 10a und I.

Krümmung der Flächen, allerdings in anderer Richtung, betrachtet hatte.[1])

Nr. 5. Bezeichnet man das Längenelement der Fläche, welche auf zwei willkürliche Curvensysteme u, v bezogen ist, durch

$$1)\qquad ds^2 = e\,du^2 + 2\,f\,du\,dv + g\,dv^2$$

und die Differentialquotienten der e, f, g sowie der Coordinaten x, y, z, wie in Nr. 4, durch angehängte Indices, so hat man bekanntlich die Gleichungen

$$2)\qquad \begin{aligned} x_{uu} &= A\,x_u + A_1\,x_v + E p\,, \\ x_{uv} &= B\,x_u + B_1\,x_v + F p\,, \\ x_{vv} &= C\,x_u + C_1\,x_v + G p \end{aligned}$$

nebst den analogen für y, z und q, r, wobei E, F, G, die Fundamentalgrössen zweiter Ordnung, p, q, r die Richtungscosinus der Normale bedeuten, und die characteristischen Coefficienten A; A_1; B, B_1; C, C_1 durch die Gleichungen

$$3)\qquad \begin{aligned} 2\,A\;\;H &= q\,e_u - 2\,f\,f_u + f\,e_v \\ 2\,A_1\,H &= 2\,e\,f_u - e\,e_v - f\,e_u \\ 2\,B\;\;H &= g\,e_v - f\,g_u \\ 2\,B_1\,H &= e\,g_u - f\,e_v \\ 2\,C\;\;H &= 2\,g\,f_v - g\,g_u - f\,g_v \\ 2\,C_1\,H &= 2\,g_v - 2\,f\,f_v + f\,g_u \end{aligned}$$

in denen

$$e\,g - f^2 = H$$

gesetzt ist, definirt sind. Dabei finden zwischen den characteristischen Coefficienten die Gleichungen

---

1) Zur Theorie der Krümmung der Flächen, Klein, Annalen 39. S. 200.

$$B + C_1 = \frac{\partial\, l\sqrt{H}}{\partial v}$$

$$B_1 + A = \frac{\partial\, l\sqrt{H}}{\partial u}$$

4)
$$A_1 \frac{f}{e} = B_1 - \frac{\partial\, l\sqrt{\frac{H}{e}}}{\partial u}$$

$$C \frac{f}{g} = B - \frac{\partial\, l\sqrt{\frac{H}{g}}}{\partial v}$$

statt, und zugleich hat man für die Differentialquotienten der p, q, r die Gleichungen

5)
$$\begin{aligned} p_u &= L\, x_u + L_1\, x_v \\ p_v &= M\, x_u + M_1\, x\, . \end{aligned}$$

in denen

6)
$$\begin{aligned} L\ \ H &= Ff - g\cdot E \\ L_1\ H &= Ef - Fe \\ M\ \ H &= Gf - Fg \\ M_1\ H &= Ff - Ge \end{aligned}$$

ist. Die geodätischen Krümmungen γ, γ_1 der Curven u, v sind alsdann

7)
$$\gamma = \frac{A_1 \sqrt{H}}{e\sqrt{e}}, \quad \gamma_1 = \frac{C\sqrt{H}}{g\sqrt{g}}$$

ihre reciproken Werthe sind die Radien der geodätischen Krümmung der Parameterlinien. Ich denke mir ferner im Punkte $P\,(x, y, z)$ der Fläche die Tangente an die Curve u gezogen. Die Coordinaten eines um r_1 von P entfernten Punktes auf derselben sind

$$X = x + \frac{r_1 x_u}{\sqrt{e}}$$

8) $$Y = y + \frac{r_1 y_u}{\sqrt{e}}$$

$$Z = z + \frac{r_1 z_u}{\sqrt{e}}$$

und diejenige Normalebene der Fläche, welche jene Tangente in sich enthält, hat die Gleichung

$$N = \begin{vmatrix} X - x & Y - y & Z - z \\ p & q & r \\ x_u & y_u & z_u \end{vmatrix} = 0$$

oder

$$N = (X - x,\ p,\ x_u) = 0.$$

Hieraus ergibt sich für die unendlich benachbarte Normalebene $N + d N_v$, welche dem Fortschreiten auf der Curve v entspricht, die Gleichung

$$N + [(X - x, p, x_{uv}) + (X - x, p_v, x_u) - (x_v, p, x_u)]\, dv = 0.$$

Trägt man in die letztere die Ausdrücke 8) an Stelle von $X - x, \cdots$ ein, so ergibt sich für die Entfernung, in welcher die Tangente der Curve u von der benachbarten Normalebene längs der Curve v geschnitten wird, die Formel

9) $$r_1 = -\frac{\sqrt{e}}{B_1}$$

und ebenso erhält man für den analogen Werth r die Gleichung

$$r = -\frac{\sqrt{g}}{B}.$$

Allerdings sind diese „Radien“, welche für isometrische Flächen ungeändert bleiben, bisher wie es scheint in der Flächentheorie nicht beachtet worden. Die folgenden Bemerkungen werden indessen erkennen lassen, dass sie zugleich mit den angegebenen Normalebenen durch die Tangenten der Curven u, v bei vielen Untersuchungen auftreten.

Wie man sieht ist die Construction dieser Radien genau dieselbe, welche die geodätischen Krümmungsradien definirt, in welche sie geradezu übergehen, wenn der Coordinatenwinkel α ein rechter ist. Denn das Centrum der geodätischen Krümmung der Curve v ist, wie man leicht erkennt, derjenige Punkt auf der Normale der Curve v, in der Tangentenebene der Fläche, in dem diese Normale von der unendlich benachbarten Normalebene der Curve v geschnitten wird. Man könnte daher die reciproken Werthe von r und r_1, die fortan durch ϱ, ϱ_1 bezeichnet werden sollen,[1] auch die „nach den Richtungen der Coordinatenlinien gemessenen geodätischen Krümmungen" der letzteren nennen. Freilich ist nicht sofort geometrisch evident, dass diese Krümmungen ϱ und ϱ_1 für isometrische Flächen ungeändert bleiben. Aber eine solche unmittelbare Evidenz besteht auch nicht für die geodätischen Krümmungen γ und γ_1; man erkennt ihre Invarianz aber leicht mit Hülfe der Liouville'schen Definition der geodätischen Krümmung durch den geodätischen Contingenzwinkel. In derselben Weise aber kann man durch eine infinitesimale Betrachtung sehr einfacher Art nachweisen, dass r und r_1 Biegungsinvarianten sind. Es möge genügen, was diesen Punkt betrifft, auf die Formeln 10*) zu verweisen, deren geometrische Deutung auf der Hand liegt, und aus denen jener invariante Character für r und r_1 sich unmittelbar ergibt.

1) Nach der Bezeichnung in Nr. 4 ist

$$\varrho = \frac{1}{\sin\alpha}(\cos\alpha\, j - j_1),$$

$$\varrho_1 = \frac{1}{\sin\alpha}(\cos\alpha\, j_1 - j).$$

Eine besonders anschauliche Bedeutung gewinnen die Endpunkte der Strecken r, r_1 für ein conjugirtes Coordinatensystem auf der Fläche; sie sind dann die Durchschnittspunkte der consecutiven Tangenten der Curven u (v) längs der Curven v (u). Bei einer isometrischen Beziehung entspricht nun freilich einem conjugirten Coordinatensystem nicht wieder im allgemeinen ein solches; doch mag hier bemerkt werden, dass zwei isometrisch auf einander bezogene Flächen positiver Krümmung immer auch reell so auf einander bezogen werden können, dass einem System conjugirter Curven wieder ein solches entspricht, während für Flächen negativer Krümmung dieses System auch imaginär werden kann.[1])

Die Normalebenen N längs der Curve v erzeugen eine abwickelbare Fläche. Ist nun ϱ_1 beständig gleich Null, so laufen die Erzeugenden derselben den Tangenten der Curven u in den Punkten der Curven v parallel. Sind beide Krümmungen ϱ und ϱ_1 beständig gleich Null, so ist das Curvensystem u, v ein äquidistantes, denn alsdann hönnen e und g gleich Eins gesetzt werden.

Es möge hier noch darauf hingewiesen werden, dass auch die Entfernungen s, s_1, in denen die Normale der Fläche von den consecutiven Normalebenen N der Curven u, v geschnitten wird, eine einfache Bedeutung besitzen. Setzt man nämlich in der Gleichung $N + d N_v = 0$ für $X - x$, $Y - y$, $Z - z$ die Grössen $s_1 p$, $s_1 q$, $s_1 r$ ein, so ergiebt sich

$$s_1 (p\, p_v\, x_u) - (x_v\, p\, x_u) = 0$$

1) Für dieses besondere Coordinatensystem gehen dann durch die Biegung gleichzeitig die aus den Tangenten der Curven u, v gebildeten zwei Schaaren Developpabeln in einander über. Dagegen können die geodätischen Krümmungsradien einer Curve nur dann eine Developpable bilden, wenn dieselbe eine Krümmungslinie ist.

oder wenn man für p_v seinen Werth aus 5) substituirt

$$\frac{1}{s_1} = \frac{eG - fF}{eg - f^2}$$
$$\frac{1}{s} = \frac{gE - fF}{eg - f^2}$$

Daher ist $\frac{1}{s} + \frac{1}{s_1}$ für jeden Punkt der Fläche unveränderlich und gleich der Summe der reciproken Werthe der Hauptkrümmungsradien,[1]) während für conjugirte Coordinatensysteme noch ausserdem

$$\frac{1}{ss_1} = \frac{K}{\sin^2\alpha}$$

wird.

Nr. 6. Die vier Biegungsinvarianten $\gamma\ \gamma_1\ \varrho\ \varrho_1$ sollen nun im folgenden zur Bildung des Krümmungsmaasses verwandt werden. Hierzu sind zunächst einige weitere Formeln zu entwickeln.

Setzt man nämlich

$$\cos\alpha = \frac{f}{\sqrt{eg}}$$

so erhält man leicht mit Hülfe der Gleichungen 3)

$$-\sin\alpha\frac{\partial\alpha}{\partial v} = \frac{eCH + B_1 gH}{eg\sqrt{eg}}$$

oder

$$-\frac{\partial\alpha}{\partial v} = \frac{C\sqrt{H}}{g} + \frac{B_1\sqrt{H}}{e}$$

und wenn man hier γ_1 und ϱ_1 einführt

1) Für orthogonale Systeme gehen s und s_1 in die Normalkrümmungen über, und man erhält den bekannten Satz über die Krümmungen zweier zu einander rechtwinkligen Normalschnitte.

$$10)\quad \begin{aligned} -\frac{\partial \alpha}{\partial v} &= \sqrt{g}(\gamma_1 - \varrho_1 \sin \alpha) = \sqrt{H}\left(\frac{C}{g} + \frac{B_1}{e}\right) \\ -\frac{\partial \alpha}{\partial u} &= \sqrt{e}(\gamma - \varrho \sin \alpha) = \sqrt{H}\left(\frac{A_1}{e} + \frac{B}{g}\right) \end{aligned}$$

oder, wenn man die Bogenelemente $ds = \sqrt{e}\,du$, $ds_1 = \sqrt{g}\,dv$ einsetzt

$$10^a)\quad \begin{aligned} -\frac{\partial \alpha}{\partial s} &= \gamma - \varrho \sin \alpha \\ -\frac{\partial \alpha}{\partial s_1} &= \gamma_1 - \varrho_1 \sin \alpha \end{aligned}$$

Die vier Grössen $\varrho, \varrho_1, \gamma, \gamma_1$ sind indessen noch durch eine weitere Gleichung mit einander verbunden. Man erhält dieselbe durch Bildung der Integrabilitätsbedingung der Gleichungen 10). Aus den Gleichungen 9) oder

$$\varrho = -\frac{B}{\sqrt{g}}, \quad \varrho_1 = -\frac{B_1}{\sqrt{e}}$$

folgt nämlich mit Hülfe der in 3) gegebenen Ausdrücke für B und B_1

$$11)\quad \begin{aligned} -\frac{1}{\sqrt{eg}}\frac{\partial \sqrt{e}}{\partial v} &= \varrho + \varrho_1 \cos \alpha \\ -\frac{1}{\sqrt{eg}}\frac{\partial \sqrt{g}}{\partial u} &= \varrho_1 + \varrho \cos \alpha \end{aligned}$$

also, wenn man die Gleichungen 10) nach u und v differentiirt und die Ausdrücke 11) auf der rechten Seite substituirt,

$$\begin{aligned} -\frac{\partial^2 \alpha}{\partial u \partial v \sqrt{eg}} &= \frac{\partial \gamma_1}{\partial s} - \frac{\partial \varrho_1}{\partial s}\sin\alpha + (\varrho_1\gamma - \varrho\gamma_1)\cos\alpha - \varrho_1\gamma_1 + \varrho_1^2 \sin\alpha \\ &= \frac{\partial \gamma}{\partial s_1} - \frac{\partial \varrho}{\partial s_1}\sin\alpha - (\varrho_1\gamma - \varrho\gamma_1)\cos\alpha - \varrho\gamma + \varrho^2 \sin\alpha \text{[1]}. \end{aligned}$$

---

1) Sind zwei Flächen so auf einander bezogen, dass der Coordinatenwinkel α und die vier Grössen ϱ, ϱ_1, γ, γ_1 in correspondirenden

Setzt man zur Abkürzung

$$
12)\qquad \frac{\gamma_1}{\sin\alpha} - \varrho_1 = k_1, \quad \frac{\gamma}{\sin\alpha} - \varrho = k
$$

$$
\gamma \operatorname{cotg}\alpha + \varrho_1 = l_1, \quad \gamma_1 \operatorname{cotg}\alpha_1 + \varrho = l
$$

so kann man diese Identität in der folgenden Form

$$
\mathrm{I})\qquad \frac{\partial k_1}{\partial s} - k_1 l_1 = \frac{\partial k}{\partial s_1} - kl
$$

schreiben, deren beide Seiten nach 10*) verschwinden, wenn der Winkel α constant ist.

Nr. 7. Ich gehe nun von dem bekannten Ausdrucke[1]) für das Krümmungsmaass K aus,

---

Punkten gleiche Werthe haben, so sind sie isometrisch. Denn aus den Gleichungen 10a) folgt zunächst die Gleichung der Bogenelemente, also

$$
\sqrt{e} = \sqrt{e'}
$$
$$
\sqrt{g} = \sqrt{g'}
$$

und somit auch $f = f'$, falls man die Coefficienten des Längenelementes auf den beiden Flächen durch Indices unterscheidet. Hierbei muss aber vorausgesetzt werden, dass α nicht constant ist. Denn in diesem Falle sind die Grössen ϱ, ϱ_1 von den geodätischen Krümmungen γ, γ_1 nur um einen constanten Factor verschieden. Es ist aber leicht zu sehen, dass aus der Gleichheit der geodätischen Krümmungen bei constantem Coordinatenwinkel keineswegs die Gleichheit der Längenelemente sondern nach 11) nur die Relationen folgen:

$$
\frac{1}{\sqrt{e}}\frac{\partial l\sqrt{g}}{\partial u} = \frac{1}{\sqrt{e'}}\frac{\partial l\sqrt{g'}}{\partial u}
$$
$$
\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial l\sqrt{e}}{\partial v} = \frac{1}{\sqrt{g'}}\frac{\partial l\sqrt{e'}}{\partial v}.
$$

Ist dagegen α eine Function von v allein, so ergiebt sich zunächst $\sqrt{g} = \sqrt{g'}$ und dann nach 11) auch $\sqrt{e} = \sqrt{e'}$, so dass in diesem Falle die Flächen wieder isometrisch sind.

1) Darboux, a. a. O. Tom II p. 364.

$$K\sqrt{H} = -\frac{\partial^2 \alpha}{\partial u \partial v} - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\frac{\partial \sqrt{g}}{\partial u} - \cos\alpha \frac{\partial \sqrt{e}}{\partial v}}{\sqrt{e}\sin\alpha}\right)$$
$$- \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\frac{\partial \sqrt{e}}{\partial v} - \cos\alpha \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial u}}{\sqrt{g}\sin\alpha}\right)$$

den man vermöge der Gleichungen 3) in die Form

$$\text{II)} \quad K\sqrt{H} = -\frac{\partial^2 \alpha}{\partial u \partial v} - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{B_1\sqrt{H}}{e}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{B\sqrt{H}}{g}\right)$$

oder auch, wenn man die Formeln 10) einführt in die Gestalt

$$\text{II')} \quad K\sqrt{H} = \frac{\partial^2 \alpha}{\partial u \partial v} + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{C\sqrt{H}}{g}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{A_1\sqrt{H}}{e}\right)$$

bringen kann. Durch Addition ergiebt sich der von dem zweiten partiellen Differentialquotienten von α nach u und v befreite Ausdruck

$$\text{II'')} \quad 2K\sqrt{H} = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{C}{g} - \frac{B_1}{e}\right)\sqrt{H} + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{A_1}{e} - \frac{B}{g}\right)\sqrt{H}\text{[1]}$$

Nun findet man leicht nach 7) und 9)

$$\frac{C}{g} - \frac{B_1}{e} = \left(\frac{\gamma_1}{\sin\alpha} + \varrho_1\right)\sqrt{\frac{1}{e}}$$
$$\frac{A_1}{e} - \frac{B}{g} = \left(\frac{\gamma}{\sin\alpha} + \varrho\right)\sqrt{\frac{1}{g}}$$

---

1) Die Formeln II, II' lassen unmittelbar die bekannten Eigenschaften der Curvatura integra von Flächenstücken, die von geodätischen oder von äquidistanten Linien begrenzt sind, erkennen. Formel II'' ist nichts anderes als der von Herrn **Weingarten** für das Krümmungsmaass bemerkte Ausdruck. (Festschrift der Technischen Hochschule, Berlin 1884; **Knoblauch**, Theorie der krummen Flächen, S. 177).

$$\frac{1}{\sqrt{H}} \frac{\partial \sqrt{\frac{H}{e}}}{\partial u} = \frac{\partial \sqrt{g}}{\sqrt{eg}\, \partial u} + \operatorname{cotg} \alpha \frac{\partial \alpha}{\partial s} = -(\varrho_1 + \operatorname{cotg} \alpha\, \gamma)$$

$$\frac{1}{\sqrt{H}} \frac{\partial \sqrt{\frac{H}{e}}}{\partial v} = \frac{\partial \sqrt{e}}{\sqrt{eg}\, \partial v} + \operatorname{cotg} \alpha \frac{\partial \alpha}{\partial s_1} = -(\varrho + \operatorname{cotg} \alpha\, \gamma_1)$$

und somit durch Substitution in die Formel II'')

$$2K = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\gamma_1}{\sin \alpha} + \varrho_1\right) + \frac{\partial}{\partial s_1}\left(\frac{\gamma}{\sin \alpha} + \varrho\right)$$

$$-\left(\frac{\gamma_1}{\sin \alpha} + \varrho_1\right)(\varrho_1 + \operatorname{cotg} \alpha \gamma) - \left(\frac{\gamma}{\sin \alpha} + \varrho\right)(\varrho + \operatorname{cotg} \alpha \gamma_1)$$

oder mit Benutzung der unter 12) eingeführten Bezeichnung sowie der folgenden

$$\frac{\gamma_1}{\sin \alpha} + \varrho_1 = h_1, \quad \frac{\gamma}{\sin \alpha} + \varrho = h$$

III) $$2K = \frac{\partial h_1}{\partial s} + \frac{\partial h}{\partial s_1} - h_1 l_1 - h l.$$

In dieser Form, der man durch die mittelst der Formel I mögliche Elimination des Winkels α, solange dieser nicht constant ist, auch eine solche Gestalt geben kann, dass K nur von den γ, ϱ und γ_1, ϱ_1, sowie den ersten Differentialquotienten dieser Grössen bezüglich nach v und u abhängig erscheint, erhält nun der Satz von der Unveränderlichkeit des Krümmungsmaasses seinen unmittelbarsten Ausdruck im analytisch geometrischen Sinne, da K nur durch geometrische Biegungsinvarianten dargestellt ist. Ebenso merkwürdig ist aber die andere aus der bekannten Bedeutung von K als reciprokes Product der Hauptkrümmungshalbmesser fliessende Eigenschaft, der zufolge die rechte Seite von III für alle Coordinatensysteme auf der Fläche für jeden Punkt einen unveränderlichen Werth hat, und die Gleichungen 10^a), I, III stellen nichts anderes vor, als ganz allgemeine Theoreme, die von jedem beliebigen Coordinatensysteme auf einer Oberfläche gelten.

Ist insbesondere der Winkel α constant, so wird nach 10^a)

$$\varrho = \frac{\gamma}{\sin \alpha}, \quad \varrho_1 = \frac{\gamma_1}{\sin \alpha}$$

mithin

$$h_1 = 2\varrho_1, \qquad h = 2\varrho$$
$$l = \varrho + \varrho_1 \cos\alpha, \quad l_1 = \varrho_1 + \varrho\cos\alpha$$

also in diesem Falle

$$\text{III}') \quad K = \frac{\partial \varrho_1}{\partial s} + \frac{\partial \varrho}{\partial s_1} - (\varrho_1^2 + \varrho^2 + 2\varrho\varrho_1\cos\alpha)$$

welche Formel für $\alpha = \frac{\pi}{2}$ in die bekannte Bonnet'sche übergeht.[1])

Nr. 8. Ich schliesse hieran noch einige Bemerkungen, die sich aus der Form der Gleichungen I und III ergeben.

Sind die Curven u, v geodätisch, so folgt durch Combination von I und III

$$K = \frac{\partial \varrho_1}{\partial s} - \varrho_1^2 = \frac{\partial \varrho}{\partial s_1} - \varrho^2$$

Bei constanter negativer Krümmung $K = -c^2$ wird daher

---

1) Will man das Krümmungsmaass nur durch die geodätischen Krümmungen und den Winkel α darstellen, so findet man aus II'

$$K = \frac{\partial^2 \alpha}{\partial u \partial v}\frac{1}{\sin\alpha\sqrt{eg}} + \frac{\partial g_1}{\partial s} + \frac{\partial g}{\partial s_1} - (g_1^2 + g^2 + 2\cos\alpha\, g\, g_1)$$
$$- \frac{g_1}{\sin\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial s_1} - \frac{g}{\sin\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial s}$$

falls $\gamma = \sin\alpha\, g$, $\gamma_1 = \sin\alpha\, g_1$ gesetzt wird. Wie man sieht, ist dies aber keine Darstellung durch geometrische Invarianten, da die Differentiation nach u und v sich nicht beseitigen lässt.

$$\frac{\partial \varrho_1}{\partial u} \frac{1}{\sqrt{\varrho_1^2 - c^2}} = \sqrt{e}$$

oder, wenn man bei constanten v integrirt

$$\frac{\varrho_1 + c}{\varrho_1 - c} = e^{2sc}\, \psi(v)$$

und analog

$$\frac{\varrho + c}{\varrho - c} = e^{2s_1c}\, \chi(u)$$

Bei constanter positiver Krümmung $K = + c^2$ findet man dagegen

$$\begin{aligned} \varrho_1 &= c \operatorname{tg}(c s \ \ + f(v)) \\ \varrho \ &= c \operatorname{tg}(c s_1 + \varphi(u)) \end{aligned}$$

welche Formeln in sehr einfacher Weise die Aenderungen von ϱ_1 (und ϱ) beziehungsweise längs der geodätischen Linien u (und v) darstellen.

Ein ganz ähnliches Resultat ergiebt sich für ein System von Curven, in Bezug auf das $\gamma = 0$, $\varrho = 0$ ist. Man erhält dann aus I und III

$$K = \frac{\partial \varrho_1}{\partial s} - \varrho_1^2$$

und damit bei constantem K eine ganz ähnliche Gleichung für ϱ, wie vorhin, während γ_1 nun durch die lineare Differentialgleichung

$$\frac{\partial \gamma_1}{\partial u} = \sqrt{e}\,(\gamma_1\, \varrho_1 + \sin \alpha\, K)$$

in der überdies nach 10*) α nur von v abhängig ist, characterisirt ist, deren Lösung sofort hingeschrieben werden kann.

Dagegen können γ und ϱ_1 nur bei developpabelen Flächen gleich Null sein. Denn die Combination der Gleichungen I und III liefert hier sogleich $K = 0$.

Ferner ergiebt sich aus III der Satz:

Eine reelle Fläche, auf der ein System von Coordinatenlinien constanter geodätischer Krümmung[1]**) existirt, die sich überall unter constantem Winkel α schneiden, ist eine Fläche constanter negativer Krümmung**, den man als Verallgemeinerung eines bekannten Liouville'schen Theorem's betrachten kann.

Sollen z. B. die geodätischen Krümmungen der Curven u und v eines Orthogonalsystems constant und gleich c und c_1 sein, so hat man nach Nr. 5), 7) die Gleichungen

$$\frac{e_v}{e\sqrt{g}} = 2\,c, \quad \frac{g_u}{g\sqrt{e}} = 2\,c_1$$

deren Lösungen

$$\sqrt{e} = -\frac{\psi'(u_1)}{\psi(u_1)+\chi(v_1)}, \quad \sqrt{g} = -\frac{\chi'(v_1)}{\psi(u_1)+\chi(v_1)}$$

sind, wenn $c\,v = v_1$, $c_1 u = u_1$ gesetzt wird. Das Längenelement wird demnach

$$ds^2 = \frac{\dfrac{d\,U^2}{c_1^{\,2}} + \dfrac{d\,V^2}{c^2}}{(U+V)^2}$$

wenn $U = \psi(u_1)$, $V = \chi(v_1)$ gesetzt wird. Mit Hülfe der Identität

$$\frac{1}{c_1^{\,2}}\,d\,U^2 + \frac{1}{c^2}\,d\,V^2 = \frac{d\,U^2 + d\,V^2 + \left(\dfrac{c}{c_1}\,dU - \dfrac{c_1}{c}\,dV\right)^2}{c^2 + c_1^{\,2}}$$

und der Bezeichnungen

---

1) Solche Curven nennt Herr Darboux, allerdings im Gegensatz mit der durch Gauss eingeführten Terminologie, „geodätische Kreise". Will man sich dieser Bezeichnung anschliessen, so dürfte es sich in Bezug auf die Deformation der Flächen empfehlen, die Gauss'schen geodätischen Kreise schlechthin „Kreise" zu nennen.

$$U + V = U', \quad \frac{c}{c_1} U - \frac{c_1}{c} V = V'$$

gewinnt dasselbe die Gestalt

$$ds^2 = \frac{d\,U'^2 + d\,V'^2}{U'^2 (c_1^2 + c^2)}$$

in welcher man sofort das Längenelement der auf ihre Meridiane und Parallelkreise bezogenen Rotationsfläche der Tractrix erkennt. In ähnlicher Weise lässt sich übrigens auch der Fall eines beliebigen constanten α behandeln.

Nr. 9. Die Formel III Nr. 7. für das Krümmungsmaass enthält neben den Invarianten h und h_1 noch die Differentialquotienten derselben nach v und u. Nur für eine gewisse Klasse von Coordinatensystemen auf einer krummen Fläche wird man daher K durch die Invarianten allein darstellen können, so, dass dann K nur aus den geometrischen Grössen ϱ, ϱ_1, γ, γ_1, α zusammengesetzt ist. Es sind dies diejenigen, für welche h und h_1 Functionen von u und v allein werden, oder mit unwesentlicher Aenderung

$$\sin^2\alpha\left(\frac{\gamma}{\sin\alpha} + \varrho\right), \quad \sin^2\alpha\left(\frac{\gamma_1}{\sin\alpha} + \varrho_1\right)$$

d. h.

$$\frac{1}{e\sqrt{g}}\left[f_u - e_v + \frac{f}{2}\frac{\partial\, l\frac{g}{e}}{\partial u}\right], \quad \frac{1}{g\sqrt{e}}\left[f_v - g_u + \frac{f}{2}\frac{\partial\, l\frac{e}{g}}{\partial v}\right]$$

von u und v allein abhängig sind. Da diese beiden Ausdrücke bei einer Transformation von der Form

$$u' = \varphi(u), \quad v' = \psi(v)$$

absolute Invarianten sind, so erscheinen die Coordinatensysteme dieser Art durch die folgenden beiden Gleichungen characterisirt,

$$\frac{1}{g\sqrt{e}}\left(f_v - g_u + \frac{f}{2}\frac{\partial l\frac{e}{g}}{\partial v}\right) = \alpha v + \beta$$

$$\frac{1}{e\sqrt{g}}\left(f_u - e_v + \frac{f}{2}\frac{\partial l\frac{g}{e}}{\partial u}\right) = \alpha_1 u + \beta_1$$

in denen α, α_1, β, β_1 Constanten bedeuten, die man gleich Null oder Eins setzen kann, je nachdem die linken Seiten constant oder variabel sein sollen. Die Differentialgleichungen, auf deren Lösung die Bestimmung der Coordinatensysteme beruht, für welche die angegebene Eigenschaft besteht, sind allerdings nicht ganz einfach, und ich werde sie hier nicht weiter untersuchen. Eine einfache Lösung ergiebt sich aber in dem Falle, wo man sämmtliche Constanten gleich Null setzt, der freilich nur bei einer developpabelen Fläche auftreten kann. Alsdann kommt die bezeichnete Aufgabe auf die folgende hinaus:

Alle Curvensysteme in der Ebene zu bestimmen, für die die beiden Ausdrücke

$$f_v - g_u + \frac{f}{2}\frac{\partial l\frac{e}{g}}{\partial v}, \quad f_u - e_v + \frac{f}{2}\frac{\partial l\frac{g}{e}}{\partial u}$$

verschwinden.

Setzt man demgemäss

$$e = x_u^2 + y_u^2, \quad f = x_u x_v + y_u y_v, \quad g = x_v^2 + y_v^2$$

so erhält man durch einfache Umformungen an Stelle dieser beiden Bedingungen die Gleichungen

$$13)\quad \begin{cases} x_u^2 \dfrac{\partial \dfrac{x_v}{x_u}\sqrt{\dfrac{e}{g}}}{\partial v} + y_u^2 \dfrac{\partial \dfrac{y_v}{y_u}\sqrt{\dfrac{e}{g}}}{\partial v} = 0 \\[2ex] x_u^2 \dfrac{\partial \dfrac{x_v}{x_u}\sqrt{\dfrac{e}{g}}}{\partial u} + y_u^2 \dfrac{\partial \dfrac{y_v}{y_u}\sqrt{\dfrac{e}{g}}}{\partial u} = 0. \end{cases}$$

Setzt man nun

$$\frac{x_v}{x_u}\sqrt{\frac{e}{g}}=\sqrt{\frac{1+\left(\frac{y_u}{x_u}\right)^2}{1+\left(\frac{y_v}{x_v}\right)^2}}=p$$

$$\frac{y_v}{y_u}\sqrt{\frac{e}{g}}=\frac{\frac{y_v}{x_v}}{\frac{y_u}{x_u}}\sqrt{\frac{1+\left(\frac{y_u}{x_u}\right)^2}{1+\left(\frac{y_v}{x_v}\right)^2}}=q$$

und

$$z=\frac{y_u}{x_u},\quad z'=\frac{y_v}{x_v}$$

so folgt aus dem nach 13) erforderlichen Verschwinden der Functionaldeterminante

$$\frac{\partial p}{\partial v}\frac{\partial q}{\partial u}-\frac{\partial p}{\partial u}\frac{\partial q}{\partial v}$$

dass p nur von q abhängig ist, oder

$$\sqrt{\frac{1+z^2}{1+z'^2}}=\Phi\left(\frac{z'}{z}\sqrt{\frac{1+z^2}{1+z'^2}}\right)$$

oder auch

$$z'=F(z)$$

sein muss, wo F eine noch zu bestimmende Function bedeutet. Die Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\sqrt{\frac{1+z^2}{1+(Fz)^2}}\right)+z^2\frac{\partial}{\partial u}\left(\sqrt{\frac{1+z^2}{1+(Fz)^2}}\right)=0$$

auf welche sich die beiden 13) reduciren, verwandelt sich durch Ausführung der Differentiation und nach einigen Vereinfachungen in

$$[z-F(z)]\left[\frac{1}{1+z^2}+\frac{1}{1+(Fz)^2}\frac{\partial F}{\partial z}\right]=0$$

Da nun die Gleichung

$$z - F(z) = \frac{y_u x_v - y_v x_u}{x_u x_v} = 0$$

nicht bestehen kann, weil sonst y eine Function von x sein würde, so ergiebt sich nur

$$\frac{dz}{1+z^2} + \frac{dF}{1+F^2} = 0$$

oder

$$\operatorname{arc\,tg} z + \operatorname{arc\,tg} z' = \text{const.}$$

Zwischen den Winkeln α und β, welche die Curven u, v in jedem Punkte mit der x-Axe bilden, muss daher die Gleichung

$$\alpha + \beta = \text{const}$$

erfüllt sein. Man erhält also alle Systeme der verlangten Art, wenn man die eine Schaar von Curven beliebig annimmt und zu derselben eine zweite so bestimmt, dass die Winkelhalbirende des von den Curven beider Schaaren in jedem Punkte gebildeten Winkels eine constante Richtung hat.

Allerdings ist in der vorhergehenden Betrachtung vorausgesetzt, dass x_u und y_u nicht Null sind. Ist aber z. B. x_u gleich Null, so kann nicht zugleich y_u gleich Null sein, da sonst eine Gleichung zwischen x und y bestände. Der Fall $x_u = 0$ kann aber stets durch eine Coordinatentransformation beseitigt werden und ist daher in der vorigen Untersuchung schon enthalten.

Nr. 10. Durch das vorstehende haben zugleich die Coefficienten A_1, C, B, B_1 in den Formeln 1) der Nr. 5 ihre geometrische Bedeutung erhalten. Die Coefficienten A und C_1 haben dagegen überhaupt keine geometrische Bedeutung, und es wird sich daher empfehlen, sie ganz aus diesen Formeln zu entfernen, was vermöge der Gleichungen[1])

$$\frac{A}{\sqrt{e}} - \frac{1}{e}\frac{\partial \sqrt{e}}{\partial u} = -\gamma \operatorname{cotg} \alpha$$

$$\frac{C}{\sqrt{g}} - \frac{1}{g}\frac{\partial \sqrt{g}}{\partial v} = -\gamma_1 \operatorname{cotg} \alpha$$

zu geschehen hat. Alsdann treten in den Gleichungen [illegible] nicht mehr die Differentialquotienten der x, y, z, sondern nur die Richtungscosinus der Coordinatenlinien

$$\cos\lambda = \frac{x_u}{\sqrt{e}}, \quad \cos\mu = \frac{y_u}{\sqrt{e}}, \quad \cos\nu = \frac{z_u}{\sqrt{e}}$$

$$\cos\lambda' = \frac{x_v}{\sqrt{g}}, \quad \cos\mu' = \frac{y_v}{\sqrt{g}}, \quad \cos\nu' = \frac{z_v}{\sqrt{g}}$$

auf. Sie erhalten nach einfacher Umrechnung, wenn zugleich wie bisher statt der Differentiale $\sqrt{e}\,du$, $\sqrt{g}\,dv$ die Bogenelemente ds, ds' geschrieben und statt der [illegible] in diese Formeln eingehenden Grössen

$$\frac{E}{e}, \quad \frac{F}{\sqrt{eg}}, \quad \frac{G}{g}$$

die Zeichen

$$R, \quad S, \quad R'$$

gesetzt werden, die folgende Gestalt

$$14)\quad \begin{aligned} \frac{\partial \cos\lambda}{\partial s} &= -\frac{\gamma}{\sin\alpha}(\cos\lambda \cos\alpha - \cos\lambda') + pR \\ \frac{\partial \cos\lambda'}{\partial s'} &= -\frac{\gamma'}{\sin\alpha}(\cos\lambda' \cos\alpha - \cos\lambda) + pR' \end{aligned}$$

1) Es sind dies die bekannten Gleichungen

$$A e + A_1 f = \frac{e_u}{2},$$

$$C_1 g + C f = \frac{g_v}{2}.$$

$$
14)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \cos\lambda}{\partial s'} = \varrho_1 (\cos\lambda \, \cos\alpha - \cos\lambda') + p\,S \\[2ex] \dfrac{\partial \cos\lambda'}{\partial s} = \varrho \; (\cos\lambda' \cos\alpha - \cos\lambda\,) + p\,S \end{cases}
$$

nebst den analogen Gleichungen für $\cos\mu$ und $\cos\nu$, wo gleichzeitig rechterhand p durch q und r zu ersetzen ist. Die beiden letzten Gleichungen in 14) treten übrigens an Stelle der einen Gleichung für x_{uv}.

Die Grössen

$$
\frac{\cos\lambda\cos\alpha - \cos\lambda'}{\sin\alpha}, \quad \frac{\cos\mu\cos\alpha - \cos\mu'}{\sin\alpha}, \quad \frac{\cos\nu\cos\alpha - \cos\nu'}{\sin\alpha}
$$

und die aus ihnen durch Vertauschung der gestrichenen und ungestrichenen Cosinus hervorgehenden, welche rechterhand in 14) ausschliesslich vorkommen, haben eine sehr einfache geometrische Bedeutung. Sie sind nämlich die Richtungscosinus der geodätischen Krümmungsradien der Curven u und v. Bezeichnet man dieselben durch

$$
\begin{matrix} \cos l\,, & \cos m\,, & \cos n \\ \cos l', & \cos m', & \cos n' \end{matrix}
$$

so erhält man an Stelle von 14)

$$
15)\quad \begin{aligned} \frac{\partial \cos\lambda}{\partial s} &= -\gamma \;\cos l \;+ p\,R \\ \frac{\partial \cos\lambda'}{\partial s'} &= -\gamma_1 \cos l' + p\,R' \\ &\begin{cases} \dfrac{\partial \cos\lambda}{\partial s'} = \varrho_1 \cos l \;\sin\alpha + p\,S \\[2ex] \dfrac{\partial \cos\lambda'}{\partial s} = \varrho \;\cos l' \sin\alpha + p\,S. \end{cases} \end{aligned}
$$

Die Gleichung für das Krümmungsmaass wird nun

$$
16)\quad R\,R' - S^2 = K \sin^2\alpha
$$

und zugleich ergeben sich aus den beiden Differentialgleichungen zwischen den Fundamentalgrössen E, F, G[1])

$$BF + B_1 G - CE - FC_1 + \frac{\partial F}{\partial v} - \frac{\partial G}{\partial u} = 0$$

$$B_1 F + BE - A_1 G - FA + \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial E}{\partial v} = 0$$

die beiden neuen Gleichungen

$$\text{17)}\quad \begin{aligned} &-2\varrho S + \cos\alpha\, S\left(\frac{\gamma_1}{\sin\alpha} - \varrho_1\right) \\ &+ R_1(\varrho_1 + 2\varrho\cos\alpha) - \frac{\gamma_1}{\sin\alpha} R + \frac{\partial S}{\partial s'} - \frac{\partial R'}{\partial s} = 0 \\ &-2\varrho' S + \cos\alpha\, S\left(\frac{\gamma}{\sin\alpha} - \varrho\right) \\ &+ R(\varrho + 2\varrho_1\cos\alpha) - \frac{\gamma}{\sin\alpha} R' + \frac{\partial S}{\partial s} - \frac{\partial R}{\partial s'} = 0 \end{aligned}$$

Die Gleichungeu 15), 16), 17) stellen die Fundamentalgleichungen der Flächentheorie in einer Form vor, bei der bis auf die Grössen R, R', S nur invariante Elemente der Coordinatenlinien benutzt sind. Dabei bedeuten R, R' die Normalkrümmungen der Coordinatenlinien. Für S erhält man dagegen eine geometrische Deutung durch den Begriff der von Aoust eingeführten Seitenkrümmung (Courbure inclinée).[2])

Bezeichnet man nämlich die Richtungscosinus der Hauptnormale der Curve u durch $\cos a$, $\cos b$, $\cos c$, den Krümmungshalbmesser durch r, so ist

$$r\frac{\partial \cos\lambda}{\partial s} = \cos a, \quad r\frac{\partial \cos\mu}{\partial s} = \cos b, \quad r\frac{\partial \cos\nu}{\partial s} = \cos c$$

1) Vgl. meine Arbeit in Klein's Annalen 39 S. 185.

2) Man vergl. namentlich Aoust, Théorie des coordonnées curvilignes quelconques; Annali di Matematica, Ser. II 1, S. 39, oder das Referat im Bd. I der Fortschritte der Mathematik.

oder nach 15)

$$\frac{1}{r^2} = \gamma^2 + R^2$$

$$\frac{1}{r_1^{\,2}} = \gamma_1^{\,2} + R'^2$$

Unter dem Radius σ' der Seitenkrümmung der Curve u versteht man analog nach Aoust das Element der Curve v dividirt durch den unendlich kleinen Winkel, welchen die Tangente der Curve u beim Fortschreiten auf der Curve v mit ihrer ursprünglichen Richtung bildet. Demnach ist

$$\sigma' \frac{\partial \cos \lambda}{\partial s'} = \cos L', \quad \sigma' \frac{\partial \cos \mu}{\partial s'} = \cos M', \quad \sigma' \frac{\partial \cos \nu}{\partial s'} = \cos N'$$

wobei $\cos L'$, $\cos M'$, $\cos N'$ die Richtungscosinus des Radius der Seitenkrümmung vorstellen. Hieraus folgt

$$\frac{1}{\sigma'^2} = S^2 + \varrho_1^{\,2}$$

$$\frac{1}{\sigma^2} = S^2 + \varrho^2 \text{ [1]}$$

und zugleich

$$\sigma' \left(p \frac{\partial \cos \lambda}{\partial s'} + q \frac{\partial \cos \mu}{\partial s'} + r \frac{\partial \cos \nu}{\partial s'} \right) = \cos (N, \sigma')$$

$$\sigma \left(p \frac{\partial \cos \lambda'}{\partial s} + q \frac{\partial \cos \mu'}{\partial s} + r \frac{\partial \cos \lambda'}{\partial s} \right) = \cos (N, \sigma)$$

oder nach 15)

$$\sigma' S = \cos (\sigma', N)$$

$$\sigma\ S = \cos (\sigma, N)$$

Aus diesen letzteren Gleichungen folgt der Satz von Aoust,

1) Es ist also auch

$$\frac{1}{\sigma'^2} - \frac{1}{\sigma^2} = \varrho_1^2 - \varrho^2$$

bei der Isometrie invariant.

dass die beiden nach der Normale N der Fläche gemessenen Seitenkrümmungen der Coordinatenlinien unter einander gleich und gleich S sind.

Die Gleichungen 15) sind in mehrfacher Hinsicht geometrisch deutbar, wenn man die $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$; $\cos\lambda'$, $\cos\mu'$, $\cos\nu'$ als Coordinaten eines Punktpaares ansieht, welches auf der Kugel von Radius Eins dem betrachteten Flächenpunkte zugeordnet ist. Ohne auf diese Beziehungen weiter einzugehen, sei nur die Gleishung[1])

18)
$$\begin{aligned}&\sum\frac{\partial\cos\lambda}{\partial s}\frac{\partial\cos\lambda'}{\partial s'}-\sum\frac{\partial\cos\lambda}{\partial s'}\frac{\partial\cos\lambda'}{\partial s}\\&=\sin^2\alpha\left[K+\cos\alpha\left(\frac{\gamma\gamma_1}{\sin\alpha}-\varrho\varrho_1\right)\right]\end{aligned}$$

bemerkt, nach welcher die linke Seite ebenfalls eine Biegungsinvariante ist, welche nach 10ᵃ) bei constantem Coordinatenwinkel α in das mit $\sin^2\alpha$ multiplicirte Krümmungsmaass übergeht. Unter Bezugnahme auf die in dieser Nummer

---

1) Beiläufig mögen noch die folgenden beiden Gleichungen hier erwähnt werden. Bezeichnet man die Determinante

$$\begin{vmatrix} p & q & r\\ \cos l & \cos m & \cos n\\ \cos l' & \cos m' & \cos n'\end{vmatrix}$$

durch $\varDelta$, so sind

$$\frac{1}{\varDelta}\begin{vmatrix} p & q & r\\ \frac{\partial\cos\lambda}{\partial s} & \frac{\partial\cos\mu}{\partial s} & \frac{\partial\cos\nu}{\partial s}\\ \frac{\partial\cos\lambda'}{\partial s'} & \frac{\partial\cos\mu'}{\partial s'} & \frac{\partial\cos\nu'}{\partial s'}\end{vmatrix}=\varrho\varrho_1$$

$$\frac{1}{\varDelta}\begin{vmatrix} p & q & r\\ \frac{\partial\cos\lambda}{\partial s'} & \frac{\partial\cos\mu}{\partial s'} & \frac{\partial\cos\nu}{\partial s'}\\ \frac{\partial\cos\lambda'}{\partial s} & \frac{\partial\cos\mu'}{\partial s} & \frac{\partial\cos\nu'}{\partial s}\end{vmatrix}=\gamma\gamma_1\sin^2\alpha$$

zwei Biegungsinvarianten.

eingeführten Krümmungsradien und ihre Richtungen kann man für die linke Seite auch setzen

$$\frac{1}{rr_1}\cos(rr_1) - \frac{1}{\sigma\sigma'}\cos(\sigma\sigma').$$

An Stelle der Gleichungen 5) Nr. 5. treten endlich die Folgenden

$$19)\quad \begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial s} &= \frac{S\cos l + R\cos l'}{\sin\alpha} \\ \frac{\partial p}{\partial s'} &= \frac{S\cos l' + R'\cos l}{\sin\alpha} \end{aligned}$$

Die Gleichungen 14—19) zeigen, dass von dem hier verfolgten Gesichtspunkt aus der Begriff der Seitenkrümmung ein wesentlicher ist, dass aber alle weiteren Relationen über Krümmungscomponenten, wie sie namentlich Aoust in grosser Zahl aufgestellt hat, nur einen secundären Werth besitzen. Sind diese Gleichungen auch für die directe Anwendung auf Probleme der Flächentheorie vielleicht weniger geeignet, da man fast immer die Differentiationen nach den Bogenelementen ds, ds' durch solche nach du, dv wird ersetzen müssen, so geben sie doch, wie aus den vorigen Betrachtungen ersichtlich sein wird, zu mehrfachen neuen Anschauungen und Fragen Veranlassung, auf die ich bei einer anderen Gelegenheit zurückzukommen hoffe.