Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Classe

der

k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.

Band XXII. Jahrgang 1892.

München.
Verlag der K. Akademie.
1893.

In Commission bei G. Franz.

III. Teil der Studien über Gleichgewicht der lebendigen Kraft.

Von Ludwig Boltzmann.

(*Eingelaufen 5. November.*)

> **I think, that a problem of such primary importance in molecular science ought to be scrutinized and examined on every side, so that as many persons as possible may be enabled to follow the demonstration.**
> **Maxwell, scient. pap. II pag. 713.**

§ 1. Ueber die Variabeln, welche den Ausdruck für die lebendige Kraft auf eine Summe von Quadraten reducieren.

Maxwell hat zuerst[1]) die Formel für die Verteilung der lebendigen Kraft unter einatomigen Gasmolekülen aufgestellt, welche er als vollkommen harte Kugeln von gleicher oder verschiedener Beschaffenheit (Masse und Radius) voraussetzte. Er behandelte daselbst auch den Fall, dass die Moleküle harte Körper mit drei verschiedenen Hauptträgheitsmomenten sind, und fand, dass für ein solches Gas das Verhältnis der spezifischen Wärmen $1^1/_3$ sein müsste. Da dasselbe jedoch für die bekanntesten einfachen Gase den Wert 1,4 hat, so schloss er, dass in diesem Punkte die mechanische Analogie mit der Erfahrung im Widerspruch steht.[2])

1) Illustrations of the Dynamical Theory of Gases. Phil. mag. jan. and june 1860. scient. pap. I pag. 377.

2) Maxwell, scient. pap. pag. 409.

Es ist ein eigentümliches Verhängnis gewesen, dass Maxwell, dem mit solcher fast unbegreiflicher Leichtigkeit die Lösung des Problems sowohl für Kugeln als auch für solche Körper geglückt war, welche keine Rotationsachse besitzen, nicht schon damals auf die verhältnismässig naheliegende Idee kam, vollkommen glatte und harte von der Kugelgestalt verschiedene Rotationskörper zu betrachten. Er hätte in diesem Falle genau das gewünschte Verhältnis der spezifischen Wärmen 1,4 erhalten.

Der Beweis, welchen Maxwell damals für sein Verteilungsgesetz der lebendigen Kraft gab, wurde von ihm selbst später als unzureichend bezeichnet und er gab in einer zweiten Abhandlung[1]) einen exakten Beweis, dass die von ihm gefundene Verteilung der lebendigen Kraft eine mögliche ist, d. h. dass sie, wenn einmal unter den Gasmolekülen hergestellt, durch die Zusammenstösse nicht verändert wird.

Dieser Beweis sowie der Satz Maxwells selbst liessen sich bedeutend erweitern und letzterer zeigte den engsten Zusammenhang mit einem weit allgemeineren Theorem, das für beliebige Systeme gilt, in denen beliebige Kräfte wirksam sind.[2]) Bei dem Versuche, letzteres noch weiter zu verallgemeinern,[3]) beging jedoch Maxwell ein Versehen, da seine Voraussetzung, dass man durch passende Wahl der Coordinaten immer bewirken könne, dass der Ausdruck für die lebendige Kraft nur die Quadrate der Momente enthält, wie Lord Kelvin zeigte, im allgemeinen unzulässig ist. Dieses Versehen lässt sich jedoch leicht korrigieren, wenn man

1) Phil. mag. IV, vol. 35, 1868, scient. pap. II pag. 26.

2) Boltzmann, Sitz.-Ber. d. Wien. Akad. d. Wissensch. Bd. 58, 63, 66, 72, 74, 76.

3) Maxwell, on Boltzmanns theorem on the average distribution of energie. Cambr. phil. trans. vol. XII, part. III, 1878, scient. pap. II pag. 713.

4) Nature, 13. August 1891.

Maxwells Schlüsse verhältnissmässig unbedeutend modificiert. Um diess zu zeigen, knüpfen wir ganz an die zuletzt citierte Abhandlung Maxwells an und verstehen wie Maxwell (scient. pap. pag. 720) unter $b_1, b_2 \cdots b_n$ generalisierte Coordinaten, unter $a_1, a_2 \cdots a_n$ die betreffenden Momente. Wir müssen dann bei dem Ausdrucke 42 Maxwells (l. c. pag. 724) stehen bleiben und also für lebendige Kraft schreiben

$$T = \tfrac{1}{2}\,[11]\,a_1^2 + [12]\,a_1\,a_2 \cdots$$

Alle Schlüsse Maxwells bis incl. zur Gleichung 29 (l. c. pag. 722) sind vollkommen richtig. Um auch die weiteren Schlüsse einwurfsfrei zu machen, könnte man statt Maxwells Deduction von da ab die folgende setzen. Wir wollen unter α lineare Functionen der Momente a verstehen, also setzen:

$$\alpha_h = \sum_{k=1}^{k=n} c_{hk}\,a_k$$

Dann können wir die Coefficienten c immer so wählen, dass 1. ihre Determinante Θ gleich eins, also

$$\Theta = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdot\cdot \\ c_{21} & \cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot \end{vmatrix} = 1$$

ist und 2. die doppelte lebendige Kraft die Form

$$2\,T = \sum_{i=1}^{i=n} \mu_i\,\alpha_i^2$$

annimmt.

Dabei sind die Coefficienten c und μ Functionen der generalisierten Coordinaten $b_1 \cdot\cdot b_n$, die α dagegen werden im Allgemeinen nicht als Momente aufgefasst werden können, welche zu irgend welchen generalisierten Coordinaten gehören. Ich will sie daher, um jeden Zweifel zu beseitigen, Momentoide nennen.

Die Winkelgeschwindigkeiten um die drei Hauptträgheitsachsen bei allseitiger Drehung eines festen Körpers sind ein Beispiel hiefür.

$\frac{1}{2}\mu_i\,\alpha_i^2$ will ich als den auf das Momentoid α_i entfallenden Teil der gesamten lebendigen Kraft bezeichnen. Wegen $\Theta = 1$ erhalten wir zunächst $d a_1\, d a_2 \cdots d a_n = d\alpha_1\, d\alpha_2 \cdots d\alpha_n$. Führen wir links statt a_1, rechts statt α_1 die Variable T ein, so folgt

$$\frac{1}{\frac{dT}{da_1}}\, dT\, da_2\, da_3 \cdots da_n = \frac{1}{\frac{dT}{d\alpha_1}}\, dT\, d\alpha_2\, d\alpha_3 \cdots d\alpha_n$$

dividieren wir durch dT weg und berücksichtigen, dass

$$\frac{dT}{da_1} = \dot{b}_1,\ \frac{dT}{d\alpha_1} = \mu_1\,\alpha_1,$$

so folgt

$$\frac{1}{\dot{b}_1}\, da_2\, da_3 \,..\, da_n = \frac{1}{\mu_1\,\alpha_1}\, d\alpha_2\, d\alpha_3 \cdots d\alpha_n$$

Aus Maxwells Gleichung 28 (l. c. pag. 721) folgt für die Anzahl der Systeme, für welche die generalisierten Coordinaten zwischen den Grenzen b_1 und $b_1 + db_1 \cdots b_n$ und $b_n + db_n$, die Momentoide aber zwischen den Grenzen α_2 und $\alpha_2 + d\alpha_2 \cdots \alpha_n$ und $\alpha_n + d\alpha_n$ liegen, während α_1 durch die Gleichung der lebendigen Kraft bestimmt ist, der Wert

$$\frac{NC}{\mu_1\,\alpha_1}\, db_1 \cdots db_n\, d\alpha_2 \cdots d\alpha_n$$

Führt man nun die Integrationen genau so aus, wie es Maxwell thut, so gelangt man zu dessen Gleichung 45, welche somit vollständig richtig ist.

Bestimmt man die Wahrscheinlichkeit, dass die auf das Momentoid α_n entfallende lebendige Kraft $\frac{\mu_n\alpha_n^2}{2}$ zwischen den Grenzen k_n und $k_n + dk_n$ liegt, so gelangt man wieder genau zu dem Maxwellschen Ausdruck 51 (l. c. pag. 725).

Es stellen daher auch die Maxwellschen Ausdrücke 52 und 53 (l. c. pag. 726) den Mittelwert und den Maximalwert der auf irgend ein Momentoid entfallenden lebendigen Kraft dar. An Stelle des Maxwellschen Satzes, dass die mittlere lebendige Kraft für jede Coordinate den gleichen Wert hat, tritt daher der Satz, dass der Mittelwert der auf jedes Momentoid entfallenden lebendigen Kraft derselbe ist.

Da die Anzahl der Momentoide immer dieselbe ist, wie die der Beweglichkeitsgrade, so bleibt auch der von Maxwell eingangs (l. c. pag. 716) angeführte Satz richtig, dass die mittlere lebendige Kraft zweier gegebener Teile des Systems sich so verhält, wie die respektive Zahl ihrer Beweglichkeitsgrade. Dabei kann die lebendige Kraft T_k eines jeden der Teile nach Belieben auch die Produkte verschiedener p_k enthalten, wenn p_k die Momente der allgemeinen Coordinaten des betreffenden Teiles sind. Aber es darf T_k nicht das Produkt eines p_k in ein anderes Moment enthalten, welches nicht zu den p_k gehört. Speziell also für sogenannte mehratomige Gasmoleküle, deren Zustand durch verallgemeinerte Coordinaten bestimmbar ist, wird der Satz unverändert gelten.

Da $2\frac{\partial T}{\partial b}$ jedenfalls gleich $\sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i^2 \frac{\partial \mu}{\partial b}$ ist, so bleibt auch mein Beweis des zweiten Hauptsatzes[1]) richtig, worin jedoch ebenfalls unter q_h nicht die zu den Coordinaten p_h gehörigen Momente, sondern die Momentoide verstanden werden müssen.

1) Borchard-Kronecker's Journal Bd. 100, pag. 201, 1885.

Ueber die von Lord Kelvin als Stichproben (test-cases) vorgeschlagenen speziellen Fälle.

§ 2. Bewegung eines materiellen Punktes in einer Ebene.

Ich glaube, dass unter diesen Modifikationen der Beweis Maxwells für die im vorigen Paragraphen erwähnten Lehrsätze ein befriedigender ist; ausserdem habe ich schon früher[1]) einen auf ganz anderer Basis beruhenden Beweis dieses Satzes geliefert. Ich glaube daher, dass seine Richtigkeit als Lehrsatz der analytischen Mechanik kaum angezweifelt werden kann.[2]) Da ich selbst nur mühsam durch Betrachtung vieler speziellen Fälle[3]) zu meinem Satz gelangte, so weiss ich den Wert einer steten Erläuterung allgemeiner Sätze durch spezielle Beispiele zu schätzen und will mich daher noch mit einigen der von Lord Kelvin a. a. O. als Stichproben vorgeschlagenen speziellen Beispielen beschäftigen und zwar zunächst mit dem letzten, weil es das einfachste ist, und weil

---

1) Ueber das Wärmegleichgewicht zwischen mehratomigen Gasmolekülen, 1. Abschnitt: Bewegung der Atome in den Molekülen. Sitz.-Ber. d. Wiener Akad. Band 3, 9. März 1871. — Einige allgemeine Sätze über Wärmegleichgewicht, ebd. 13. April 1871; in der letzten Abhandlung habe ich auch schon von generalisierten Coordinaten Gebrauch gemacht.

2) Eine hievon völlig getrennte Frage ist die, ob solche Systeme eine genügend durchgreifende Analogie mit warmen Körpern zeigen. Diese Frage soll hier nicht erörtert werden; vergleiche jedoch hierüber Wiedemanns Beiblätter Bd. 5 pag. 403, 1881.

3) Studien über das Gleichgewicht der lebendigen Kraft. Sitz.-Ber. d. Wien. Akad. Bd. 58, 8. Oktober 1868, — Lösung eines mechanischen Problemes, ebd. 17. Dezember 1868. — Einige allgemeine Sätze über Wärmegleichgewicht, Schluss des 2. Abschnittes. (l. c.) — Bemerkungen über einige Probleme der mechanischen Wärmetheorie. Wien. Sitz.-Ber. Bd. 75. 11. Jänner 1877. Schluss des 3. Abschnittes etc.

ich den von Herrn Tait einmal citierten Ausspruch de Morgans respektire, welcher ungefähr besagt, dass zu lange Formeln oft nicht gelesen werden.

Ein materieller Punkt von der Masse eins bewege sich in der xy-Ebene. x, y seien seine Coordinaten, q seine Geschwindigkeit, u, v deren Componenten in den Coordinatenrichtungen und θ deren Winkel mit der positiven Abscissenachse, den wir von Null bis 2π zählen. Das Potenzial V sei eine beliebige Funktion der Coordinaten. Wir nehmen an, dass die Bewegung nicht ins Unendliche geht, sich auch nicht assymptotisch einer gewissen Grenze nähert und dass alle möglichen Wertekombinationen von x, y und θ, welche mit der Gleichung der lebendigen Kraft vereinbar sind, mit beliebiger Annäherung erreicht werden, wenn sich nur das Bewegliche durch eine genügend lange Zeit T bewegt.

Wir wollen senkrecht zur xy-Ebene eine z-Coordinate errichten und irgend einen Zustand des Beweglichen dadurch charakterisieren, dass wir über dem Punkte der xy-Ebene, wo sich das Bewegliche befindet, den Winkel θ als z-Coordinate auftragen, welchen seine Geschwindigkeit mit der positiven Abscissenachse bildet. Den Punkt des Raumes mit den Coordinaten x, y, θ nennen wir dann den Punkt, welcher den Zustand des Beweglichen charakterisiert oder kurz den augenblicklichen Zustandspunkt.

Wir können unsere Annahme dann dahin aussprechen, dass der Zustandspunkt im Verlauf der Zeit T alle Punkte eines endlichen Cylinders (des Zustandscylinders) durchläuft, welcher die Höhe 2π in der Richtung der z-Achse hat. Von der Basis bis zur Gegenfläche dieses Cylinders und umgekehrt macht der Zustandspunkt stets einen Sprung; sonst geschieht seine Bewegung kontinuierlich.

Wir nehmen nun an, dass zu irgend einer Zeit t das Bewegliche sich in irgend einem Punkte x, y befinde, dass seine Geschwindigkeit mit der positiven Abscissenachse den

Winkel θ bilde und in den Coordinatenrichtungen die Componenten u, v habe. Der Zustandspunkt befindet sich also zur Zeit t an der Stelle A des Raumes, welche die Coordinaten x, y, θ hat.

Nach Verlauf einer sehr kleinen Zeit δt also zur Zeit $t + \delta t$ soll das Bewegliche die Coordinaten x', y' haben. Seine Geschwindigkeit soll mit der positiven Abscissenachse den Winkel θ' bilden und in den Coordinatenrichtungen die Componenten u', v' haben.

Die Lage des Zustandspunkts zur Zeit $t + \delta t$ soll mit A' bezeichnet werden. A' soll der dem Punkte A entsprechende Punkt heissen. Betrachten wir δt als constant, so wird jedem Punkte innerhalb des Zustandscylinders ein anderer Punkt daselbst entsprechen. Jedesmal, wenn sich zu irgend einer Zeit der Zustandspunkt in irgend einem Raumpunkte befunden hat, wird er sich nach Verlauf der Zeit δt in dem diesem Raumpunkte entsprechenden befinden; und umgekehrt kann er niemals nach dem entsprechenden Punkte kommen, ohne genau vor der Zeit δt in demjenigen Raumpunkte gewesen zu sein, dem der vorhergenannte Raumpunkt entspricht.

Bekanntlich ist:

$$x' = x + q \cos\theta \cdot \delta t, \quad y' = y + q \sin\theta \cdot \delta t \qquad 1)$$
$$u' = u + \xi \cdot \delta t, \quad v' = v + \eta \cdot \delta t$$

wobei $\xi = -\frac{\partial V}{\partial x}$, $\eta = -\frac{\partial V}{\partial y}$ die Componenten der auf das Bewegliche wirkenden Kraft, also Funktionen von x und y sind. Ferner ist

$$\theta' = \operatorname{arctg} \frac{v'}{u'},$$

was nach Substitution der obigen Werte liefert

$$\theta' = \theta + (\eta \cdot \cos\theta - \xi \sin\theta) \frac{\delta t}{q}. \qquad 2)$$

Wir konstruieren nun ein unendlich kleines, rechtwinkliges Parallelepiped $dx dy d\theta$, dessen eine Ecke im Punkte A liegt. Derjenige Bruchteil der gesammten Zeit T, während dessen der Zustandspunkt innerhalb dieses Parallelepipedes liegt, sei dt. Es ist dies die Zeit, während welcher die 3 Variabeln x, y, θ zwischen den Grenzen x und $x + dx$, y und $y + dy$, θ und $\theta + d\theta$ eingeschlossen sind. Wir können dann jedenfalls setzen:

$$dt = f(x, y, \theta)\, dx\, dy\, d\theta \qquad 3)$$

Wir konstruieren nun zu jedem Punkte des Parallelepipedes $dx dy d\theta$ den entsprechenden Punkt, wodurch das Parallelepiped $dx' dy' d\theta'$ erhalten werden soll. Derjenige Bruchteil der Zeit T nun, während dessen der Zustandspunkt innerhalb $dx' dy' d\theta'$ liegt, ist nach Formel 3)

$$dt' = f(x', y', \theta')\, dx'\, dy'\, d\theta'.$$

Da aber nach unserer Definition der Zustandspunkt, so oft er in das Parallelepiped $dx\, dy\, d\theta$ eingetreten ist, jedesmal nach der Zeit δt in das Parallelepiped $dx'\, dy'\, d\theta'$ eintritt, und auch die Zeitdifferenz zwischen dem Austritte aus dem 1. und 2. Parallelepipede wieder genau δt ist, so folgt, dass der Zustandspunkt in beide Parallelepipede genau gleich oft eintritt und auch jedesmal in beiden gleich lang verweilt, dass also $dt' = dt$ oder

$$f(x', y', \theta')\, dx'\, dy'\, d\theta' = f(x, y, \theta)\, dx\, dy\, d\theta$$

ist. Nun ist aber

$$dx'\, dy'\, d\theta' = \begin{vmatrix} \frac{\partial x'}{\partial x}, & \frac{\partial x'}{\partial y}, & \frac{\partial x'}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y'}{\partial x}, & \frac{\partial y'}{\partial y}, & \frac{\partial y'}{\partial \theta} \\ \frac{\partial \theta'}{\partial x}, & \frac{\partial \theta'}{\partial y}, & \frac{\partial \theta'}{\partial \theta} \end{vmatrix} \cdot dx\, dy\, d\theta.$$

Da δt const, $q^2 = \text{const} - 2V$ ist, so liefert die Gleichungen 1) und 2)

$$\frac{\partial x'}{\partial x} = 1 + \xi \cos\theta \cdot \frac{\delta t}{q}, \quad \frac{\partial y'}{\partial y} = 1 + \eta \sin\vartheta \cdot \frac{\delta t}{q}$$

$$\frac{\partial \theta'}{\partial \theta} = 1 - (\xi \cos\theta + \eta \sin\theta) \frac{\delta t}{q}$$

Vernachlässigt man die Glieder von der Ordnung δt^2, so reduciert sich aber die Funktionaldeterminante auf

$$\frac{\partial x'}{\partial x} \cdot \frac{\partial y'}{\partial y} \cdot \frac{\partial \theta'}{\partial \theta} = 1,$$

man hat also

$$dx'\, dy'\, d\theta' = dx\, dy\, d\theta$$

und daher auch $f(x', y', \theta') = f(x, y, \theta)$. Da man nun vom Parallelepipede $dx'\, dy'\, d\theta'$ wieder zu dem diesem entsprechenden, dann wieder zu dem dem neuen entsprechenden u. s. w. übergehen kann, so folgt, dass $f(x, y, \theta)$ überhaupt constant, daher $dt = C\, dx\, dy\, d\theta$ ist. Es stimmt diess vollkommen mit dem schon in meiner bereits citierten Abhandlung „Lösung eines mechanischen Problems“ gefundenen Resultate.

Lord Kelvin bezeichnet mit $N d\theta\, dr$ die Zahl, wie oft während der Zeit T das Bewegliche ein Flächenelement, dessen Länge in der Bewegungsrichtung ds, dessen Breite senkrecht darauf dr ist, so durchsetzt, dass dabei θ zwischen θ und $\theta + d\theta$ liegt. Da das Bewegliche jedesmal die Zeit $ds : q$ in dem Flächenelement zubringt, so ist der Bruchteil von T, während dessen das Bewegliche in $dr\, ds$ weilt und zugleich θ zwischen θ und $\theta + d\theta$ liegt,

$$\frac{N}{q}\, dr\, ds\, d\theta.$$

Da aber nach dem eben gefundenen diese Zeit

$$C\, dr\, ds\, d\theta$$

sein muss, so folgt $N = Cq$. Es ist also N vom Winkel θ

vollständig unabhängig und nicht nur Lord Kelvins Coefficient A_1, sondern auch A_2 und alle folgenden verschwinden.

Ich kann kaum bezweifeln, dass Lord Kelvin von diesem Resultate seiner Stichprobe befriedigt sein wird.

§ 3. Ueber die Verteilung der lebendigen Kraft unter Kelvins Dublets.

Die übrigen Beispiele Lord Kelvins beziehen sich auf ein Theorem, welches zwar in innigem Zusammenhange mit dem früher besprochenen steht; aber doch keineswegs damit identisch, noch auch ein specieller Fall davon ist; nämlich auf das Problem des Wärmegleichgewichtes unter mehratomigen Gasmolekülen. Es lässt sich bei diesem letzteren Probleme immer leicht von einer bestimmten Verteilung der lebendigen Kraft beweisen, dass sie weder durch die innere Bewegung der Moleküle, noch durch die Zusammenstösse verändert wird.

Seien $p_1, p_2 \cdots p_n$ die generalisierten Coordinaten, durch welche die Lage aller Bestandtheile eines Moleküles gegen dessen Schwerpunkt einschliesslich der Drehung desselben bestimmt ist. $q_1, q_2 \cdots q_n$, die dazu gehörigen Momente, T die gesammte lebendige Kraft des Moleküles und V die Potentialfunktion der inneren Kräfte desselben, u, v, w die Geschwindigkeitscomponenten seines Schwerpunktes, endlich A und h Constanten; dann ist dies diejenige Verteilung der lebendigen Kraft, wo die Anzahl der Moleküle in der Volumeinheit, für welche die Variabeln $u, v, w, p_1, p_2 \cdots p_n, q_1, q_2 \cdots q_n$ zwischen den Grenzen u_1 und $u_1 + du_1 \cdots q_n$ und $q_n + dq_n$ liegen, gleich $Ae^{-k(V+T)} du \cdots dq_n$ ist. Sind mehrere Gattungen von Molekülen vorhanden, so muss die Constante h, nicht aber A für alle denselben Werth haben.

Die Richtigkeit dieses Resultates in den von Lord Kelvin vorgeschlagenen Spezialfällen zu verificieren, halte ich für so leicht, dass ich mich nicht damit aufhalten will. Der zweite Beweis dagegen, dass die durch obige Formel ausgedrückte Verteilung der lebendigen Kraft die einzig mögliche ist, lässt sich nur indirekt durch den Nachweis erbringen, dass eine gewisse eigentümliche Funktion durch die Zusammenstösse nur vergrössert werden kann. Da diese Funktion einerseits mit der von Clausius als Entropie bezeichneten Grösse, anderseits mit der Wahrscheinlichkeit des betreffenden Zustandes auf's innigste zusammenhängt, [1]) so erscheint dadurch der zweite Hauptsatz als ein reiner Wahrscheinlichkeitssatz.

Diesen letzteren Beweis für das von Lord Kelvin ersonnene, mit elastischen Federn ausgestattete Molekül, welches wir nach seinem Vorgange Dublet nennen wollen, durchzuführen, scheint mir von genügendem Interesse zu sein (siehe Motto!). Unter einem Dublet verstehen wir die Vereinigung zweier materieller Punkte mit den Massen m und m'', welche sich mit einer ihrer Entfernung proportionalen Kraft anziehen. m'' (der Kern) soll sonst niemals von einer anderen Kraft afficiert werden. Die Massen m (Schalen) je zweier Dublets sollen, wenn sie sich bis zur Distanz D'' nähern, wie elastische Kugeln an einander abprallen. Ausserdem sollen noch einfache Atome mit den Massen m' vorhanden sein, welche unter einander in der Distanz D', an den Schalen in der Distanz D ebenso abprallen. Wir wollen immer kurz „Schale" statt Centrum der Schale und „Kern" statt Centrum des Kerns sagen. Es seien x, y, z die Coordinaten des Kerns eines Dublets bezüglich eines rechtwinkligen Coordinatensystems, dessen Anfangspunkt im Mittelpunkt der Schale liegt und dessen Axen fixe Richtungen haben; u'', v'', w'' die absoluten, $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ die Geschwindigkeitscomponenten des Kernes relativ gegen die Schale, g, h, k die Geschwindigkeitscomponenten des Schwer-

1) Wien. Sitz.-Ber. Bd. 76, 1877, Bd. 78, 1878.

punkts des Dublets, u, v, w, die der Schale; u_1, v_1, w_1 die eines einzelnen Atoms; endlich $\chi(x, y, z, \mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w}, g, h, k)\, d\xi \cdot\cdot dk$ die Anzahl der Dublets in der Volumeneinheit, für welche die Variabeln $x \cdot\cdot k$ zur Zeit t zwischen den Grenzen

$$x \text{ und } x + dx \cdots k \text{ und } k + dk$$

liegen und

$$f(u_1, v_1, w_1)\, du_1\, dv_1\, dw_1$$

die Zahl der Einzelatome in der Volumeneinheit, deren Geschwindigkeitscomponenten u_1, v_1, w_1 zwischen den Grenzen

$$u_1 \text{ und } u_1 + du_1,\ v_1 \text{ und } v_1 + dv_1,\ w_1 \text{ und } w_1 + dw_1$$

liegen. Dann ist der Ausdruck, welcher durch die Zusammenstösse nur abnehmen kann und welchen wir kurz die Entropie nennen,

$$E = \int \chi l \chi dx \cdot\cdot dk + \int f l f du_1\, dv_1\, dw_1$$

wobei die Integration über alle möglichen Werte der differentiierten Grössen zu erstrecken ist. l bedeutet den natürlichen Logarithmus. Der erste Addend im Ausdrucke E kann folgendermassen erhalten werden. Wir bilden die Grösse $l\chi$ für jedes in der Volumeneinheit enthaltene Dublet; d. h. wir setzen in $l\chi$ für alle Variabeln diejenigen Werte ein, welche sie für das betreffende Dublet haben. Alle die Werte von $l\chi$ summieren wir dann. Wir wollen daher, um diese Bildungsweise symbolisch auszudrücken, diesen Addenden mit $\Sigma l\chi$ bezeichnen. Aehnlich bezeichnen wir den 2. Addenden mit Σlf, was eine Summation über alle in der Volumeneinheit befindlichen Einzelatome ausdrückt.

Um zu beweisen, dass E nur abnehmen kann, suchen wir zuerst die Veränderung, welche $\Sigma l\chi$, wenn keine Zusammenstösse stattfänden, bloss durch die relative Bewegung von Kern und Schale in den Dublets erführe. Dadurch würden offenbar g, h, k gar nicht verändert. Dagegen könnte man zu irgend einer Zeit t setzen

$$x = A \sin (at + B), \quad \mathfrak{u} = Aa \cos (at + B)$$

und zur Zeit 0

$$x_0 = A \sin B, \quad \mathfrak{u}_0 = Aa \cos B.$$

Betrachtet man alle Dublets, für welche A und B zwischen gewissen, unendlich nahen Grenzen eingeschlossen sind, so ist

$$dx\, d\mathfrak{u} = dx_0\, d\mathfrak{u}_0 = Aa\, dA\, dB \tag{4}$$

und ebenso für die y- und z-Axe

$$dy\, d\mathfrak{v} = dy_0\, d\mathfrak{v}_0, \quad dz\, d\mathfrak{w} = dz_0\, d\mathfrak{w}_0. \tag{5}$$

Man überzeugt sich leicht, dass die Gleichung

$$dx\, dy\, dz\, d\mathfrak{u}\, d\mathfrak{v}\, d\mathfrak{w} = dx_0\, dy_0\, dz_0\, d\mathfrak{u}_0\, d\mathfrak{v}_0\, d\mathfrak{w}_0$$

auch gilt, wenn Kern und Schale eine beliebige andere Centralbewegung machen. (Vgl. meine schon citierte Abhandlung über das Wärmegleichgewicht unter mehratomigen Gasmolekülen.) Würden nun gar keine Zusammenstösse erfolgen, so würden genau für dieselben Dublets, für welche zur Zeit Null die Variabeln zwischen den Grenzen x_0 und $x_0 + dx_0 \cdots k$ und $k + dk$ lagen, dieselben zur Zeit t zwischen den Grenzen x und $x + dx \cdots k$ und $k + dk$ liegen. Schreiben wir daher für einen Augenblick unter dem Functionszeichen χ noch die Variable t explicit, um den Fall einer Veränderlichkeit von χ mit der Zeit nicht von vorne herein auszuschliessen, so ist die Zahl der ersten Dublets

$$\chi (x_0 \cdots \mathfrak{w}_0, g, h, k, 0)\, d\xi_0 \cdots dk = \chi_0\, d\xi_0 \cdots dk$$

die der letzteren aber

$$\chi (x \cdots k, t)\, dx \cdots dk = \chi\, dx \cdots dk.$$

Daher hat man

$$\chi_0\, dx_0 \cdots dk = \chi\, dx \cdots dk$$

und wegen 4) und 5)

$$\chi_0 = \chi,$$

daher auch

$$\chi_0\, l\chi_0\, dx_0 \cdots dk = \chi\, l\chi\, dx \cdots dk.$$

Die Integration dieser letzten Gleichung über alle möglichen Werte der Variabeln, deren Differentiale sie enthält, zeigt sofort, dass die Grösse $\Sigma l\chi$ durch die innere Bewegung der Dublets keine Veränderung erfährt, was natürlich auch für jede Centralbewegung richtig bleibt. Es bleibt daher nur der Einfluss der Zusammenstösse zu berechnen.

Wir wollen da zunächst statt $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w}, g, h, k$ die absoluten Geschwindigkeiten u, v, w, u'', v'', w'' einführen. Da $(m+m'')\,g = mu + m''u''$, $\mathfrak{u} = u'' - u$, so folgt

$$dg\, d\mathfrak{u} = du\, du''.$$

Setzen wir daher die Anzahl der Dublets in der Volumeneinheit, für welche die Variabeln $x, y, z, u'', v'', w'', u, v, w$ zwischen den Grenzen x und $x + dx \cdot\cdot w$ und $w + dw$ liegen, gleich $F(x, y, z, u'', v'', w'', u, v, w)\, dx \cdot\cdot dw$, wobei

$$F = \chi\left(x, y, z, u'' - u \cdot\cdot \frac{mu + m''u''}{m + m''} \cdot\cdot\right),$$

so wird

$$\sum l\chi = \int F l F\, dx \cdot\cdot dw = \sum l F,$$

wo die Summation wieder über alle in der Volumeneinheit enthaltenen Dublets zu erstrecken ist. Wir bezeichnen nun mit $\delta_1 \Sigma l F$ den Zuwachs, welchen $\Sigma l F$ durch die Zusammenstösse der Dublets unter einander, mit $\delta_2 \Sigma l f$, denjenigen, den $\Sigma l f$ durch die Zusammenstösse der Einzelatome untereinander und mit $\delta_{12}(\Sigma l F + \Sigma l f)$ denjenigen Zuwachs, den die eingeklammerte Grösse durch die Zusammenstösse je eines Dublets mit einem Einzelmolekül während der Zeit δt erfährt.

Um $\delta_{12}(\Sigma l F + \Sigma l f)$ zu berechnen, heben wir von allen Zusammenstössen, welche eine Schale mit einem Einzelatom in der Volumeneinheit während der Zeit δt erfährt, diejenigen hervor, für welche die Geschwindigkeitscomponenten der Schale im Momente des Stosses (aber noch vorher) zwischen den Grenzen u und $u + du$, v und $v + dv$, w und $w + dw$, die des Kerns zwischen den Grenzen u'' und $u'' + du''$,

v'' und $v''+dv''$, w'' und $w''+dw''$, die Coordinaten des Kerns relativ gegen die Schale zwischen x und $x+dx$, y und $y+dy$, z und $z+dz$, ferner die Geschwindigkeitscomponenten des gemeinsamen Schwerpunktes der Schale und des Einzelatoms zwischen den Grenzen p und $p+dp$, q und $q+dq$, r und $r+dr$, endlich die Richtung der Centrilinien der stossenden Atome im Momente des Stosses innerhalb eines unendlich schmalen Kegels von bestimmter Richtung im Raume und unendlich kleiner Oeffnung $d\lambda$ liegt. Die Geschwindigkeitscomponenten des Einzelatomes im Momente des Beginnes des Stosses sind dann

$$u_1 = \frac{m+m'}{m'}\,p - \frac{m}{m'}\,u, \quad v_1 = \frac{m+m'}{m'}\,q - \frac{m}{m'}\,v, \qquad 6)$$
$$w_1 = \frac{m+m'}{m'}\,r - \frac{m}{m'}\,w.$$

Für die Zahl der Zusammenstösse, welche in der Volumeneinheit während der Zeit δt in der hervorgehobenen Weise geschehen, findet man leicht den Wert:

$$dn = D^2 \cdot F(x, y, z, u'', v'', w'', u, v, w)\, f(u_1, v_1, w_1)$$
$$\times\, V\varepsilon dx \cdot \cdot dw''\, du\, dv\, dw\, du_1\, dv_1\, dw_1\, d\lambda\, \delta t,$$

Hiebei ist V die relative Geschwindigkeit beider Atome im Momente des Stosses, ε der Cosinus des spitzen Winkels derselben mit der Centrilinie. Führen wir statt u_1, v_1, w_1 die Variabeln p, q, r mittelst der Gleichungen 6) ein, so folgt

$$dn = D^2 F f_1 \frac{(m+m')^3}{m'^3}\, V\varepsilon\, dx \cdot \cdot dw''\, du\, dv\, dw\, dp\, dq\, dr\, d\lambda\, \delta t,$$

wobei der unten angehängte Index 1 jedesmal ausdrückt, dass unter dem Funktionszeichen die drei Werte 6) zu substituieren sind.

Durch jeden der hervorgehobenen Zusammenstösse verliert eine Schale die Geschwindigkeitscomponenten u, v, w, durch alle dn Zusammenstösse wird also ΣlF um $dn\,lF$ vermindert.

Nach jedem der hervorgehobenen Zusammenstösse sollen die Geschwindigkeitscomponenten der Schale zwischen den Grenzen u' und $u'+du'$, v' und $v'+dv'$, w und $w'+dw$, liegen. Dadurch, dass Schalen mit diesen neuen Geschwindigkeitscomponenten geschaffen werden, wächst ΣlF um $dnlF'$, wobei der oben angehängte Strich ausdrückt, dass unter dem Funktionszeichen $x \cdots w'', u', v', w'$ zu substituieren ist. Wir nehmen an, dass die Zusammenstösse momentan geschehen, weshalb die Variabeln $x \cdots w''$ durch die Zusammenstösse nicht verändert werden. Es hat daher ΣlF durch die hervorgehobenen Zusammenstösse im Ganzen den Zuwachs $(lF' - lF)\,dn$ erhalten. Ganz ebenso findet man, dass Σlf durch die hervorgehobenen Zusammenstösse während der Zeit δt den Zuwachs $(lf_1' - lf_1)\,dn$ erhalten hat, wobei die beiden Indices unten und oben ausdrücken, dass unter dem Funktionszeichen die Geschwindigkeitscomponenten des stossenden Einzelatoms nach dem Stosse

$$u_1' = \frac{m+m'}{m'}p - \frac{m}{m'}u', \quad v_1' = \frac{m+m'}{m'}q - \frac{m}{m'}v', \qquad 7)$$
$$w_1' = \frac{m+m'}{m'}x - \frac{m}{m'}w'$$

zu substituieren sind. Der gesammte Zuwachs, den $\Sigma lF + \Sigma lf$ durch alle hervorgehobenen Zusammenstösse erfährt, ist daher $dn\,(lF' + lf_1' - lF - lf_1)$. Hieraus würde der gesammte Zuwachs, welchen wir mit $\delta_{12}\,(\Sigma lF + \Sigma lf)$ bezeichneten, durch Integration über alle Variabeln erhalten, deren Differenziale in dn enthalten sind.[1])

1) Nimmt man an, dass das zweite der zusammenstossenden Atome kein Einzelatom, sondern ebenfalls eine Schale gewesen ist, so gelangt man durch vollkommen analoge Schlüsse zur vollkommen analogen Gleichung

$$2\,\delta_1 \Sigma lF = \int dn (lF' + lF_1', - lF - lF_1).$$

Diese Integration soll nun durch einen eigentümlichen Kunstgriff bewerkstelligt werden. Mit dem obigen Gliede, welches die „hervorgehobenen" Zusammenstösse in das Integrale liefern, vereinigen wir das Glied, welches die „entgegengesetzten" Zusammenstösse liefern, und ebenso mit jedem andern Gliede des Integrales das durch die „entgegengesetzten" Zusammenstösse gelieferte Glied.

Wir sagen ein Zusammenstoss ist einem anderen entgegengesetzt, wenn beim ersteren jedes der stossenden Atome im Momente des Beginnes genau denselben Zustand hat, wie beim letzteren im Momente des Endes und umgekehrt; ausserdem müssen natürlich die Mittelpunkte der beiden Atome vertauscht sein, damit vor dem Stosse Annäherung stattfindet. Die übrigen Variabeln $x \cdots w''$ sollen für beiderlei Zusammenstösse genau zwischen denselben Grenzen eingeschlossen sein. In der nebenstehenden Zeichnung soll der grösste Kreis eine Schale, der kleinste einen Kern, der mittlere ein Einzelatom darstellen; die vom Centrum aus gezoge-

---

Dabei ist

$$F_1 = F(x_1, y_1, z_1, u_1'', v''_1, w''_1, u_1, v_1, w_1)$$
$$F_1' = F(x_1, y_1, z_1, u_1'', v_1'', w_1'', u_1', v_1', w_1').$$

u_1, v_1, w_1 und u_1', v_1', w_1', die Geschwindigkeitscomponenten der zweiten Schale vor und nach dem Stosse muss man sich wieder durch Gleichungen ausgedrückt denken, die den Gleichungen 6 und 7 analog sind. x_1, y_1, z_1, u_1'', v_1'', w_1'' sind die übrigen, den Zustand des zweiten Dublets im Momente des Stosses bestimmenden Grössen. Endlich ist

$$dn = D''^2 F F_1 \; V\varepsilon \, dx \cdots dw'' \, du \, dv \, dw \, dx_1 \cdots dw_1'' \, dp \, dq \, dr \, d\lambda \, \delta t.$$

Ebenso würde sich ergeben

$$2\delta_2 \Sigma l f = \int dn \, (lf' + lf_1' - lf - lf_1),$$

wobei

$$dn = D'^2 f f_1 \; V\varepsilon \, du \, dv \, dw \, dp \, dq \, dr \, d\lambda \, \delta t.$$

Die angewandten Zeichen dürften hier ohne weiters verständlich sein.

nen Pfeile sind die Geschwindigkeiten. Fig. 1 bedeutet die Constellation vor einem, Fig. 2 die nach demselben Zusammenstosse; Fig. 3 und 4 aber sind die Constellationen vor und nach dem umgekehrten Zusammenstosse. Pfeile, die mit gleicher Ziffer bezeichnet sind, haben immer gleiche Länge und gleiche Lage gegen die Centrilinie.

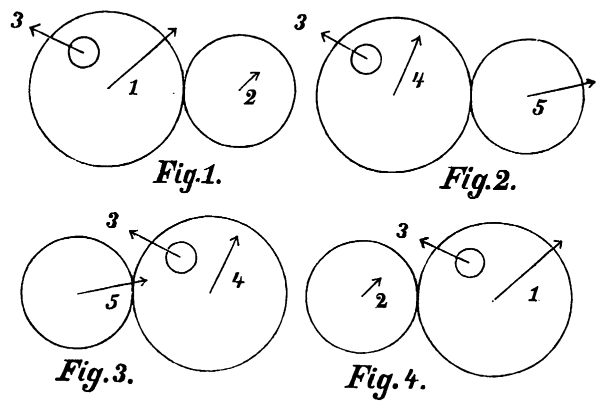

Fig. 1. *Fig. 2.* *Fig. 3.* *Fig. 4.*

Für alle Zusammenstösse, welche den früher hervorgehobenen entgegengesetzt verlaufen, liegen im Momente des Beginnes die Geschwindigkeitscomponenten der stossenden Schale zwischen den Grenzen

$$u' \text{ und } u' + du', \quad v' \text{ und } v' + dv', \quad w' \text{ und } w' + dw',$$

im Momente des Endes aber zwischen den Grenzen

$$u \text{ und } u + du, \quad v \text{ und } v + dv, \quad w \text{ und } w + dw.$$

Aehnliches gilt vom stossenden Einzelatome, wogegen die Bewegung des Schwerpunktes, die Grösse der relativen Geschwindigkeit und deren Winkel mit der Centrilinie für die entgegengesetzten Zusammenstösse ebenso gross ist wie für die ursprünglich hervorgehobenen. Durch jeden entgegengesetzten Zusammenstoss verliert eine Schale die Geschwindigkeitscomponenten u', v', w', ein Einzelatom die Geschwindigkeitscomponenten u_1', v_1', w_1', dagegen gewinnt eine

Schale die Componenten u, v, w, ein Einzelatom die Componenten u_1, v_1, w_1. Ist daher dn' während der Zeit δt in der Volumeneinheit die Zahl der den ursprünglich hervorgehobenen entgegengesetzten Zusammenstösse, so wächst durch diese letzteren $\Sigma lF + \Sigma lf$ um

$$dn'(lF + lf_1 - lF' - lf_1').$$

Daher wächst es durch die ursprünglich hervorgehobenen und die ihnen entgegengesetzten Stösse zusammen um

$$(lF' + lf_1' - lF - lf_1)\ (dn - dn').$$

Integriert man diesen Ausdruck über alle Werte der Variabeln, deren Differenziale in dn und dn' enthalten sind, so erhält man $2\,\delta_{12}\,(\Sigma lF + \Sigma lf)$, da man dann jeden Zusammenstoss doppelt zählt; einmal als ursprünglich hervorgehobenen, dann als entgegengesetzten. Da V, ε und $d\lambda$ durch den Stoss nicht geändert werden, so ist

$$dn' = D^2 F' f_1' \frac{(m^3 + m')^3}{m'^3} V\varepsilon\, dx \cdot\cdot dw''\, du'\, dv'\, dw'\, dp\, dq\, dr\, d\lambda\, \delta t.$$

Man findet zudem leicht (am leichtesten auf geometrischem Wege) $du'\, dv'\, dw' = du\, dv\, dw$ und erhält daher

$$\delta_{12}\,(\Sigma lF + \Sigma lf) = \frac{\delta t}{2}\int (lF' + lf_1' - lF - lf_1) \qquad 8)$$

$$(Ff_1 - F'f_1')\frac{(m+m')^3}{m'^3} V\varepsilon D^2\, du\, dv\, dw\, dp\, dq\, dr\, dx \cdot\cdot dw''\, d\lambda.$$

Man sieht sofort, dass sich in derselben Weise ergibt:

$$\delta_1\, \Sigma lF = 2\,\delta t \int (lF' + lF_1' - lF - lF_1)\,(FF_1 - F'F_1')\cdot$$
$$\cdot\ V\varepsilon\, D''^2\, dx \cdot\cdot dw''\, dx_1 \cdot\cdot dw_1''\, du\, dv\, dw\, dp\, dq\, dr\, d\lambda$$

$$\delta_2\, \Sigma lf = 2\,\delta t \int (lf' + lf_1' - lf - lf_1)\ (ff_1 - f'f_1')\cdot$$
$$\cdot\ V\varepsilon\, D'^2\, du\, dv\, dw\, dp\, dq\, dr\, d\lambda, \qquad 9)$$

wobei die Bezeichnungen dieselben sind, wie in der Anmerkung auf Seite 346.

Wir beschränken uns hier bloss auf die Betrachtung des stationären Zustands, wo F und f für alle Zeiten dieselben Funktionen der darin vorkommenden Variabeln sind. Für diesen sind die betrachteten Ursachen die einzigen, welche eine Veränderung von $\Sigma l F$ und $\Sigma l f$ bewirken könnten. Es ist daher die gesamte Veränderung, welche E während δt erfährt,

$$\delta E = \delta_{12} (\Sigma l F + \Sigma l f) + \delta_1 \Sigma l F + \delta_2 \Sigma l f.$$

Da alles, folglich auch E, unverändert bleibt, muss $\delta E = 0$ sein. Nun haben aber in den Integralen der Formeln 8) und 9) beide eingeklammerte Faktoren wesentlich das entgegengesetzte Vorzeichen, während die übrigen Grössen wesentlich positiv sind. Die Grösse unter den Integralzeichen ist daher wesentlich negativ und die Summe der Integrale, welche in δE erscheint, kann nur verschwinden, wenn für jeden Zusammenstoss:

$$F' f_1' = F f_1, \; F' F'_1 = F F_1, \; f' f_1' = f f_1 \qquad 10)$$

ist.

Betrachten wir zunächst den einfachsten Fall, dass die Schalen für einander vollständig durchdringlich sind, ebenso die Einzelatome für einander; nur zwischen einer Schale und einem Einzelatome soll jedesmal in der Distanz D Abprallen stattfinden. Dann bleibt nur die erste der Gleichungen 10), die aber für jeden möglichen Stoss gelten muss. Bezeichnen wir die Geschwindigkeit $\sqrt{u_1^2 + v_1^2 + w_1^2}$ eines Einzelatoms mit c_1, so ist f_1 offenbar nur Funktion von c_1, F dagegen kann als Funktion der folgenden 6 Variabeln ausgedrückt werden: 1. der beiden Geschwindigkeiten c und c'' von Schale und Kern, 2. der Distanz ϱ derselben (natürlich ihrer Centra), 3. der Winkel α und α'' der Richtungen von c und c'' mit der Geraden ϱ (letztere von der Schale gegen den Kern gezogen), 4. des Winkels β der Ebenen ϱc und $\varrho c''$.

Wir fassen nun einen Stoss ins Auge und bezeichnen die Werte dieser Variabeln im Momente des Stosses, jedoch noch vor demselben, ohne obern Index, die unmittelbar nach dem Stosse dagegen oben mit einem Striche; wir können offenbar die Lage der Centrilinie im Momente des Stosses und die Richtung von c_1 so wählen, dass c, α und β nach dem Stosse ganz beliebige Werte c', α', β' annehmen, welche für den Wert $c_1{}'$ der Variabeln c_1 nach dem Stosse reelle Werte liefern; dieser letztere ist durch die Gleichung der lebendigen Kraft $m' c_1'^2 + m c'^2 = m' c_1^2 + m c^2$ bestimmt. Die Werte der Variabeln c'', ϱ und α'' dagegen werden durch den Stoss nicht verändert. Die erste der Gleichungen 10) kann daher so geschrieben werden:

$$F(c'', \alpha'', \varrho, c, \alpha, \beta) \cdot f_1(c_1) = F(c'', \alpha'', \varrho, c', \alpha', \beta') \cdot$$
$$\cdot f_1\left(\sqrt{c_1^2 + \frac{m}{m'}(c^2 - c'^2)}\right)$$

Diese Gleichung muss für alle möglichen Werte der Variabeln c'', α'', ϱ, c, α, β, c', α', β' und c_1 erfüllt sein, woraus man mit Leichtigkeit findet:

$$f_1(c_1) = A_1 e^{-hm'c_1^2}, \quad F = A e^{-hmc^2}.$$

Hiebei sind A_1 und h reine Constanten; A dagegen kann noch die Variabeln c'', ϱ und α'' enthalten.

Man sieht sofort, dass hieraus die Gleichheit der mittleren lebendigen Kraft einer Schale und eines Einzelatoms folgt, und dass die Maxwellsche Geschwindigkeitsverteilung unter den Schalen und Einzelatomen erwiesen ist, ohne dass man Zusammenstösse der Schalen untereinander und der Einzelatome untereinander anzunehmen braucht. Die Annahme, dass auch solche Zusammenstösse vorkommen, ändert an der Verteilung der lebendigen Kraft gar nichts, da durch die gefundenen Werte von f_1 und F die beiden anderen der Gleichungen 10) identisch erfüllt werden. Dagegen wird durch den Umstand, dass der Kern keinerlei Stösse erfährt, die Giltigkeit des Satzes auch für diesen zwar nicht gestört, aber der Beweis erheblich erschwert. Denn würde auch der Kern Stösse erfahren, so würde sofort folgen, dass F von c'' in derselben Weise wie von c abhängt, und wir wären zu Ende. So aber müssen wir mit die Centralbewegung der Dublets weiterrechnen.

Man beweist zunächst leicht, dass bei der gefundenen Zustandsverteilung für jede Wertecombination von c'', ϱ, α'' die Werte von c, α, β durch die Zusammenstösse jede Veränderung durchschnittlich genau ebenso oft, wie die gerade entgegengesetzte erfahren. Werden daher auch gewisse Formen der Centralbewegung plötzlich durch einen Zusammenstoss zerstört, so entstehen doch wieder anderswo umgekehrt durch Zusammenstösse ebenso oft wieder dieselben Formen und es müsste daher dasselbe Verteilungsgesetz der Centralbewegungen auch fortbestehen bleiben, wenn plötzlich alle Zusammenstösse aufhörten.

Es ist nun sonderbar, dass gerade für das einfache, von Lord Kelvin angenommene Gesetz der Proportionalität der Centralkraft mit ϱ die nun noch nötige Rechnung am weitschweifigsten wird. Um daher nicht gezwungen zu sein, den angezogenen Satz M. Morgan's allzusehr zu ignorieren, will ich ein anderes Gesetz, z. B. $a\varrho + \frac{b}{\varrho^3}$, oder irgend eines voraussetzen, wobei der Winkel zweier sich folgender Apsidenrichtungen im allgemeinen zu π in keinem rationalen Verhältnisse steht.

Die Gesamtenergie eines Dublets ist

$$L = \frac{m c^2}{2} + \frac{m'' c''^2}{2} + \varphi(\varrho),$$

wobei φ die Potentialfunktion ist. Die doppelte Flächengeschwindigkeit der Centralbewegung (der Relativbewegung von Schale und Kern in der Bahnebene) ist

$$K = \varrho \sqrt{c^2 \sin^2 \alpha + c''^2 \sin^2 \alpha'' - 2cc'' \sin\alpha \sin\alpha'' \cos\beta},$$

die mit $m + m''$ multiplicierte Geschwindigkeit des Schwerpunkts des Dublets ist

$$G = \sqrt{m^2 c^2 + m''^2 c''^2 + 2mm''cc'' (\cos\alpha \cos\alpha'' + \sin\alpha \sin\alpha'' \cos\beta)}$$

und sie hat senkrecht zur Bahnebene die Componente

$$H = \frac{cc'' \sin\alpha \sin\alpha'' \sin\beta}{\sqrt{c^2 \sin^2\alpha + c''^2 \sin^2\alpha'' - 2cc'' \sin\alpha \sin\alpha'' \cos\beta}}.$$

Die Zahl der Dublets in der Volumeneinheit, für welche K, L, G, H zwischen den Grenzen

K und $K + dK$, L und $L + dL$, G und $G + dG$, H und $H + dH$

liegen, soll

$$\Phi\,(K, L, G, H)\, dK\, dL\, dG\, dH$$

heissen. Die Zahl derjenigen unter allen diesen Dublets, für welche noch ϱ zwischen ϱ und $\varrho + d\varrho$ liegt, ist

$$\Phi \cdot dK dL\, dG\, dH \cdot \frac{d\varrho}{\sigma} : \int_{\varrho_1}^{\varrho_0} \frac{d\varrho}{\sigma} = \Psi\, dK\, dL\, dG \cdot dH \frac{d\varrho}{\sigma}.$$

Hiebei ist $\sigma = \frac{d\varrho}{dt}$, $\int_{\varrho_1}^{\varrho_0} \frac{d\varrho}{\sigma}$ ist die Zeit, welche von einem Peri- bis zu einem Apocentrum vergeht, also eine gegebene Funktion von K, L, G, H; $\Psi = \Phi : \int_{\varrho_0}^{\varrho_1} \frac{d\varrho}{\sigma}$ ist ebenfalls eine Funktion dieser 4 Grössen. Beschränken wir uns auf jene Dublets, für welche 1. noch die letzte Apsidenlinie der Bahn mit einer in der Bahnebene einer fixen Ebene parallel gezogenen Geraden einen Winkel bildet, der zwischen ε und $\varepsilon + d\varepsilon$ liegt, 2. die beiden durch die Geschwindigkeit des Schwerpunkts normal zur Bahnebene und parallel einer fixen Geraden Γ gelegten Ebenen einen Winkel bilden, der zwischen

ω und $\omega + d\omega$ liegt, und endlich 3. noch die Geschwindigkeitsrichtung des Schwerpunkts innerhalb eines Kegels von gegebener Richtung und unendlich kleiner Oeffnung $d\lambda$ fällt, so haben wir noch mit $d\varepsilon\, d\omega\, d\lambda : 16\pi^3$ zu multiplicieren. Die Zahl der Dublets in der Volumeneinheit, welche alle diese Bedingungen erfüllen, ist daher

$$\Psi \cdot \frac{1}{16\pi^3\sigma} dK\, dL\, dG\, dH\, d\varrho\, d\varepsilon\, d\omega\, d\lambda. \qquad 11)$$

Bezeichnen wir mit g und $g + dg$, h und $h + dh$, k und $k + dk$ die Grenzen, zwischen denen für die Dublets die Geschwindigkeitscomponenten des Schwerpunktes bezüglich der fixen rechtwinkligen Coordinatenaxen liegen, so ist

$$G^2\, dG\, d\lambda = dg\, dh\, dk.$$

Nun lassen wir g, h und k constant, legen durch die Schale (deren Centrum) ein rechtwinkliges Coordinatensystem, dessen z-Axe die Richtung von G hat, bezeichnen Coordinaten und Geschwindigkeitscomponenten des Kerns bezüglich dieses Systems mit $x_1, y_1, z_1, u_1, v_1, w_1$ und transformieren diese 6 Variabeln in K, L, H, ϱ, ε, ω. Wir führen da ein zweites Coordinatensystem ein, bezüglich dessen Coordinaten und Geschwindigkeitscomponenten der Schale mit $x_2, y_2, z_2, u_2, v_2, w_2$ bezeichnet werden sollen. Die z-Axe des 2. Systems soll senkrecht zur Bahnebene, die x-Axe in deren Durchschnittlinie mit der alten xy-Ebene liegen. Es ist dann

$$H = G \sin \vartheta,$$

wenn $90 - \vartheta$ der Winkel beider z-Axen ist; daher, weil G constant ist,

$$dH = G \cos \vartheta\, d\vartheta.$$

Endlich bezeichnen wir den Winkel der beiden x-Axen mit ω, da er sich von dem früher so bezeichneten Winkel jedenfalls nur um einen Betrag unterscheidet, den wir jetzt als constant zu betrachten haben. Wir finden:

$$z_2 = x_1 \cos\vartheta \sin\omega + y_1 \cos\vartheta \cos\omega + z_1 \sin\vartheta$$
$$w_2 = u_1 \cos\vartheta \sin\omega + v_1 \cos\vartheta \cos\omega + w_1 \sin\vartheta,$$

welche beide Ausdrücke verschwinden müssen, da die $x_2 y_2$-Ebene Bahnebene ist. Mittelst dieser beiden Gleichungen kann man bei constantem x_1, y_1, u_1, v_1 zunächst ϑ, ω statt z_1, w_1 einführen und findet

$$d z_1\, d w_1 = (y_1 u_1 - x_1 v_1) \frac{\cos\vartheta}{\sin^3\vartheta} d\vartheta\, d\omega.$$

Nun ist weiter

$$x_2 = x_1 \cos\omega - y_1 \sin\omega$$
$$y_2 \sin\vartheta = x_1 \sin\omega + y_1 \cos\omega$$

und analoge Gleichungen folgen für u_2, v_2, u, v. Daraus folgt

$$y_1 u_1 - x_1 v_1 = \sin\vartheta\,(y_2 u_2 - x_2 v_2) = K \sin\vartheta$$

und bei constantem ϑ und ω

$$d x_2\, d y_2 \sin\vartheta = d x_1\, d y_1; \quad d u_2\, d v_2 \sin\vartheta = d u_1\, d v_1,$$

daher

$$d x_1\, d y_1\, d z_1\, d u_1\, d v_1\, d w_1 = K \cos\vartheta\, d x_2\, d y_2\, d u_2\, d v_2\, d\vartheta\, d\omega.$$

Nun bezeichnen wir, wie früher, mit σ und τ die Geschwindigkeitscomponenten der Relativbewegung von Schale und Kern in der Richtung von ϱ und senkrecht darauf; dann ist bei constantem x_2 und y_2

$$d\sigma\, d\tau = d u_2\, d v_2$$

$$K = \varrho\tau, \quad L = L_g + \frac{m m''}{2(m + m'')}(\sigma^2 + \tau^2) + \varphi(\varrho)$$

$$d K\, d L = \frac{m m''}{m + m''} \sigma\varrho\, d\sigma\, d\tau,$$

wobei L_g die jetzt constant betrachtete Energie der Schwerpunktsbewegung ist. Ist endlich ψ der Winkel zwischen ϱ und der letzten Apsidenlinie, so folgt

$$x_2 = \varrho \cos(\varepsilon + \psi), \quad y_2 = \varrho \sin(\varepsilon + \psi),$$

wobei ψ Funktion von ϱ, K und L ist; letztere beide sind jetzt constant, daraus folgt

$$\varrho\, d\varrho\, d\varepsilon = dx_2\, dy_2.$$

Fasst man alles zusammen, so ist:

$$dx_1\, dy_1\, dz_1\, du_1\, dv_1\, dw_1 = \frac{m+m''}{m m''} \frac{K}{\sigma}\, dK\, dL\, dH\, d\varrho\, d\omega\, d\varepsilon$$

und man sieht sofort, dass, wenn sich Coordinaten und Geschwindigkeitscomponenten ohne Index auf ein beliebig gelegenes fixes Coordinatensystem beziehen, ebenfalls

$$dx\, dy\, dz\, du\, dv\, dw = \frac{m+m''}{m m''} \frac{K}{\sigma}\, dK\, dL\, dH\, d\varrho\, d\omega\, d\varepsilon$$

sein muss. Führen wir diess in den Ausdruck 11) ein und bedenken noch, dass bei constantem u, v, w

$$dg\, dh\, dk = \frac{m''^3}{(m+m'')^3}\, du''\, dv''\, dw'',$$

so findet man

$$\frac{1}{16\pi^3} \frac{m m''^4}{(m+m'')^4} \frac{\Psi}{K G_2}\, dx\, dy\, dz\, du\, dv\, dw\, du''\, dv''\, dw''$$

als die Zahl der Dublets in der Volumeneinheit, für welche die Variabeln $x \cdots w''$ zwischen x und $x + dx \cdots w''$ und $w'' + dw''$ liegen. Da wir für diese Zahl früher den Ausdruck

$$F \cdot dx\, dy\, dz\, du\, dv\, dw\, du''\, dv''\, dw''$$

fanden und sahen, dass F die Form haben muss Ae^{-hmc^2}, wobei A nur Funktion von c'', ϱ und α'' sein kann, so folgt, wenn wir jetzt setzen

$$F = B e^{-h(mc^2 + m''c''^2 + 2\varphi(\varrho))}.$$

dass B einerseits nur Funktion von c'', ϱ und α'', anderseits nur Funktion von K, L, G und H sein kann.

Es muss B also eine solche Funktion dieser letzteren Variabeln sein, welche von den Werten von c, α und β ganz unabhängig und bloss Funktion von c'', ϱ und α'' ist. Setzen wir $\beta = 0$, so wird

$$K = \varrho\,(c'' \sin\alpha'' - c\sin\alpha)$$

$$G^2 = m^2c^2 + m''^2c''^2 + 2\,mm''\,cc''\cos(\alpha''-\alpha)$$

$$H = 0,$$

während

$$L = \frac{m\,c^2}{2} + \frac{m''c''^2}{2} + \varphi(\varrho)$$

ist. Die Elimination von c und α aus diesen Gleichungen liefert:

$$c''^2\sin^2\alpha''\,[(m+m'')(2L-\varphi)-G^2]-$$
$$-K\sin\alpha''\,[m(2L-\varphi)+m''(m+m'')c''^2-G^2]+mm''K^2+$$
$$\varrho^2\left\{m''^2c''^2-m''(2L-\varphi)+\frac{1}{4mm''c''^2}[G^2-m(2L-\varphi)+m'(m-m'')c''^2]^2\right\}$$
$$=0.$$

Denken wir uns aus dieser Gleichung etwa c'' bestimmt, so sollen wir erhalten $c'' = \chi\,(\alpha'', \varrho, L, G, K)$. Wir wissen nun, dass B sich sowohl als Funktion von c'', α'', ϱ, als auch von L, G, K muss ausdrücken lassen, also

$$B = F\,(\chi, \alpha'', \varrho) = \Phi\,(L, G, K).$$

Diese Gleichung muss auch für $\alpha'' = 0$ gelten; es muss also $F(\chi, 0, \varrho)$ bloss Funktion von L, G, K sein, welche wegen der Willkürlichkeit von c und α auch für $\alpha'' = 0$ noch independent sind. Für $\alpha = 0$ wird:

$$m''^2(m+m'')^2c''^4+ \qquad 12)$$
$$+2m''c''^2\left[(m-m'')D+2m^2m''\frac{K^2}{\varrho^2}+(\varphi-2L)m(m+m'')\right]+$$
$$+[D+m(\varphi-2L)]^2=0.$$

Setzen wir

$$(m - m'') D - 2m(m + m'') L = \xi, \quad D - 2m L = \eta,$$
$$2m^2 m'' K^2 = \zeta,$$

so müsste sich $F(c'', \varrho)$ auf eine Funktion von ξ, η, ζ reducieren, wenn darin c'' durch Gleichung 12) als Funktion von ϱ, L, D, K ausgedrückt wird. Da durch Veränderung von c und α bewirkt werden kann, dass sich ξ und η unabhängig von c'', α'' und ϱ verändern, so muss auch

$$\frac{\partial F}{\partial c''} \cdot \frac{\partial c''}{\partial \xi} \text{ und } \frac{\partial F}{\partial c''} \cdot \frac{\partial c''}{\partial \eta}$$

von ϱ unabhängig sein. Diess kann aber wegen

$$\frac{\partial c''}{\partial \zeta} = \varrho^2 \frac{\partial c''}{\partial \xi}$$

nur stattfinden, wenn entweder $\frac{\partial c''}{\partial \xi}$ oder $\frac{\partial F}{\partial c''}$ verschwindet. Erstere Grösse hat den Wert

$$-\frac{c''}{2m''(m + m'')^2 c''^2 + 2\xi + \frac{2\zeta}{\varrho^2} + 2m(m + m'')\varphi}$$

kann also nicht allgemein verschwinden, da c'', ϱ, ξ und ζ auch für $\alpha'' = \beta = 0$ noch unabhängig von einander geändert werden können. Es muss also F von c'' und daher auch von ϱ unabhängig sein; daraus folgt sofort, dass es auch von α'' unabhängig ist, da ja α'' nicht als Funktion von L, G und K allein ausdrückbar ist. Es muss also F oder B eine Constante sein, womit die Verteilung der lebendigen Kraft endlich eindeutig bestimmt ist. Vorausgesetzt ist dabei noch, dass φ so beschaffen ist, dass Kern und Schale überhaupt beisammen bleiben, und auch nicht in einen Punkt zusammenschrumpfen, da sonst die obigen Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen unzulässig werden.

Dass sich namentlich die zuletzt gemachten Schlüsse durch etwas einfachere ersetzen lassen, scheint mir wahrscheinlich; doch dürften auch in dieser Darstellung die allgemeinen Ursachen klar hervortreten, welche die Richtigkeit des Theorems unabhängig von den speciellen Details der Aufgabe verbürgen.