Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Classe

der

k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.

Band XXIV. Jahrgang 1894.

München.

Verlag der K. Akademie.

1895.

In Commission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).

Digitized by Google

Ueber eine einfache, eindeutige Raumtransformation 3. Ordnung.

Von Karl Döhlemann in München.

(Eingelaufen 13. Januar.)

1. Unter Voraussetzung des Begriffes der Projectivität kann man sich kaum eine einfachere Methode denken, den Raum geometrisch anschaulich eindeutig auf sich selbst zu beziehen als folgende: In dem einen Raum (X-Raum) seien 3 Gerade a_1, a_2, a_3 beliebig und in allgemeiner Lage angenommen, ebenso im andern, Y-Raum. Jede dieser 6 Geraden soll Träger eines Ebenenbüschels sein und zwar seien die Ebenenbüschel a_1 und b_1, a_2 und b_2, a_3 und b_3 je zu einander projectiv. Irgend ein Punkt im X-Raum, P_x, ist dann Schnittpunkt dreier Ebenen durch a_1, a_2, a_3; diesen entsprechen vermöge der projectiven Beziehungen drei Ebenen durch b_1, b_2, b_3, welche sich in dem entsprechenden Punkt P_y schneiden.

Lässt man P_x auf einer beliebigen Geraden g fortrücken, so bezieht P_x dabei die Büschel a_1, a_2, a_3 projectiv aufeinander. Es werden also auch die Büschel b_1, b_2, b_3 projectiv aufeinander bezogen und diese erzeugen als der Geraden entsprechendes Gebilde eine Raumkurve 3. Ordnung, welche den Hyperboloiden aus den Achsen b_1, b_2 bezw. b_1, b_3 und b_2, b_3 gemein ist.

Daraus folgt dann sofort, dass das einer Ebene im einen Raum im andern Raume entsprechende Gebilde eine Fläche

3. Ordnung ist: denn diess Gebilde hat mit einer beliebigen Geraden drei Schnittpunkte gemein.

2. Die singulären Elemente der Transformation erhalten wir durch besondere Annahmen für den Punkt P_x. Zunächst springen als solche die 6 Geraden $a_1, \ldots . b_3$ in die Augen. Wählen wir einen Punkt auf a_1, so geht durch ihn und a_2 bezw. a_3 noch je eine Ebene, während die durch a_1 gehende Ebene unbestimmt wird. Den beiden genannten Ebenen entsprechen gewisse Ebenen durch b_2 und b_3 und da die 3. Ebene ganz willkürlich, so entspricht also dem Punkte auf a_1 eine Gerade. Rückt der Punkt auf a_1 fort, so erzeugen die projectiven Büschel b_2 und b_3 eine Regelschaar 2. Ordnung, die wir kurz als das Hyperboloid $(b_2 b_3)$ bezeichnen wollen. Den Punkten der Geraden a_1 entsprechen die Erzeugenden dieses Hyperboloides und zwar diejenigen, welche nicht zur Schaar b_2, b_3 gehören.

Ganz ebenso geben die Geraden a_2 und a_3 zu 2 Hyperboloiden $(b_1 b_3)$ und $(b_1 b_2)$ Veranlassung, während im X-Raume als singuläre Flächen die Hyperboloide $(a_1 a_2)$ $(a_1 a_3)$ $(a_2 a_3)$ erscheinen.

Weiter spielen noch eine besondere Rolle die durch a_1, a_2, a_3, sowie b_1, b_2, b_3 bestimmten Regelschaaren. Wählt man nämlich eine Gerade g, welche a_1, a_2 und a_3 schneidet, so entspricht jedem Punkt dieser Geraden der gleiche Punkt im Y-Raum, da die Ebenen ja die nämlichen bleiben, welche g mit a_1, a_2 und a_3 bestimmt. Lässt man jetzt g die Regelschaar $(a_1 a_2 a_3)$ durchlaufen, so werden dadurch die Büschel a_1, a_2, a_3 aufeinander projectiv bezogen, das gleiche gilt also auch von den Büscheln b_1, b_2, b_3. Die den Geraden g entsprechenden Punkte liegen demnach auf einer Raumkurve 3. Ordnung R_b und es ist weiter klar, dass diese der gemeinsame Schnitt der oben genannten Hyperboloide $(b_1 b_2)$ $(b_1 b_3)$ $(b_2 b_3)$ sein muss. Ganz ebenso wird sich im Raume der X eine Raumkurve 3. Ordnung R_a ergeben, deren Punkte den

Digitized by Google

Geraden entsprechen, welche b_1, b_2 und b_3 gleichzeitig begegnen.

Das System der Fundamental-Flächen besteht also z. B. im X-Raume aus:

Dem Hyperboloid $(a_1\, a_2)$, dem Hyperboloid $(a_1\, a_3)$, dem Hyperboloid $(a_2\, a_3)$, dem Hyperboloid $(a_1\, a_2\, a_3)$.

Dazu kommen als Fundamental-Kurven:

Die Geraden a_1, a_2, a_3 und die Raumkurve R_a, der Schnitt der 3 zuerst genannten Hyperboloide.

Es folgt dann leicht:

„Einer Ebene z. B. im X-Raume entspricht im Y-Raume eine Fläche 3. Ordnung, welche durch R_b, b_1, b_2 und b_3 hindurchgeht."

Diese Fläche ist auf die Ebene eindeutig abgebildet und aus der Betrachtung dieser Abbildung ergibt sich in der bekannten Weise, dass die Fläche 27 Gerade enthält.

3. Die analytische Darstellung dieser Transformation gestaltet sich wie folgt: Sind die Ebenenbüschel a_1, a_2, a_3 bezüglich gegeben durch

$$
1) \qquad \begin{aligned} a_x - \lambda\, b_x &= o \\ A_x - \mu\, B_x &= o \\ A_x - \nu\, B_x &= o \end{aligned}
$$

wo $a_x = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4$ etc. und sind die dazu projectiven Büschel b_1, b_2, b_3 bezüglich

$$
2) \qquad \begin{aligned} a'_y - \lambda\, b'_y &= o \\ A'_y - \mu\, B'_y &= o \\ A'_y - \nu\, B'_y &= o \end{aligned}
$$

so werden die Gleichungen der Transformation

$$
3) \qquad \begin{aligned} a_x\, b'_y - b_x\, a'_y &= o \\ A_x\, B'_y - B_x\, A'_y &= o \\ A_x\, B'_y - B_x\, A'_y &= o \end{aligned}
$$

Digitized by Google

Diess sind 3 in den x und y lineare Gleichungen, allerdings von specieller Form. Nimmt man 3 bilineare Gleichungen der allgemeinen Form

$$\Sigma\, a_{ik}\, x_i\, y_k = o \qquad \left\{\begin{array}{l} i = 1, 2, 3, 4 \\ k = 1, 2, 3, 4 \end{array}\right\}$$

so erhält man durch dieselben die allgemeine birationale Transformation 3. Ordnung dieser Art, welche Nöther[1]) und Cayley[2]) fast gleichzeitig behandelt haben. Bei dieser tritt in jedem Raum als Fundamentalfläche eine Fläche 8. Ordnung auf und auf ihr als 3 fache Kurve eine Raumkurve 6. Ordnung. In unserm Falle ist diese Fläche 8. Ordnung in 4 Hyperboloide zerfallen, die Raumkurve 6. Ordnung dagegen besteht aus den 3 Geraden und der Raumkurve 3. Ordnung. Dieser geometrisch nicht uninteressante Fall findet in den citierten Arbeiten keine Erwähnung.

4. Die bilinearen Gleichungen 3) kann man mit Rücksicht auf ihre specielle Form als „zweiteilig" bezeichnen; die allgemeine Transformation dieser Art lässt sich nicht auf diese Form bringen. Betrachten wir, des Zusammenhanges wegen, einen Moment die allgemeine quadratische Transformation der Ebene, so ist bekannt, dass diese dargestellt werden kann durch das System 2 bilinearer Gleichungen

$$4) \qquad \begin{array}{l} \Sigma\, a_{ik}\, x_i\, y_k = o \\ \Sigma\, b_{ik}\, x_i\, y_k = o \end{array} \qquad \left\{\begin{array}{l} i = 1, 2, 3 \\ k = 1, 2, 3 \end{array}\right\}$$

Eine solche bilineare Form $\Sigma\, a_{ik}\, x_i\, y_k$ lässt sich nun als „zweiteilige" schreiben immer und nur, wenn die Determinante der Form $|\, a_{ik}\, | = o$, wie diess London[3]) zeigt. Trotzdem lässt sich die allgemeine quadratische Transformation der Ebene noch durch zwei zweiteilige Gleichungen

1) Mathematische Annalen Bd. 3, 1871, pag. 547.

2) Proceedings of the London Mathem. Society, Vol. III, 1870.

3) Mathematische Annalen Bd. 38, 1891.

Digitized by Google

darstellen. Denn die Gleichung $\Sigma a_{ik} x_i y_k = o$, welche eine reciproke Beziehung der Ebene vorstellt, wird erfüllt durch ∞^3 Punktpaare (x, y).

Hat man 2 solche Gleichungen wie in 4), so gibt es noch ∞^2 Punktepaare (x, y), welche bei den Gleichungen genügen und diess sind eben die Punktepaare der quadratischen Transformation. Darauf beruht auch die Erzeugung dieser Transformation, welche Hirst gegeben hat. Betrachtet man jetzt weiter die Schaar

$$5) \qquad \Sigma a_{ik} x_i y_k + \lambda \cdot \Sigma b_{ik} x_i y_k = o$$

so stellt diese für jeden Wert von λ zwar eine andere Reciprocität vor, die Punktpaare der quadratischen Transformation jedoch gehören immer dieser Reciprocität an. Man kann dann die quadratische Transformation auch durch irgend 2 andere Reciprocitäten der Schaar 5) erzeugen und kann als solche 2 mit verschwindender Determinante herausgreifen. Denn die Determinante von 5) liefert eine Gleichung 3. Grades in λ. Eine solche Reciprocität ist aber dann als zweiteilige Form zu schreiben und diese kann wieder als Resultat der Elimination des Parameters aus projectiven Strahlbüscheln erhalten werden. So entsprechen also den 3 Wurzeln der kubischen Gleichung die 3 Fundamentalpunkte, welche die quadratische Transformation in jeder Ebene besitzt.

5. Anders verhält es sich im quaternären Gebiet. Verschwindet die Determinante $|a_{ik}|$ einer bilinearen Form von 4 homogenen Variabeln x und y,

$$\Sigma a_{ik} x_i y_k = o$$

so genügt diess blos dazu, um die Form als eine dreiteilige schreiben zu können. Denn ist

$$\Sigma a_{ik} x_i y_k = y_1 f_1(x) + y_2 f_2(x) + y_3 f_3(x) + y_4 f_4(x)$$

so besagt das Verschwinden der Determinante $|a_{ik}|$, dass eine lineare Relation besteht

$$k_1 f_1 + k_2 f_2 + k_3 f_3 + k_4 f_4 = o$$

und wenn man diese benutzt, um f_4 durch f_1, f_2, f_3 auszudrücken, so wird

$$\Sigma a_{ik} x_i y_k = f_1\left(y_1 - \frac{k_1}{k_4} y_4\right) + f_2\left(y_2 - \frac{k_2}{k_4} y_4\right) + f_3\left(y_3 - \frac{k_3}{k_4} y_4\right)$$

Damit ist $\Sigma a_{ik} x_i y_k$ als dreiteilige Form geschrieben.

Hat man jetzt 3 bilineare Formen allgemeiner Art

$$6)\qquad \begin{aligned} \Sigma a_{ik} x_i y_k &= o \\ \Sigma b_{ik} x_i y_k &= o \\ \Sigma c_{ik} x_i y_k &= o \end{aligned}$$

so wird jede einzelne derselben durch ∞^5 Punktpaare (x, y) befriedigt, die ∞^3 Punktpaare der durch 6 dargestellten Transformation jedoch sind diejenigen Punktpaare, welche den 3 Gleichungen genügen. Bildet man jetzt das System

$$7)\qquad \Sigma a_{ik} x_i y_k + \lambda \Sigma b_{ik} x_i y_k + \mu \Sigma c_{ik} x_i y_k = o$$

so enthält jede in ihm enthaltene Reciprocität die Punktpaare der Transformation. Die Bedingung, dass die Determinante vor 7) verschwinde, gibt eine Gleichung 4. Grades in λ und μ. Man kann also die Transformation 6) auch durch 3 dreiteilige Gleichungen darstellen.

Soll dagegen die Transformation durch 3 zweiteilige Gleichungen zum Ausdruck gebracht werden können, so ist dazu für jede der 3 bilinearen Formen ausser dem Verschwinden der Determinante $|a_{ik}|$ auch noch das Nullwerden der Unterdeterminanten 3. Ordnung notwendig und hinreichend.

Nahe liegt hier die Frage nach dem durch 2 bilineare Gleichungen

$$\begin{aligned} \Sigma a_{ik} x_i y_k &= o \\ \Sigma b_{ik} x_i y_k &= o \end{aligned}$$

dargestellten Gebilde. Offenbar gibt es noch ∞^4 Punktpaare, welche beiden Gleichungen genügen. Hält man z. B. x in

Digitized by Google

beiden Gleichungen fest, so erhält man 2 Ebenen, deren Schnittlinie der Ort der Punkte y ist, die dem Punkte x entsprechen. Alle auf diese Weise zu erhaltenden Geraden bilden einen Complex. Dadurch, dass die Ebenen einander entsprechen, welche in den beiden Reciprocitäten zu gleichen Werten von x (oder y) gehören, wird aber der Raum collinear auf sich bezogen und es folgt somit, dass der in Rede stehende Complex der Reye'sche oder tetraedrale, der ja durch 2 collineare Räume als Ort der Schnittlinien entsprechender Ebenen erzeugt wird. (Schröter's Complex der Wechselstrahlen.)

Die Gleichung des Complexes in den Plücker'schen Geradencoordinaten erhält man dadurch, dass man die Determinante

$$\begin{vmatrix} \Sigma a_{i1} y_i & \Sigma a_{i2} y_i & \Sigma a_{i3} y_i & \Sigma a_{i4} y_i \\ \Sigma a_{i1} y_i' & \Sigma a_{i2} y_i' & \Sigma a_{i3} y_i' & \Sigma a_{i4} y_i' \\ \Sigma b_{i1} y_i & \Sigma b_{i2} y_i & \Sigma b_{i3} y_i & \Sigma b_{i4} y_i \\ \Sigma b_{i1} y_i' & \Sigma b_{i2} y_i' & \Sigma b_{i3} y_i' & \Sigma b_{i4} y_i' \end{vmatrix} \quad \{i = 1, 2, 3, 4\}$$

nach quadratischen Unterdeterminanten entwickelt.

Der ganzen Schaar

$$\Sigma a_{ik} x_i y_k + \lambda \Sigma b_{ik} x_i y_k = o$$

dient dieser Complex sozusagen als Basis. — Hat man allgemeiner 2 Gleichungen

$$f(x^m y^n) = o$$
$$\varphi(x^\mu y^\nu) = o$$

so stellen diese, insofern auch wieder einem Punkte x eine gewisse Kurve von der Ordnung $(n \nu)$ entspricht, ein ∞^3 faches System von Kurven vor, also einen allgemeinern Complex.

6. Kehren wir jetzt noch einen Moment zurück zu unserer speciellen Transformation 3. Ordnung. Wir hatten von Anfang an angenommen, es sei Büschel a_1 projectiv Büschel b_1, a_2 projectiv b_2 und ebenso a_3 und b_3. Diese

Digitized by Google

Projectivität kommt geometrisch zum Ausdruck dadurch, dass a_1 und b_1, a_2 und b_2, a_3 und b_3 je ein Hyperboloid erzeugen. Im allgemeinen haben diese 3 Flächen 8 Punkte gemein und diess sind die einzigen sich selbst entsprechenden Punkte der Transformation. Auch bei der allgemeinern Nöther-Cayley'schen Transformation hat man 8 solche Coincidenzpunkte. Man kann nun aber die erwähnten 3 Hyperboloide auch in specieller Lagenbeziehung annehmen. Von den verschiedenen möglichen Fällen sei nur der erwähnt, wo die 3 Hyperboloide eine Raumkurve 3. Ordnung R^3 gemein haben. Diess kommt darauf hinaus, dass man die 6 Achsen $a_1, \ldots b_3$ als Secanten einer R^3 wählt und je 2 Ebenenbüschel wie a_1 und b_1 perspectiv zur R^3 nimmt, sodass stets entsprechende Ebenen der Büschel auf dieser Kurve sich begegnen. Dann besteht die ganze R^3 aus Coincidenzpunkten der Transformation, dieselbe entspricht sich Punkt für Punkt selbst. Diese Transformation stellt das Analogon vor zu der quadratischen Transformation der Ebene mit einem festen Kegelschnitt.[1]

Wendet man unter Festhaltung der R^3 diese Transformation wiederholt an, so erhält man Transformationen in der Ordnung 3^λ, welche alle diese R^3 als „feste" Kurve enthalten.

Es drängt sich hier die Vermutung auf, dass man statt der R^3 überhaupt eine Raumkurve von beliebiger Ordnung n benützen kann, sofern man nur 6 $(n-1)$ fache Secanten derselben zur Verfügung hat, um dieselben als Gerade $a_1, \ldots b_3$ zu benützen. 6 solche $(n-1)$ fache Secanten liegen dann immer auf einer Regelfläche 2. Ordnung. Man überzeugt sich nämlich auch analytisch leicht von der Richtigkeit folgenden Satzes:

---

1) Vergleiche meine Arbeit in den Mathematischen Annalen Bd. 39, pag. 580.

Digitized by Google

„Enthält eine Raumkurve n-Ordnung zwei $(n-1)$ fache Secanten, so liegt sie auf einer Fläche 2. Ordnung und hat die eine Regelschaar derselben überhaupt zu $(n-1)$-fachen Secanten.“

Geometrisch ergibt sich der Beweis dieses Satzes unmittelbar, wenn man die zwei $(n-1)$ fachen Secanten der Raumkurve als Achsen zweier zur Raumkurve perspectiven und darum untereinander projectiven Ebenenbüschel nimmt, die dann eine Regelfläche 2. Ordnung F^2 erzeugen.

Unter dieser Voraussetzung gehören also die 6 Geraden $a_1, \ldots . b_3$ der gleichen Regelschaar F^2 an, auf welcher auch die R^n liegt. Die Hyperboloide, welche die Büschel a_1 und b_1, a_2 und b_2, a_3 und b_3 erzeugen, fallen alle drei zusammen mit F^2. Wählt man jetzt aber einen Punkt P_x auf dieser F^2, so entspricht ihm offenbar die durch ihn gehende, nicht zur Schaar der a_1 gehörige Erzeugende der Fläche F^2. Einer beliebigen Geraden g entspricht dann wieder eine Gerade, wenn man von den 2 Geraden absieht, die den Schnittpunkten der g mit der F^2 zuzuweisen sind. Man erkennt, dass die Transformation sich in diesem Falle auf eine Collineation reduciert.

Diess ist richtig, solange $n > 3$. Aber auch für $n = 3$ müssen wir dementsprechend, wenn R^3 eine „feste“ Kurve sein soll, noch die ausdrückliche Voraussetzung beifügen, dass die 6 Secanten $a_1, \ldots . b_3$ der R^3 nicht einer Regelschaar angehören dürfen. Es folgt dann aber:

„Die R^3 ist die einzige Raumkurve, welche als „feste“ Kurve in unserer (speciellen) Transformation auftreten kann.“

Wählt man 2 der 3 Geraden in einem Raum z. B. b_1 und b_2 so, dass sie sich schneiden, so ist der Schnittpunkt derselben ein Doppelpunkt für die Fläche 3. Ordnung, welche einer Ebene im andern Raum entspricht. Auf diese Weise

Digitized by Google

kann man verschiedene Typen der Fläche 3. Ordnung durch die Transformation erhalten.

7. Sind die 3 bilinearen Gleichungen 6) allgemeiner Natur und setzt man in ihnen

$$a_{ik} = a_{ki}\,; \quad b_{ik} = b_{ki}\,; \quad c_{ik} = c_{ki}$$

so erhält man, wie Nöther l. c. pag. 556 bemerkt, die Hesse'sche Transformation, bei welcher jedem Punkte des Raumes sein conjugierter in Bezug auf ein Netz von Flächen 2. Ordnung entspricht. Denn die Gleichungen 6) lassen sich dann auffassen als die Polarebenen eines Punktes y in Bezug auf die 3 Flächen 2. Ordnung

$$\Sigma\, a_{ik}\, x_i\, x_k = 0\,; \quad \Sigma\, b_{ik}\, x_i\, x_k = 0\,; \quad \Sigma\, c_{ik}\, x_i\, x_k = 0$$

Diese Raumtransformation ist natürlich involutorisch. Herr Professor Bauer hat mich nun, nachdem ich ihm diese Bemerkungen vorgelegt hatte, noch auf folgende weitere Specialisierung aufmerksam gemacht. Nimmt man statt der eben genannten Flächen 2. Ordnung 3 Ebenenpaare, so beschreiben die Polarebenen eines Punktes Ebenenbüschel um die 3 Schnittlinien eines jeden solchen Paares. In der Tat verschwinden unter dieser Voraussetzung für die Fläche 2. Ordnung ja ausser der Determinante auch noch die sämmtlichen Unterdeterminanten 3. Ordnung, sodass also die Form nach dem Frühern eben als zweiteilige darstellbar wird. Natürlich ist auch diese speciellste Transformation involutorisch. Die Geraden a_1, a_2, a_3 fallen zusammen mit b_1, b_2, b_3, wie überhaupt das System der singulären Elemente in beiden Räumen zusammenrückt.

Digitized by Google

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der Bayerischen Akademie der Wissenschaften München

Jahr/Year: 1895

Band/Volume: 1894

Autor(en)/Author(s): Doehlemann Karl

Artikel/Article: Ueber eine einfache, eindeutige Raumtransformation 3. Ordnung 41-50