Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Classe

der

k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.

Band XXIII. Jahrgang 1893.

München.
Verlag der K. Akademie.
1894.

In Commission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).

Ungewöhnliche mikroskopische Bilder.

Von L. Sohncke in München.

(*Eingelaufen 8. Juni.*)

1. Die beobachtete Erscheinung.

Gelegentlich der mikroskopischen Betrachtung einer Abbe'schen Diffraktionsplatte machte ich zufällig die Bemerkung, dass es — bei völlig unverändert gelassenem Mikroskop — doch fünf verschiedene Abstände dieser Platte gab, bei denen mikroskopische Bilder des auf ihr befindlichen Gitters auftraten. Die Bilder sind theils verkehrt, theils aufrecht, und von verschiedenen Vergrösserungen. Die ungewöhnlichen Bilder unterscheiden sich von dem gewöhnlichen durch wesentlich geringere Deutlichkeit, indem bei ihnen das ganze Gesichtsfeld zugleich von allgemeiner Helligkeit erfüllt ist. Die Art der Beleuchtung ist von keinem wesentlichen Einfluss; man kann Himmels- oder nahes Lampenlicht, sowie den Plan- oder Hohlspiegel anwenden.

Die Beobachtung wurde mit einem Zeiss'schen Mikroskop (Objektiv *aa*, Okular IV) gemacht; sie bestätigte sich aber auch bei Anwendung eines Hartnack'schen Mikroskops. Also ist die Erscheinung nicht in der besonderen Beschaffenheit eines bestimmten Mikroskops begründet. Von andern Beugungsgittern (einem Schwerd'schen und einem Nobert'schen) konnten solche

aussergewöhnliche Bilder nicht erhalten werden. Folglich hat die Erscheinung in der Beschaffenheit der Abbe'schen Platte selbst ihren Grund.

Einen Anhaltspunkt für die Erklärung schien zunächst der Umstand zu bieten, dass jene Diffraktionsplatte deutliche Brennpunktseigenschaften zeigt, wie solche zuerst von J. L. Soret[1]) bei gewissen Gittern absichtlich erzielt wurden. Das Gitter wirkt nämlich wie eine Linse mit mehreren verschiedenen Brennweiten, es liefert — gleich einem Soret'schen Gitter — von einem Objekt mehrere in verschiedenen Abständen gelegene Bilder, virtuelle und reelle. Somit muss es auch, gleich einem Soret'schen Gitter, sowohl als Conkav-, wie als Convexspiegel von mehreren verschiedenen Brennweiten wirken können.

Nichtsdestoweniger erwies sich dieser Gedankengang als unzutreffend; denn es stellte sich bald heraus, dass die Erscheinung gänzlich unabhängig von der Gitternatur des Objekts ist. Den Ausschlag gibt vielmehr eine andere Eigenschaft der Platte: Die Gitterstriche sind in eine versilberte Glasplatte eingeritzt. Als ich nun das Gitter vollständig verdeckte und einen in dem Silberspiegel zufällig vorhandenen kleinen isolirten Riss von der Gestalt eines Kommas beobachtete, erhielt ich von diesem Objekt dieselben fünf Bilder. Hiermit war klar, dass ihre Entstehung wesentlich dadurch bedingt sein musste, dass die das Objekt tragende Platte die Eigenschaft eines Spiegels besitzt.

Zu diesem Umstand muss aber noch ein anderer hinzukommen: Als Spiegel kann die Platte nur dann wirken, wenn sie von Seite des Mikroskops her bestrahlt wird. Also müssen auch gewisse Flächen der Mikroskoplinsen spiegelnd wirken. Hierbei können nun offenbar nur Grenzflächen zwischen

---

1) Ueber die durch Kreisgitter erzeugten Beugungsphänomene. Poggendorffs Annal. d. Phys. u. Chemie. 156. 1875, S. 99.

Glas und Luft in Betracht kommen, nicht solche zwischen Glas und Glas, weil in letzterem Falle die reflektirte Intensität viel zu gering ist (vielleicht nur $^1/_{40}$ der Intensität des ersteren Falles). Durch diese doppelte Spiegelung wird dann dem Mikroskop — an Stelle des ursprünglichen Objektes — ein Bild desselben dargeboten, welches von der Frontlinse den richtigen Objektabstand hat, und von welchem das Mikroskop ein Bild von normaler Vergrösserung entwirft. Dass auf diesem Wege die fragliche Erscheinung ihre völlige Erklärung findet, soll nun genauer begründet werden.

Die folgende Tabelle I enthält die Beobachtungsdata über Lage und Grösse der 5 Bilder, die mit dem Zeiss'schen Mikroskop gesehen wurden. Das Mikroskoprohr trägt eine Millimeterskala, die bei Bewegung des Rohres an einer feststehenden Marke vorübergeht. Die Ablesungen an dieser Skala stehen in der zweiten Spalte, während die erste die Nummern der Bilder enthält, von jenem angefangen, das bei geringstem Abstand des Objektes erscheint. Die dritte Spalte gibt die Stellung des Bildes an, wobei die des normalen Bildes (No. IV) als „normal", die umgekehrte als „abnorm" bezeichnet ist. Die vierte Spalte zeigt, wie viele Theile des Okularmikrometers dasselbe Stück des Objekts decken. Als solches Objektstück diente die ganze Breite des von Gitterstrichen bedeckten Theils der Platte.

Tabelle I.

Bild-nummer	Einstellung des Rohrs	Stellung des Bildes	Okular-Mikrometer	Bemerkungen
	mm			
I	4,80	normal	90,0	
II	8,45	„	28,0	
III	12,85	abnorm	17,2	
IV	17,00	normal	28,0	das gewöhnliche Bild.
V	29,35	abnorm	30,5	am schwersten sichtbar.

Senkt man das Mikroskoprohr, bis die vorderste Linsenfläche (Frontfläche) auf die Diffraktionsplatte aufstösst, so steht die Marke auf 4,30. Also erhält man die zum Auftreten der 5 Bilder erforderlichen Entfernungen *e* der Frontfläche von der oberen Fläche der Diffraktionsplatte durch Verminderung der Zahlen der zweiten Spalte um 4,3. (Spalte II der folgenden Tabelle.) In Spalte IV der folgenden Tabelle ist ferner das Verhältniss der Vergrösserung der verschiedenen Bilder zur Vergrösserung des normalen Bildes angegeben.

Tabelle II.

Bild	*e*	Stellung	Vergrösserungsverhältniss
	mm		
I	0,50	normal	3,21
II	4,15	„	1,00
III	8,55	abnorm	0,61
IV	12,70	normal	1,00
V	25,05	abnorm	1,09

Das Objektiv *aa* des Zeiss'schen Mikroskops besteht aus zwei Linsensystemen, deren einander zugewandte Glasflächen um 21,4 mm von einander abstehen. Das vorderste dieser Systeme erscheint als eine Plankonvexlinse; ihre Planfläche ist die Frontfläche des ganzen Objektivs; die nach vorn gewandte Fläche des zweiten Systems ist konvex, ihr Krümmungsradius beträgt etwa 15 cm. Es ist für das Folgende nicht nothwendig, die Beschaffenheit beider Linsensysteme genauer zu kennen. Es genügt z. B. schon, das in Wahrheit aus 2 Linsen (einer Sammel- und einer Zerstreuungslinse) zusammengesetzte vorderste System als eine einfache Plankonvexlinse von der thatsächlichen Gesammtdicke 3,5 mm und einem mittleren Brechungsquotienten von 1,56 zu betrachten.

2. Hohlspiegelwirkung einer Plankonvexlinse.

Vor der Ableitung der einzelnen Bilder soll zuerst die Hohlspiegelwirkung einer Plankonvexlinse, welche für das Zustandekommen von zweien der vier ungewöhnlichen Bilder massgebend ist, untersucht werden. Obgleich sich diese Wirkung unschwer aus der allgemeinen Theorie der Bilder eines centrirten Systems brechender (oder spiegelnder) Kugelflächen ableiten lässt, empfiehlt sich doch die folgende direkte Ableitung durch ihre Einfachheit.

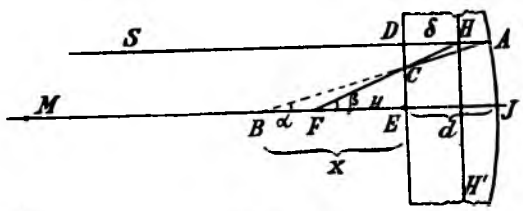

Fig. 1.

Auf die ebene Fläche einer Plankonvexlinse falle senkrecht ein Parallelstrahlenbündel, aus welchem ein Strahl SA verfolgt wird. In die Linse eingedrungen wird SA an der als Hohlspiegel wirkenden Kugelfläche so reflektirt, dass er mit den übrigen reflektirten in B (um den halben Kugelradius $\frac{r}{2}$ von der Kugelfläche entfernt) zusammentreffen würde, wenn er nicht, gleich den übrigen, zuvor an der ebenen Fläche gebrochen würde, so dass alle im Brennpunkte F zusammenkommen.

Für den Strahlenweg ACF gilt die Gleichung $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{1}{n}$, ($\alpha$ = Einfallswinkel, β = Brechungswinkel, $\frac{1}{n}$ = Brechungsquotient aus der Linse ins umgebende Medium); oder $\beta = n \cdot \alpha$, wenn die Betrachtung — wie üblich — auf so wenig ge-

neigte Strahlen beschränkt wird, dass die dritten Potenzen der Bögen bereits vernachlässigt werden dürfen. Nennt man ferner $BE = x$, $FE = y$, so ist $CE = x \cdot \alpha = y \cdot \beta$, folglich:

$$1) \qquad y = \frac{x}{n}.$$

Hiermit ist die Lage des Brennpunkts F bestimmt, denn x ist $= \frac{r}{2} - d$, wo d die Linsendicke.

Der gebrochene Strahl CF schneidet, rückwärts verlängert, den einfallenden Strahl SA im Punkte H, im Abstande δ von der ebenen Linsenfläche. Zur Bestimmung von δ dient die Beziehung:

$$CD = \delta \cdot \beta = DA \cdot \alpha.$$

Aber der Ueberschuss der Linsendicke d über DA ist eine Grösse von der Ordnung $\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2$, so dass er, mit α multiplicirt, eine bereits zu vernachlässigende Grösse ergibt. Daher ist für $DA \cdot \alpha$ einfach $\alpha \cdot d$ zu setzen, und man hat:

$$2) \qquad \delta = \frac{d}{n}.$$

δ ist somit unabhängig von der besonderen Lage des einfallenden Strahls, also für alle Strahlen des einfallenden Parallelstrahlenbündels dasselbe, so dass eine im Abstande $\delta = \frac{d}{n}$ von der ebenen Linsenfläche entfernte Parallelebene HH' eine besondere Bedeutung besitzt (Hauptebene). Anstatt nämlich den zu einem senkrecht einfallenden Strahl gehörigen reflektirten, aus der Linse austretenden Strahl so wie vorher zu konstruiren, kann man einfacher so verfahren:

„Man verbindet den Punkt, in welchem der einfallende Strahl die um $\frac{d}{n}$ hinter der ebenen Frontfläche gelegene Hauptebene HH' schneidet, mit dem

um $\frac{1}{n}\left(\frac{r}{2} - d\right)$ vor der Frontfläche gelegenen Brennpunkt F.

Umgekehrt findet man für jeden von F ausgehenden Strahl den zugehörigen reflektirten, wenn man ersteren bis zur Hauptebene führt und von diesem Schnittpunkt aus den zur Frontfläche senkrecht verlaufenden Strahl zieht."

Die Plankonvexlinse ist also bezüglich ihrer Hohlspiegelwirkung vollständig ersetzbar durch den Brennpunkt F und die Hauptebene HH', weil zur Bildkonstruktion nur diese beiden Elemente verwendet werden. Der Abstand des Brennpunkts von der Hauptebene oder die Brennweite ist:

3) $$f = y + \delta = \frac{x + d}{n} = \frac{r}{2n}$$

Um nun zu einem parallel zur Frontfläche liegenden Objekt vom Durchmesser O das zugehörige Bild O' zu finden, verfolgt man nur 2 Strahlen, die von dem einen Endpunkt des Durchmessers O ausgehen: einen $\parallel$ dem Centralstrahl, den anderen durch F gerichtet.

Heissen a und b die Abstände des Objekts und Bildes von der Hauptebene, so ist:

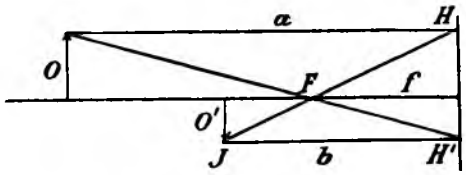

Fig. 2.

4) $$\frac{O'}{O} = \frac{b}{a}, \text{ weil beide} = \frac{JF}{HF} \text{ sind.}$$

Und aus der Gleichung:

$$\frac{f}{a} = \frac{O'}{O + O'}$$

folgt mit Hilfe der vorigen die Gleichung:

$$5) \qquad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}.$$

3. Erklärung der Erscheinung.

Es ist nacheinander zu betrachten die spiegelnde Wirkung der im Objektivsystem aufeinander folgenden Grenzflächen von Glas und Luft; diese Flächen sind a) die ebene Frontfläche, b) die hintere Grenzfläche der plankonvexen Linse (vgl. den Schluss von Abschnitt 1), c) die konvexe Vorderfläche des zweiten Theilsystems des Objektivs.

Das als Objekt dienende Spiegelgitter ist von der Frontfläche nicht um die Strecken e (Tabelle II) entfernt, denn die oberste Fläche D der Diffraktionsplatte gehört einem Deckgläschen von der Dicke $\varepsilon = 0{,}15$ mm an, und erst an der Unterfläche desselben befindet sich das Objekt. Dem Mikroskop wird also statt des Objekts ein durch Brechung an der oberen Deckglasfläche D näher gerücktes Bild des Objekts (O) geboten, welches um $\frac{\varepsilon}{n}$ unter der Fläche D liegt. Der Brechungsquotient n aus Luft in dies Glas wird nicht viel von 1,5 abweichen, so dass diese Entfernung $= 0{,}10$ mm beträgt. Man erhält also in jedem der zu untersuchenden Fälle die Entfernung dieses als Objekt dienenden Bildes O von der Frontfläche des Mikroskops, wenn man die Zahlen e der Tabelle II um 0,10 vergrössert.

Ferner ist die Spiegelwirkung des vom Deckgläschen bedeckten Silberspiegels zu untersuchen. Liegt ein Objekt um z mm vor der oberen Fläche D des Deckgläschens, so gelangen die Strahlen so zum Silberspiegel, als kämen sie von einem Punkt, der um nz vor D liegt. Das durch den Silberspiegel erzeugte Bild liegt also um $nz + \varepsilon$ hinter ihm, also um $nz + 2\varepsilon$ hinter D. Beim Austreten der reflektirten

Strahlen aus dem Deckglas in Luft werden sie so gebrochen, dass sie von einem Punkt Ω zu kommen scheinen, der um $\frac{n\varepsilon + 2\varepsilon}{n}$, d. h. um

$$6) \qquad \Omega D = \varepsilon + \frac{2\varepsilon}{n}$$

hinter der Fläche D des Deckglases liegt. Wegen $\varepsilon = 0{,}15$ und $n = 1{,}5$ wird $\frac{2\varepsilon}{n} = 0{,}20$ mm.

a) Wirkung der ebenen Frontfläche. Diese Fläche erzeugt ein Spiegelbild O' des als Objekt dienenden Bildes O; das durch den Silberspiegel erzeugte Bild Ω dieses Bildes O' wird dem Mikroskop als Objekt dargeboten. Dies letzte Bild Ω ist gleich gross und gleich gestellt wie das ursprüngliche O. Letztere Eigenschaft besitzt nur das zweite der von mir wahrgenommenen Bilder. Für dieses ist die um 0,10 vergrösserte Entfernung e nach Tab. II = 4,25 mm. Also ist $\overline{OO'} = 2 \cdot 4{,}25$, also $DO' = \varepsilon = 8{,}50 - 0{,}10 = 8{,}40$, und $\overline{\Omega D}$ (nach Gl. 6) $= 8{,}40 + 0{,}20 = 8{,}60$. Also liegt Ω von der Mikroskop-Frontfläche entfernt um $8{,}60 + 4{,}15 = 12{,}75$ mm. Dieser Abstand stimmt hinreichend genau mit jenem überein, welchen die Frontfläche von einem Objekt haben muss, das durch's Mikroskop scharf gesehen werden soll, und welcher direkt = 12,80 ermittelt wurde (vgl. auch Bild IV, Tab. II). Also ist die Entstehung des Bildes II hiermit nachgewiesen.

b) Die als Hohlspiegel wirkende hintere Grenzfläche der plankonvexen Linse erzeugt ein Bild O' von O. Das durch den Silberspiegel erzeugte Bild Ω dieses Bildes O' wird dem Mikroskop als Objekt dargeboten. Je nach der Entfernung des ursprünglichen Objekts vom Hohlspiegel ist das Bild O' virtuell oder reell. Im ersteren Falle ist es von gleicher Stellung wie das Objekt, im zweiten Falle verkehrt. Daher kann der erste Fall nur zur Erklärung des

ersten der von mir wahrgenommenen Bilder dienen; der zweite Fall aber erklärt das dritte.

Nennt man die unbekannte Entfernung HO' des Bildes O' hinter (resp. vor) der Hauptebene $= b$, und beachtet, dass die Hauptebene nach Gl. 2) um $\delta = \frac{d}{n} = \frac{3,5}{1,56} = 2,24$ hinter der Frontfläche liegt, so ist der Abstand des Bildes O' von der Deckglasfläche D

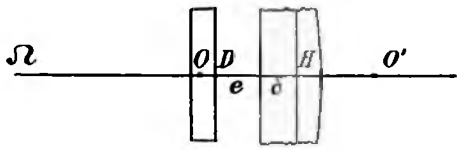

Fig. 3.

$DO' = DH \pm HO' = e + \delta \pm b$, also nach Tab. II

für Bild I: $DO' = z = 0,50 + 2,24 + b$

„ „ III: $DO' = z = 8,55 + 2,24 - b$

Also nach Gl. 6)

für Bild I: $\Omega D = z + 0,20 = 2,94 + b$

„ „ III: $\Omega D = z + 0,20 = 10,99 - b.$

Damit Ω scharf gesehen werde, muss $\Omega D + e = 12,80$ sein, also für Bild I: $2,94 + b + 0,50 = 12,80$

„ „ III: $10,99 - b + 8,55 = 12,80$

Hieraus folgt für Bild I: $b = 9,36$

„ „ III: $b = 6,74$

Hiermit vermag man nun das Grössenverhältniss $\frac{\Omega}{O}$ zu ermitteln; denn es ist: $\Omega = O'$ und nach Gl. 4) $\frac{O'}{O} = \frac{b}{a}$

Es ist aber für Bild I: $a = 0,10 + e + \delta = 2,84$

„ „ III: $a = 0,10 + e + \delta = 10,89.$

Also wird für Bild I: $\frac{\Omega}{O} = \frac{9,36}{2,84} = 3,29$

„ „ III: $\frac{\Omega}{O} = \frac{6,74}{10,89} = 0,62$

Durch direkte Beobachtung sind diese Grössenverhältnisse (Tab. II) für die beiden Bilder bezüglich = 3,21 und = 0,61 gefunden. Diese hinlängliche Uebereinstimmung der berechneten und beobachteten Werthe beweist, dass hiermit die Entstehung der Bilder I und III richtig nachgewiesen ist.

Nebenbei kann man auch die Brennweite dieser als Hohlspiegel wirkenden Plankonvexlinse angeben. Denn aus Gl. 5) — in welcher beim virtuellen Bilde das zweite Glied abzuziehen ist — folgt nach den Daten des

$$\text{Bildes I } f = \frac{ab}{b-a} = 4{,}08$$

$$\text{„ III } f = \frac{ab}{a+b} = 4{,}16$$

Die Uebereinstimmung dieser beiden Werthe für dieselbe Grösse kann für hinreichend gelten, wenn man bedenkt, dass thatsächlich ja gar keine einfache Plankonvexlinse, sondern eine Doppellinse vorliegt.

c) Wirkung der konvexen Vorderfläche des zweiten Theilsystems des Objektivs. Das erste Theilsystem, welches bisher nur in seiner Hohlspiegelwirkung betrachtet wurde, ist seiner eigentlichen Bestimmung nach eine Sammellinse; es entwirft von einem innerhalb seiner Brennweite befindlichen Objekt ein virtuelles aufrechtes Bild O'. Von diesem Bilde entwirft die Vorderfläche des zweiten Theilsystems, als Convexspiegel wirkend, ein virtuelles gleichgestelltes Bild O''. Die von diesem Bilde rückkehrenden Strahlen durchsetzen das erste Theilsystem nochmals; dieses erzeugt aber jetzt ein physisches verkehrtes Bild vom vorigen Bilde. Dasselbe kann nicht unmittelbar zu Stande kommen, weil die Strahlen vorher vom Silberspiegel aufgefangen werden. So entsteht schliesslich vor dem Silberspiegel ein verkehrtes physisches Bild Ω, welches dem Mikroskop als Objekt dargeboten wird. Dass das Bild V wirklich in dieser Art zu

Stande kommt, ist jetzt zu beweisen. Zunächst ist seine Stellung eine solche, wie hier verlangt wird.

Die Brennweite des ersten Theilsystems ist etwa = 27,9 mm. Sieht man es wieder als einfache Planconvexlinse an, so liegt bekanntlich seine erste Hauptebene um $\frac{d}{n} = 2{,}24$ hinter der ebenen Frontfläche, während seine zweite Hauptebene die Convexfläche berührt. Der Abstand des Objekts O von der ersten Hauptebene ist $a = 0{,}10 + e + \frac{d}{n}$ oder (mit Rücksicht auf Tab. II Bild V) $a = 0{,}10 + 25{,}05 + 2{,}24 = 27{,}39$, also in der That kleiner als die Brennweite. Die Entfernung des durch diese Linse erzeugten virtuellen Bildes O' vor der zweiten Hauptebene berechnet sich zu 1498,4.

Dies Bild, als Objekt für den Convexspiegel dienend, der um 21,4 hinter der letzten Fläche des ersten Theilsystems liegt, hat von diesem Spiegel den Abstand $a' = 1519{,}8$. Also liegt das virtuelle Bild O'', das der Convexspiegel (mit einer Brennweite von 75 mm) von jenem Bilde O' entwirft, um $b' = 71{,}47$ hinter diesem Spiegel, also $71{,}47 + 21{,}4 = 92{,}87$ hinter der zweiten Fläche der Plankonvexlinse.

Weil dieser Abstand a'' grösser als die Brennweite der Plankonvexlinse ist, so entwirft diese, von den rückkehrenden Strahlen durchsetzt, ein physisches verkehrtes Bild von O'', dessen Abstand von der innerhalb der Planconvexlinse gelegenen Hauptebene sich zu $b'' = 39{,}88$ berechnet. Von derselben Hauptebene steht die Deckglasoberfläche um $25{,}05 + 2{,}24 = 27{,}29$ ab, so dass das Bild also um $39{,}88 - 27{,}29 = 12{,}59$ hinter dieser Ebene D zu Stande kommen würde. Nun lehrt eine Betrachtung, ganz analog jener, die zu Gl. 6) führte, dass statt des vereitelten Bildes das physische Bild Ω in der Entfernung $\alpha - \frac{2e}{n} = 12{,}59 - 0{,}20 = 12{,}39$ vor der Fläche D zu Stande kommt. Von der Frontfläche ist es also um $25{,}05 - 12{,}39 = 12{,}66$ mm entfernt. Dieser Abstand

stimmt hinlänglich mit jenem überein (12,80), welchen die Frontfläche von dem scharf zu sehenden Objekte haben muss.

Dasselbe gilt von der Vergrösserung. Denn es ist:

$$\frac{O'}{O} = \frac{b}{a} = \frac{1498,4}{27,39} = 54,7$$

$$\frac{O''}{O'} = \frac{b'}{a'} = \frac{71,47}{1519,8} = 0,047$$

$$\frac{\Omega}{O''} = \frac{b''}{a''} = \frac{39,88}{92,87} = 0,43$$

folglich $\frac{\Omega}{O} = 1,10$. Die direkte Beobachtung hat dieses Vergrösserungsverhältniss zu 1,09 ergeben (Tab. II Bild V). — Somit ist auch die Entstehung dieses Bildes völlig erklärt.

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der Bayerischen Akademie der Wissenschaften München

Jahr/Year: 1894

Band/Volume: 1893

Autor(en)/Author(s): Sohncke Leonhard

Artikel/Article: Ungewöhnliche mikroskopische Bilder 223-235