Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Classe

der

k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.

Band XXIV. Jahrgang 1894.

München.
Verlag der K. Akademie.
1895.

In Commission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).

Maxwell's und Hirn's Untersuchungen über die Constitution des Saturnringes.

Von H. Seeliger.

(Eingelaufen 5. Mai.)

Bei verschiedenen Gelegenheiten habe ich darauf aufmerksam gemacht, dass ein Theil der Untersuchungen Maxwell's[1]) über den Saturnring keineswegs einwandfrei ist und dass sich gegen die Richtigkeit der von ihm angewandten Integrationsmethode begründete Zweifel vorbringen lassen. Ich möchte mir erlauben im Folgenden auf diesen Gegenstand zurückzukommen, hierbei aber auch auf die von Hirn[2]) veröffentlichten Untersuchungen, die wenig bekannt zu sein scheinen, in Kürze eingehen. Wie schon die ganz verschiedenen Wege, welche beide Forscher gehen, klar zeigen, ist die Hirn'sche Abhandlung ohne Kenntniss der mehr als 16 Jahre früher ausgearbeiteten Untersuchung von Maxwell entstanden. Es wird dies im Uebrigen noch besonders in einem von Hirn an Moigno gerichteten Briefe hervorgehoben, welcher der Abhandlung als Anhang beigegeben ist.

---

1) On the Stability of the motion of Saturn's Ring. An Essay, which obtained the Adams Prize for the year 1856 in the University of Cambridge.

2) Mémoire sur les conditions d'équilibre et sur la nature probable des anneaux de Saturne, présenté le 16 Septembre 1872 à l'Académie des Sciences.

Was die Maxwell'sche Untersuchung betrifft, so werde ich mich hier im Wesentlichen nur mit seiner Theorie der Bewegung eines festen Ringes beschäftigen. Die Maxwell-sche Arbeit enthält bekanntlich noch sehr viel mehr und darunter sehr interessante Dinge, freilich nicht alles in wünschenswerther oder auch nur erforderlicher Strenge. Hierauf zurückzukommen, muss ich mir für eine spätere Gelegenheit vorbehalten.

Zunächst möchte ich aber an die von Laplace in der Mécanique céleste gegebenen Entwicklungen anknüpfen und einige Bemerkungen anschliessen, da hierdurch die Sachlage, wie sie die Annahme einer festen Constitution der Saturnringe schafft, nicht schwieriger zu klären sein dürfte, als durch die viel complicirteren aber nicht strengen Untersuchungen von Maxwell oder die Bemerkungen von Hirn.

Es seien R und S die Gesammtmasse des Ringes und des Saturn und mit denselben Buchstaben mögen die beiden Schwerpunkte bezeichnet werden.

Es sei ferner r die Entfernung RS, ϑ der Winkel, den RS mit einer festen durch R gehenden Richtung bildet, φ der Winkel, den RS mit einer durch R gehenden mit dem Ringe fest verbundenen Richtung bildet, dm ein Massenelement des Ringes und ϱ, r' seine Entfernungen von R bezw. von S.

Setzt man dann $\varphi + \vartheta = \psi$ und ausserdem das Potential

$$V = k^2 \sum \frac{dm}{r'}$$

wo k die Anziehungsconstante ist, so werden die zuerst von Maxwell aufgestellten Differentialgleichungen für die Bewegung von R gegen S, sofern die Bewegung als in der Ringebene vor sich gehend betrachtet wird:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d^2\psi}{dt^2}\cdot\sum\varrho^2\,dm = S\frac{\partial V}{\partial\varphi}\\
&\frac{d^2 r}{dt^2} - r\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = \frac{R+S}{R}\cdot\frac{\partial V}{\partial r}\\
&\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\vartheta}{dt}\right) = -\frac{R+S}{R}\cdot\frac{\partial V}{\partial\varphi}
\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Es werde nun der von Laplace betrachtete Fall eines homogenen unendlich dünnen Kreisringes betrachtet. Hier ist V unabhängig von φ und demzufolge, wenn γ eine Constante bedeutet:

$$r^2\frac{d\vartheta}{dt} = \gamma$$

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - r\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = \frac{R+S}{R}\cdot\frac{\partial V}{\partial r}$$

Führt man rechtwinkelige Coordinaten $x = r\cos\vartheta$, $y = r\sin\vartheta$ ein, so kann man schreiben:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{R+S}{R}\,\frac{\partial V}{\partial r}\cdot\frac{x}{r}$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{R+S}{R}\cdot\frac{\partial V}{\partial r}\,\frac{y}{r}$$

S beschreibt also um das Centrum des Kreisringes eine Centralbewegung.

Nun lässt sich leicht zeigen, dass $\frac{\partial V}{\partial r}$ stets positiv ist, woraus folgt, dass S vom Centrum des Kreises abgestossen wird. Die Bewegung ist also instabil und ein Zusammenstoss des Ringes mit dem Saturnkörper unausbleiblich. Es soll hier gezeigt werden, in wie hohem Grade der Zustand, wenn S genau im Centrum des Kreises sich befindet, instabil ist und wie eine minimale Verschiebung ausreicht, um das Auffallen des Ringes auf den Saturn in kurzer Zeit herbeizuführen. Erhält S eine sehr kleine Geschwindigkeit c vom

Kreismittelpunkt fort, so wird es sich offenbar in gerader Linie dem Ringe nähern. Man hat dann

$$\frac{d^2 r}{d t^2} = \frac{R+S}{R} \cdot \frac{\partial V}{\partial r}$$

und hieraus

$$\left(\frac{d r}{d t}\right)^2 = c^2 + 2 \frac{R+S}{R} (V - V_0) \qquad (2)$$

wo V_0 der Werth von V für $r = 0$ ist. Für V ergiebt sich sofort, wenn a der Ringradius ist:

$$V = \frac{k^2 \cdot R}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2 a r \cos\psi}}$$

Mit Hülfe der Transformation

$$\frac{\sin\psi}{\sqrt{1 - 2\frac{r}{a}\cos\psi + \frac{r^2}{a^2}}} = \sin u$$

kann man für alle Rechnungen viel bequemer schreiben:

$$V = \frac{2 k^2 R}{\pi a} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d u}{\sqrt{1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2 \sin^2 u}}$$

$$V_0 = \frac{k^2 R}{a}$$

Man hat also jetzt

$$\left(\frac{d r}{d t}\right)^2 = c^2 + \frac{4 k^2 (R+S)}{\pi a} \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d u}{\sqrt{1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2 \sin^2 u}} - \frac{\pi}{2} \right\}$$

Entwickelt man noch Potenzen von $\frac{r}{a}$ und setzt zur Abkürzung:

$$x = \frac{r}{a}$$

$$\varrho = 1 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot x^2 + \left(\frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 6}\right)^2 x^4 + \ldots$$

$$\lambda^2 = \frac{k^2 (R + S)}{2a}$$

so wird einfach

$$dt = \frac{a\,dx}{\sqrt{c^2 + \lambda^2 \varrho x^2}}$$

Um die Zeit t zu berechnen, welche verfliesst vom Anfange der Bewegung bis zum Zusammenstosse der Saturnoberfläche mit dem Ringe, hat man:

$$t = a \int_0^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{c^2 + \lambda^2 \varrho x^2}}$$

wobei x_1 den Endwerth von x bedeutet.

Das Integral kann unschwer mit beliebiger Annäherung berechnet werden. Ich begnüge mich, seinen Werth zwischen zwei genügend nahe Grenzen einzuschliessen. Man sieht sofort, dass

$$a \int_0^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{c^2 + \lambda^2 x^2}} > t > a \int_0^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{c^2 + \lambda_1^2 x^2}}$$

wobei

$$\lambda_1^2 = \lambda^2 \left[1 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 x_1^2 + \left(\frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 6}\right)^2 x_1^4 + \ldots\right]$$

Man hat demzufolge:

$$\frac{a}{\lambda}\cdot\log\left[\frac{\lambda\, x_1 + \sqrt{c^2 + \lambda^2 x_1^2}}{c}\right] > t$$

$$t > \frac{a}{\lambda_1}\log\left[\frac{\lambda_1\, x_1 + \sqrt{c^2 + \lambda_1^2 x_1^2}}{c}\right]$$

Der Saturnring könnte nach Ansicht von Laplace aus einer sehr grossen Anzahl unendlich dünner Ringe, welche aber inhomogen sind, bestehen. Der Augenschein lehrt aber, dass der Saturnring, als Ganzes aufgefasst, den Eindruck einer im hohen Grade homogenen Massen-Anordnung in peripherischer Richtung macht und man wird die Bewegung von S gegen das gemeinsame Centrum dieser Ringe jedenfalls nahezu erhalten, wenn man den ganzen Saturnring als eine breite aber unendlich dünne Scheibe ansieht. Bezeichnet dann a_0 und a_1 den Radius der inneren bezw. der äusseren Begrenzung, σ die Entfernung eines Ringelementes vom Ringcentrum, δ die homogene Dichtigkeit, so ist jetzt zu setzen:

$$V = k^2\,\delta\int_{a_0}^{a_1}\sigma\, d\,\sigma\int_0^{2\pi}\frac{d\,\psi}{\sqrt{\sigma^2 + r^2 - 2\,\sigma\, r\cos\psi}}$$

Benutzt man wieder die oben angewandte Transformation, und führt die Integration in Bezug auf σ aus, so ergiebt sich:

$$V = 4\,k^2\,\delta\times$$

$$\left\{a_1\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1 - \frac{r^2}{a_1^2}\sin^2 u}\; d\,u - a_0\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1 - \frac{r^2}{a_0^2}\sin^2 u}\; d\,u\right\}$$

Analog dem früheren wird man zur Abkürzung setzen

$$\frac{r}{\sqrt{a_0\cdot a_1}} = x$$

$$\varrho = 1 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 x^2 \cdot \frac{a_0^2 + a_0 a_1 + a_1^2}{3 a_0 a_1} + \ldots .$$

$$\lambda^2 = \frac{k^2 (R + S)}{a_0 + a_1}$$

Hierdurch erhält man

$$\sqrt{a_0 a_1} \frac{d x}{d t} = \sqrt{c^2 + \lambda^2 \varrho x^2}$$

und die Zeit t vom Anfange der Bewegung bis zum Zusammenstosse der inneren Ringbegrenzung mit dem Saturnkörper wird:

$$t = \sqrt{a_0 a_1} \int_0^{x_1} \frac{d x}{\sqrt{c^2 + \lambda^2 x^2 \varrho}}$$

Es könnte t nun wieder innerhalb gewisser Grenzen eingeschlossen werden. Für die folgende Abschätzung genügt es aber vollkommen zu setzen:

$$t = \frac{\sqrt{a_0 a_1}}{\lambda} \cdot \log \operatorname{nat} \left\{ \frac{\lambda x_1 + \sqrt{c^2 + \lambda^2 x_1^2}}{c} \right\}$$

In der m. Entfernung 9.539 erscheinen die Grössen a_0, a_1 und der Radius des Saturn unter den scheinbaren Winkeln 19″. 75, 13″. 75, 8″. 65. Es ist hierbei nur der helle Ring in Betracht gezogen, also der Florring ganz unberücksichtigt gelassen worden, wodurch natürlich t zu gross wird. In den gewöhnlichen astronomischen Einheiten ausgedrückt, ergiebt sich so:

$$\log \lambda = 7.8684 - 10$$
$$\log x_1 = 9.4906 - 10$$

und hiermit:

$$t = [9.0137] \log \operatorname{nat} \left\{ \frac{[7.3590]}{c} + \sqrt{1 + \frac{[4.7180]}{c^2}} \right\}$$

t erhält man also in Tagen. Die in eckige Klammern gesetzten Zahlen bedeuten Brigg. Logarithmen, deren zugehörige Zahlen zu nehmen sind. Da es sich in den folgenden Zahlen nur um äusserst kleine c handelt, so wird genügend genau:

$$t = [9.3759] \log \left\{ \frac{[7.6600 - 10]}{c} \right\}$$

So findet man beispielsweise für

$\frac{1}{c} =$	4 Millionen	$t = 1.01$ Tag
	40000 Millionen	1.96
	4 Billionen	2.44

Diesen 3 Anfangsgeschwindigkeiten entsprechen in der Zeitsecunde die Geschwindigkeiten von 420, 0.042, 0.00042 mm. Es ergiebt sich, dass also selbst bei einer so überaus kleinen Anfangsgeschwindigkeit wie 0.00042 mm pro Secunde schon nach $2^1/_2$ Tagen der innere helle Ringrand mit der Oberfläche des Saturnkörpers zusammenstossen wird. In so hohem Grade instabil ist also der Anfangszustand.

Ich gehe nunmehr zur Integration der Gleichungen (1) über nach der von Maxwell angewandten Methode. Man kann aber gleich von Anfang an die Rechnungen sehr wesentlich vereinfachen und die obigen 3 Gleichungen auf zwei zurückführen, wodurch eine wesentlich kürzere Darstellung sich gewinnen lässt. Setzt man zur Abkürzung

$$A = \frac{R + S}{R S} \Sigma \varrho^2 \, d m$$

so folgt aus (1) sofort

$$A \frac{d \psi}{d t} + r^2 \frac{d \vartheta}{d t} = c$$

wo c eine Integrationsconstante ist. Und da weiter $\psi = \varphi + \vartheta$ war, so hat man

$$\frac{d\,\vartheta}{d\,t} = \frac{c - A\,\frac{d\,\varphi}{d\,t}}{A + r^2}$$

Hierdurch werden die zwei letzten Gleichungen (1):

$$\left.\begin{aligned}
(A + r^2)^2\,\frac{R+S}{R}\cdot\frac{\partial V}{\partial\varphi} &= -\,2\,A\,c\,r\,\frac{d\,r}{d\,t} \\
&+ 2\,A^2\,r\,\frac{d\,r}{d\,t}\cdot\frac{d\,\varphi}{d\,t} + r^2\,(A + r^2)\,A\cdot\frac{d^2\,\varphi}{d\,t^2} \\
(A + r^2)^2\,\frac{R+S}{R}\cdot\frac{\partial V}{\partial r} &= -\,r\,c^2 + (A + r^2)^2\,\frac{d^2\,r}{d\,t^2} \\
&- A^2\,r\left(\frac{d\,\varphi}{d\,t}\right)^2 + 2\,A\,c\,r\,\frac{d\,\varphi}{d\,t}
\end{aligned}\right\}\quad(3)$$

Die Integration dieser Differentialgleichungen ist selbst für sehr einfache Formen von V nicht durchführbar. Es soll nun die von Maxwell eingeführte Voraussetzung gemacht werden, dass die Geschwindigkeiten $\frac{d\,r}{d\,t}$ und $\frac{d\,\varphi}{d\,t}$ stets sehr kleine Grössen sind, deren Producte und zweite Potenzen fortgelassen werden können. Geschieht dies, so ergiebt sich

$$\begin{aligned}
\frac{d^2\,r}{d\,t^2} + \frac{2\,A\,c\,r}{(A + r^2)^2}\,\frac{d\,\varphi}{d\,t} &= \frac{r\,c^2}{(A + r^2)^2} + \frac{R+S}{R}\cdot\frac{\partial V}{\partial r} \\
\frac{d^2\,\varphi}{d\,t^2} - \frac{2\,c}{r\,(A + r^2)}\,\frac{d\,r}{d\,t} &= \frac{(A + r^2)}{A\,r^2}\cdot\frac{R+S}{R}\cdot\frac{\partial V}{\partial\varphi}
\end{aligned}$$

Es werde weiter, ebenfalls mit Maxwell, die Annahme gemacht, dass r nur sehr wenig von einer constanten Grösse u abweicht, dass also in

$$r = u + \varrho$$

ϱ stets eine kleine Grösse ist, deren höhere Potenzen fortgelassen werden können, und dass dasselbe von φ gilt, durch passende Wahl der Anfangsrichtung aber nur dann erreicht werden kann, wenn sich die Bewegung innerhalb eines sehr kleinen Bezirkes abspielt. $\frac{\partial V}{\partial \varphi}$ ist in den folgenden Anwendungen schon von der Ordnung der ϱ und φ klein und demzufolge vereinfachen sich die obigen Differentialgleichungen und nehmen folgende Form an:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2\varrho}{dt^2} + \frac{2Acu}{(A+u^2)^2}\cdot\frac{d\varphi}{dt} &= \frac{uc^2}{(A+u^2)^2} \\ &+ \frac{\varrho c^2}{(A+u^2)^3}(A-3u^2) + \frac{R+S}{R}\cdot\frac{\partial V}{\partial r} \\ \frac{d^2\varphi}{dt^2} - \frac{2c}{u(A+u^2)}\frac{d\varrho}{dt} &= \frac{R+S}{R}\cdot\frac{A+u^2}{Au^2}\frac{\partial V}{\partial \varphi} \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Man sieht indessen, dass diese Gleichungen, selbst wenn alle anderen Voraussetzungen zugelassen werden, gewiss nicht mehr der Wahrheit nahekommen, wenn $A\,u^2$ sehr klein ist. Diese Fälle müssen also von vornherein ausgeschlossen werden. Sobald also A oder u klein werden, gelten die Maxwellschen Gleichungen — denn im Wesen der Sache stimmen diese mit den obigen überein — gewiss nicht mehr. Die obigen Gleichungen sind nun stets, da man sich V in eine Potenzreihe nach den Grössen ϱ und φ entwickelt denken kann und nur die linearen Glieder mitzunehmen braucht, ohne im Allgemeinen neue Ungenauigkeiten einzuführen, lineare Differentialgleichungen mit constanten Coefficienten und ihre Integration gelingt in bekannter Weise durch Exponentialfunctionen. Allgemeinere Fälle durchzuführen macht demnach keine Schwierigkeiten. Es soll hier nur der von Maxwell ganz durchgerechnete Fall vorgenommen werden, dass ein unendlich dünner Kreisring mit dem Radius a vorliegt, welcher in einem Punkte mit der Masse m beschwert ist.

Als die mit dem Ringe fest verbundene Richtung wählen wir dann die Gerade, welche durch m und den Ringmittelpunkt geht. Steht S genau im letzteren, so ist $r = u$, $\varphi = 0$. Der Einfachheit wegen werde noch die Masse des Ringes R gegen S vernachlässigt. Dann findet sich leicht, wenn zur Abkürzung $\mu = \frac{m}{R}$ gesetzt wird

$$A = a^2 (1 - \mu^2); \quad u^2 = a^2 \mu^2; \quad A + u^2 = a^2$$

Das Potential V ergiebt sich mit Rücksicht auf die oben ausgeführte Transformation, wenn noch σ die Entfernung zwischen S und dem Ringcentrum, also

$$\sigma^2 = r^2 + u^2 - 2\, u\, r \cos\varphi$$

ist

$$V = \frac{2\,(R - m)\,k^2}{\pi\, a} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\,u}{\sqrt{1 - \frac{\sigma^2}{a^2} \sin^2 u}} + \frac{m\,k^2}{\sqrt{r^2 + (a-u)^2 + 2\,(a-u)\,r \cos\varphi}}$$

Entwickelt man nach Potenzen von $\varrho = r - u$ und φ und nimmt nur die ersten Potenzen mit, so ergiebt sich leicht:

$$\frac{1}{k^2} \frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{m}{a^2} + \frac{\varrho}{2\,a^3} (R + 3\,m)$$

$$\frac{1}{k^2} \frac{\partial V}{\partial \varphi} = \frac{3}{2} \frac{m}{a} \mu\, (1 - \mu) \cdot \varphi$$

und hiermit werden die Bewegungsgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2 \varrho}{d\,t^2} + \frac{2\,c\,\mu\,(1 - \mu^2)}{a} \cdot \frac{d\,\varphi}{d\,t} \\ &= \frac{c^2 \mu}{a^3} + \frac{\varrho\, c^2}{a^4} (1 - 4\,\mu^2) + \frac{k^2 S}{R} \left[-\frac{m}{a^2} + \frac{\varrho}{a^3} \frac{R}{2} (1 + 3\,\mu) \right] \\ &\frac{d^2 \varphi}{d\,t^2} - \frac{2\,c}{a^3 \mu} \cdot \frac{d\,\varrho}{d\,t} = \frac{3}{2} \cdot \frac{k^2 S}{R} \cdot \frac{m}{a^3} \cdot \frac{1}{\mu\,(1 + \mu)} \cdot \varphi \end{aligned}\right\}$$

Die Integrations-Constante c ist vollkommen willkürlich und die weitere Rechnung führt nur dann auf das Maxwell-sche Resultat, wenn noch eine weitere Annahme gemacht wird, nämlich die, dass für $\varrho = 0$, $\varphi = 0$ eine Gleichgewichtslage überhaupt stattfindet. Diese Annahme ist aber keineswegs selbstverständlich. Diese an sich willkürliche Annahme spricht sich in der Gleichung

$$c^2 = k^2 S a \tag{5}$$

aus. In diesem Falle nun werden die obigen Differentialgleichungen überaus einfach. Setzt man zur Abkürzung

$$p = \frac{2 c \mu (1 - \mu^2)}{a} \qquad \beta = \frac{c^2}{a^4}\left\{\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\mu - 4\mu^2\right\}$$

$$p' = \frac{2c}{a^3 \mu} \qquad \gamma = \frac{3}{2} \cdot \frac{c^2}{a^4} \cdot \frac{1}{1+\mu}$$

so wird:

$$\frac{d^2 \varrho}{d t^2} + p \frac{d \varphi}{d t} = \beta \varrho$$

$$\frac{d^2 \varphi}{d t^2} - p' \frac{d \varrho}{d t} = \gamma \varphi$$

Zur Integration macht man bekanntlich den Ansatz:

$$\varrho = \lambda e^{\nu t} \qquad \varphi = \mu e^{\nu t}$$

dann muss sein:

$$\lambda \nu^2 + p \mu \nu = \beta \lambda$$
$$\mu \nu^2 - p' \lambda \nu = \gamma \mu$$

Die Elimination von λ und μ ergiebt sofort:

$$\nu^4 - \nu^2 (\beta + \gamma - p p') = - \beta \gamma \tag{6}$$

Durch Auflösung dieser in ν^2 quadratischen Gleichung und durch Ausrechnung der zu den Wurzelwerthen von ν gehörenden $\frac{\lambda}{\mu}$ kann man leicht, wie bekannt, die allgemeinen

Lösungen der vorliegenden Differentialgleichungen erhalten. Die Frage, welche hier vorliegt, ist aber, wann diese Lösungen sich durch Sinus- und Cosinusfunctionen von t ausdrücken. Dies tritt offenbar ein, wenn (6) für ν^2 reelle und negative Werthe ergiebt. Die Auflösung von (6) giebt hierfür als nothwendige und hinreichende Bedingungen:

$$\beta\gamma > 0, \beta + \gamma - p p' < 0 \text{ und } (\beta + \gamma - p p')^2 > 4\beta\gamma$$

Die erste Bedingung heisst:

$$1 + \mu > \frac{8}{3}\mu^2$$

woraus folgt:

$$16\mu < 3 + \sqrt{105}, \text{ d. h. } \mu < 0.8279$$

Die weitere Bedingung

$$\mu^2 - \frac{2}{3}\mu < \frac{2}{3}$$

ist für $\mu < 1$ von selbst erfüllt. Die dritte Bedingung schliesslich giebt:

$$\mu^4 + \frac{28}{3}\mu^3 + \frac{52}{9}\mu^2 - \frac{64}{9}\mu > \frac{32}{9}$$

was aussagt $\mu > 0.8159$.

Die angestellte Rechnung, welche mit dem Maxwell'schen Resultate vollkommen übereinstimmt, zeigt also, dass $\mu = \frac{m}{R}$ zwischen den Grenzen 0.8159 und 0.8279 liegen muss, damit die Bewegung rein periodisch sei, in welchem Falle also S immer in der Nähe vom Ringmittelpunkt bleibt, wenn dies zu einer bestimmten Zeit der Fall war und die Geschwindigkeiten zu derselben Zeit sehr klein waren. Dies gilt aber nur, wenn die Gleichung (5) streng erfüllt ist. Ist dies nicht der Fall, so finden sich andere Grenzwerthe für μ, und man kann solche Werthe von c wählen, dass überhaupt keine periodischen Lösungen mehr möglich sind. Ich gehe auf diese Entwicklungen nicht näher ein, weil ich der Meinung bin, dass die Maxwell'sche Integrationsmethode, wenigstens in dieser Form, überhaupt nicht geeignet ist, über die Stabilität der untersuchten Bewegung etwas auszusagen. Mir scheint es unzulässig zu sein, in Differentialgleichungen von der vorliegenden Form die Glieder höherer Ordnung fortzulassen und aus der Thatsache, dass sich dann eine rein periodische Lösung ergiebt, schliessen zu wollen, dass dies auch bei strenger Integration der Fall sei. Die Untersuchung der Stabilität eines Zustandes hat von der Bedingung auszugehen, dass die Coordinaten und Geschwindigkeiten für eine bestimmte Zeit unendlich wenig geändert werden. Man hat also die Integrationsconstanten zu variiren. Bei Maxwell kommen diese Constanten gar nicht vor, vielmehr werden die Veränderungen der Coordinaten als unendlich klein für alle Zeiten betrachtet und mit Hülfe der Vernachlässigung der höheren Potenzen dieser Grössen nachgewiesen, wann eine periodische Bewegung mit sehr kleinen Amplituden sich einstellt. Im Allgemeinen enthält dieses Verfahren unzweifelhaft einen Zirkelschluss und ist unzulässig und daran wird nichts geändert, wenn dasselbe auch in speciellen Fällen zu richtigen Resultaten zu führen geeignet ist. Ein auf diesem Wege gefundenes Resultat kann, wenn nicht die Zulässigkeit des Verfahrens zuerst in besonderen Fällen nachgewiesen wird, eben nur zufällig richtig zu sein.

Die vorliegenden Differentialgleichungen 2. Ordnung enthalten die unabhängige Variable t nicht explicite. Dass aber auch in diesem Falle im Allgemeinen die Maxwell'sche Schlussfolgerung nicht zulässig ist, kann mit Leichtigkeit an beliebig vielen Beispielen gezeigt werden. Nehmen wir z. B.:

$$\frac{d^2 x}{d t^2} = - q^2 x + y^2$$

$$\frac{d^2 y}{d t^2} = -\frac{q^2}{4} y$$

und es werde vorausgesetzt, wie in den obigen Gleichungen, dass sowohl x und y als auch die ersten Differentialquotienten nach t für $t = 0$ sehr klein seien. Dann ergiebt die strenge Integration:

$$y = a \sin \left(\frac{q}{2} t + \frac{b}{2}\right)$$

$$x = \frac{a^2}{2 q^2} + \alpha \sin (q t + \beta) + \frac{a^2}{8 q^2} \cos (q t + b)$$
$$- \frac{a^2}{4 q} \cdot t \cdot \sin (q t + b)$$

worin a, α, b, β die 4 willkürlichen Integrationsconstanten sind und die ersten beiden sehr klein sein müssen. Vernachlässigt man aber in den Gleichungen y^2, so wird:

$$\frac{d^2 x}{d t^2} = - q^2 x \qquad \frac{d^2 y}{d t^2} = -\frac{q^2}{4} y$$

also

$$x = \alpha \sin (q t + \beta) \qquad y = a \sin \left(\frac{q}{2} t + b\right)$$

Die näherungsweise ausgeführte Integration giebt also eine rein periodische Bewegung mit sehr kleinen Amplituden, die strenge Darstellung dagegen enthält ein mit t multiplicirtes Glied. Wie sich die Sachlage bei dem Maxwell'schen Problem über den Saturnring gestaltet, darüber ist vorläufig gar nichts bekannt. Keineswegs aber kann man ohne näheren Nachweis behaupten, dass dort die Fortlassung der höheren Potenzen der Variablen die Form der Integralgleichungen ungeändert lässt.

Danach wird man wohl zugeben müssen, dass das Maxwell'sche Resultat, in der vorliegenden Form wenigstens, gänzlich unbegründet ist. Die vorliegende astronomische Frage scheint mir aber hiervon ganz unabhängig zu sein. Denn es ist sicher, dass die thatsächlichen Verhältnisse beim Saturnring völlig verschieden sind von den Annahmen, auf denen das Maxwell'sche Problem beruht. Der Saturnring ist ein sehr dünnes aber breites Gebilde und der Augenschein lehrt, dass dasselbe im Grossen und Ganzen in peripherischer Richtung von homogener Dichtigkeit ist. Wenn man sich den Ring auch vorstellen will als bestehend aus sehr vielen, sehr dünnen und sehr inhomogenen Ringen, so werden sich doch diese Ungleichförmigkeiten in der Massenvertheilung der einzelnen Ringe nahezu compensiren müssen, so dass man sich offenbar weit mehr der Wahrheit nähert, wenn man den ganzen Ring als homogen betrachtet, als wenn man etwas anderes annimmt. Hierdurch entsteht aber, wie oben auseinandergesetzt wurde, eine im hohen Grade instabile Bewegung und man wird diese mit viel mehr Recht als der Natur entsprechend ansehen können, als etwa die Consequenzen des Maxwell'schen Problemes.

Hirn's Untersuchung der Frage, ob die Saturnringe als fest anzunehmen seien, geht nach einer ganz anderen Richtung als die Maxwell'sche Arbeit. Während letzterer versuchte die Dauerhaftigkeit der Bewegung des Saturn um das Ringcentrum zu untersuchen, beschäftigt sich Hirn mit den Ansprüchen, welche man an die Festigkeit der Ringe zu machen gezwungen ist, falls diese als fest angenommen werden. Hierbei scheint Hirn von der Meinung auszugehen, dass ein nicht homogener Ring überhaupt einen stabilen Zustand zulasse d. h. dass sich Saturn stets in der Nähe des Ringcentrums aufhalten könne. Er stützt sich dabei auf Laplace, der allerdings in der Mécanique céleste seine Untersuchungen über den Saturnring mit der Bemerkung schliesst: „les divers anneaux qui entourent le globe de Saturne sont par conséquent des solides irregulaires d'une lageur inégales etc.". Diese Schlussfolgerung ist aber durch die vorangehende Analyse keineswegs gerechtfertigt, denn Laplace hat nur die Bewegung homogener Ringe untersucht. Deshalb entbehren die auf Laplace's Meinung sich stützenden Bemerkungen Hirn's der sicheren Grundlage und müssen als wenig beweiskräftig angesehen werden. Jedoch enthält die Schrift Hirn's viele interessante Bemerkungen, weshalb ich auf eine kurze Analyse derselben eingehe.

Ein unendlich dünner Kreisring mit dem Radius r, der sich mit der Rotationsgeschwindigkeit ω um den in seinem Mittelpunkt stehenden Saturn dreht, kann, wenn keine Cohäsion zwischen den einzelnen Theilen stattfindet, nur bestehen, wenn in jedem Punkte die Centrifugalkraft gleich der Anziehungskraft ist. Ist also wieder k die Anziehungsconstante, S die Saturnmasse, so muss sein:

$$\omega^2 = \frac{k^2 S}{r^3}$$

Es werde nun ein inhomogener und zwar einseitig belasteter unendlich dünner Kreisring betrachtet. Ein Massenelement desselben sei dm. Der Schwerpunkt R des Ringes fällt dann nicht mit seinem Centrum C zusammen. Hirn nimmt nun an, was eine durchaus willkürliche und unbewiesene Voraussetzung ist, dass durch die Stellung des Saturn S auf der Verbindungslinie CR ein stabiler Zustand gegeben sei. Es müsste also, da die Masse R gegen S zu vernachlässigen ist, R um S rotiren und ebenso schnell um C. Nennt man noch ϑ den Winkel, den der durch dm gehende Kreisradius r mit der Geraden RS bildet, so wird also bei Voraussetzung eines stabilen Zustandes die Entfernung $RS = \varrho$ constant bleiben, also:

$$\frac{d\varrho}{dt} = \frac{d^2\varrho}{dt^2} = 0$$

sein. Dies führt sofort auf die Bedingung

$$\frac{d^2 \varrho}{d t^2} \Sigma\, dm = \Sigma\, dm \cos \vartheta \left\{ \omega^2 r - \frac{k^2 S}{r^2} \right\} = 0. \qquad (7)$$

Hierin erstreckt sich Σ auf die ganze Ringmasse. Nennt man den positiven Theil der linken Seite der letzten Gleichung f, so halten sich also zwei Kräfte $+f$ und $-f$ das Gleichgewicht. Es ist f nichts anderes als die Zug- bezw. Druckkraft, welche bei dem bestehenden Zustand auftritt. In der Hauptsache (mit allerdings nicht bedeutenden Abänderungen in den Zahlen) kann man die auftretenden Fälle als durch folgende typische Annahmen hergestellt ansehen.

Die ganze Ringmasse denke man sich in zwei Massenpunkten m_0 und m_1 vereinigt. In m_0 alle dm, welche in der obigen Summe positive, in m_1 alle dm, welche negative Coefficienten haben. Man denke sich ferner m_0 und m_1 an die Enden eines Durchmessers des Ringes gebracht, in welchem Durchmesser sich auch S befindet. Die Enfernung S vom Centrum des Ringes, also der Mitte der Geraden $m_0\, m_1$, sei in der Richtung nach m_0 positiv gerechnet e. Die Gleichung (7) wird jetzt

$$m_0 \left[\omega^2 (r - e) - \frac{k^2 S}{(r-e)^2} \right] = m_1 \left[\omega^2 (r + e) - \frac{k^2 S}{(r+e)^2} \right]$$

Setzt man $\lambda = \frac{m_0}{m_1}$, so findet man hieraus:

$$\omega = \frac{1}{r-e} \sqrt{\frac{k^2 S}{r-e} \cdot \frac{\lambda - \left(\frac{r-e}{r+e}\right)^2}{\lambda - \frac{r+e}{r-e}}}$$

Es ergiebt sich aus diesem Ausdrucke, dass der angenommene Zustand unmöglich ist, wenn:

$$\left(\frac{r-e}{r+e}\right)^2 < \lambda < \frac{r+e}{r-e}$$

denn dann wird ω imaginär. Sonst aber wird die Kraft f, welche die feste als schwerelos betrachtete starre Verbindung von m_0 und m_1 zu zerreissen oder zusammenzudrücken strebt, sein:

$$f = m_0 \left[\omega^2 (r - e) - \frac{k^2 S}{(r - e)^2} \right]$$

Diese Kraft kann sehr bedeutend werden. Wenn man den oben gefundenen Werth von ω einsetzt und die zweiten Potenzen der als klein vorausgesetzten Grösse $\frac{e}{r}$ vernachlässigt, findet man leicht:

$$f = \frac{6 k^2 S}{r^3} \cdot \frac{m_0 e}{\lambda - 1}$$

Für die numerische Rechnung wird man die Intensität der Schwere auf der Erdoberfläche g, den Erdradius ϱ und die Erdmasse m einführen. Dann ist $m k^2 = g \varrho^2$ und:

$$f = \frac{6}{\lambda - 1} m_0 g \frac{S}{m} \left(\frac{\varrho}{r}\right)^2 \frac{e}{r}$$

Will man nun diese Formel auf den Saturnring anwenden, so wird, ausser den bereits erwähnten und als ziemlich willkürlich bezeichneten Voraussetzungen, noch eine bestimmte Annahme über e gemacht werden müssen, da f bei sehr kleinem e ebenfalls sehr klein wird. Hirn stützt sich hierbei auf Beobachtungen von W. Struve, Harding u. s. f., wonach Saturn excentrisch im Ringe stehen soll. Aehnliche Wahrnehmungen sind auch in neuerer Zeit gemacht worden, entschieden ist indessen diese Frage noch keineswegs. Dass eine excentrische Stellung des Saturn thatsächlich vorgekommen ist, wird man zwar zugeben müssen, über den Betrag der Excentricität aber bestimmte Angaben zu machen, ist bei den einander widerstreitenden Einzelresultaten vorderhand noch nicht möglich. Wesentlich ist ferner für die Anwendung der obigen Formel, dass Saturn die Rotation des Ringes um sein Centrum mitmacht und immer auf einem Radius des letzteren und zwar an derselben Stelle zu liegen kommt. Dies durch die Beobachtungen gegenwärtig nachzuweisen dürfte nicht leicht sein, jedenfalls liegen dergleichen Resultate nicht vor.

Hirn legt seiner Rechnung folgende Zahlen zu Grunde. Drückt man die Strecken in lieues zu 4000 Metern aus, so setzt er:

$$e = 200 \qquad r = 33454$$

wo die letztere Zahl dem äussersten hellen Ringrand entspricht. Weiter wird angenommen $\frac{S}{m} = 92.394$. Dann wird für $\lambda = 10$

$$f = m_0\, g \times 0.00084$$

Schon für kleine Massen kommen bedeutende Drucke heraus. Nimmt man z. B. an, dass m_0, welches ungefähr der Masse des halben Ringes entspricht, die Masse einer Kubiklieue Wasserstoff ist, so ergiebt sich $f = 5$ Millionen Kilogramm. Unter solchen Drucken würde aber jedenfalls ein aus so dünnem Stoffe bestehender Ring auseinanderbrechen müssen. Wollte man aber die Festigkeit so gross annehmen, dass diesen Drucken Widerstand geleistet werden könnte, so müsste man noch die Bedingung der beinahe vollständigen Starrheit hinzufügen. Denn sonst würden sehr bedeutende Verbiegungen auftreten müssen, von deren Qualität man sich leicht Rechenschaft abgeben kann. Da aber die Beobachtungen dergleichen nicht verrathen, so muss man wohl, will man nicht mit ganz abnormen und unbekannten Verhältnissen rechnen, die Hypothese sehr dünner starrer Ringe aufgeben.

Es bliebe indessen noch übrig, den Saturnring als ein oder mehrere sehr dünne Bänder von endlicher Breite aufzufassen. Ein solches kreisförmiges Band habe am inneren bezw. am äusseren Rande die Radien r_i und r_a. Jeder als fest angenommene Theil des Bandes, welcher zwischen zwei den unendlich kleinen Winkel $\delta\,\theta$ mit einander bildenden Radien liegt, wird mit den übrigen zusammen auch ohne Cohäsion die vorgeschriebene Rotation ausführen, wenn

$$\int_{r_i}^{r_a} d\,m \left[\omega^2\,r - \frac{k^2\,S}{r^2}\right] = 0.$$

Bezeichnet e die sehr kleine Dicke des Ringes und δ die gleichförmige Dichtigkeit, so ist

$$d\,m = e \cdot \delta \cdot r \cdot d r \cdot \delta\,\theta$$

und es müsste also sein:

$$\int_{r_i}^{r_a} \left[\omega^2\,r - \frac{k^2\,S}{r^2}\right] e\,r \cdot d\,r = 0.$$

e ist im Allgemeinen eine Function von r, die aber völlig unbekannt ist. Hirn verfolgt ausführlicher zwei Annahmen: 1) Setzt man $e = e_0 =$ constant, so ergiebt sich:

$$\omega^2 = \frac{3\,k^2\,S}{r_a{}^3 - r_i{}^3} \cdot \log \frac{r_a}{r_i}$$

Es giebt einen mittleren Radius r_m, wo der Centrifugalkraft genau durch die Anziehung das Gleichgewicht gehalten wird. Hierfür ist

$$\omega^2\,r_m{}^3 = k^2\,S$$

woraus sich ergiebt:

$$r_m = r_i \sqrt[3]{\frac{\left(\frac{r_a}{r_i}\right)^3 - 1}{3 \log \frac{r_a}{r_i}}}$$

2) Man kann u. A. annehmen $e\,r = \text{Const.}$ e entspricht dann der Ordinate einer gleichseitigen Hyperbel, deren Abscisse r ist. Dann findet sich leicht:

$$\omega^2 = \frac{2\,k^2\,S}{r_i\,r_a\,(r_i + r_a)}$$

und

$$r_m = \sqrt[3]{\frac{r_i\,r_a\,(r_i + r_a)}{2}}$$

Hirn setzt entsprechend der Begrenzung des inneren Theiles des hellen Ringes, vom Florring bis zur Cassini'schen Linie, in lieues zu 4000 Meter:

$$r_i = 23670 \qquad r_a = 30599$$

Dann ergiebt die erste Annahme $r_m = 27134$ und die zweite 26986, also wie zu erwarten nahe übereinstimmende Werthe.

Offenbar überwiegt bei jenen Ringtheilen, für welche $r > r_m$, die Centrifugalkraft die Anziehung und für $r < r_m$ findet das Entgegengesetzte statt. Die auftretenden Zugkräfte werden also dahin streben bei r_m eine Theilung des Ringes herbeizuführen. Diese Zugkraft f wirkt längs der Fläche von der Höhe e_m, in welcher der mit dem Radius r_m construirte Kreiscylinder die Ringmasse schneidet. Auf die Flächeneinheit bezogen wird demgemäss f ausgedrückt durch:

$$f = \frac{1}{r_m\,\delta\,\theta} \cdot \int_{r_i}^{r_m} \frac{d\,m}{e_m}\left(\omega^2\,r - \frac{k^2\,S}{r^2}\right)$$

oder

$$f = \frac{\delta}{r_m} \cdot \int_{r_i}^{r_m} \frac{e\,r\,d\,r}{e_m}\left(\omega^2\,r - \frac{k^2\,S}{r^2}\right)$$

$$= -\frac{\delta}{r_m} \cdot \int_{r_m}^{r_a} \frac{e\,r\,d\,r}{e_m}\left(\omega^2\,r - \frac{k^2\,S}{r^2}\right)$$

Führt man hierin wieder die beiden oben verfolgten Annahmen durch und setzt zuerst $e = e_m$, so wird

$$f = \frac{k^2 S \cdot \delta}{r_m} \cdot \left\{ \frac{1}{3} \left[\left(\frac{r_a}{r_m} \right)^2 - 1 \right] - \log \frac{r_a}{r_m} \right\}$$

Durch Einführung der Schwere g und mit den obigen Zahlen ergiebt sich:

$$f = 845911 \cdot \delta \cdot g$$

Die analoge Rechnung für die zweite Annahme $er =$ Const. ergiebt:

$$f = \frac{k^2 S \delta}{r_m} (r_a - r_m) \left\{ \frac{1}{2} \frac{r_a + r_m}{r_m^2} - \frac{1}{r_a} \right\}$$

und in Zahlen $f = 859258 \cdot \delta \cdot g \cdot$

Die angestellten Rechnungen zeigen jedenfalls, dass sehr bedeutende Zugkräfte die Zertheilung des ringförmigen Bandes herbeizuführen suchen, denen nur die Cohäsion der Masse sich entgegensetzt. Indessen wirkt auch die Anziehung der einzelnen Ringtheile auf einander in gleichem Sinne. Man wird aber wohl von vorn herein annehmen müssen, dass die letztere bei der nicht bedeutenden Dichtigkeit der Ringmaterie nicht viel an dem erlangten Resultate ändern wird. Ich übergehe deshalb die von Hirn in dieser Richtung ausgeführten Betrachtungen, zumal dieselben gegenwärtig vollkommener angestellt werden können, als dort geschehen. Hirn findet, dass bei Berücksichtigung der Ringanziehung der zuletzt angeführte Zahlenausdruck für f sich umwandelt in:

$$f = 859258 \cdot \delta \cdot g - 0.57 \, (\delta \cdot g)^2$$

Um eine genauere Vorstellung von der Grösse dieser Kräfte zu erlangen, sei erwähnt, dass Buchenholz ein Körper ist, der bei grösster Leichtigkeit die stärksten Drucke aushalten kann. Hierfür ist $\delta = 0.7$ und damit wird $f = 598687600$ kg pro qm. Diese Belastung ist etwa 40 Mal so gross, als Buchenholz erfahrungsgemäss ertragen kann. Indessen ist offenbar die Kraft f bedeutend kleiner, wenn die Breite des Ringes abnimmt, und man kann sich die Frage vorlegen, wie breit die einzelnen Ringe sein müssen, um bei gegebener Festigkeit bestehen zu können. Die Rechnung ist leicht auszuführen, wenn die Ringanziehung vernachlässigt wird. Für eine Materie von der Beschaffenheit des Buchenholzes folgt dann, dass der innere helle Ring mindestens aus 5 einzelnen Ringen bestehen müsste. Ganz ähnliches gilt natürlich auch für den äusseren Ring, so dass also mit der festen Constitution der Ringe die Folgerung verknüpft ist, dass dieselben aus einer grösseren Zahl schmaler Ringe bestehen müssen. Der Augenschein und manche Beobachtungen, namentlich aus früherer Zeit, widersprechen dem durchaus nicht, und es ist bekannt, dass Laplace etwas ganz ähnliches als durch die Beobachtungen bestätigt angenommen und hierauf seine Rechnungen gegründet hat.

So interessant dieses Resultat von Hirn auch ist, so ändert es doch nichts an der Unzulänglichkeit der Annahmen. Der der Rechnung zu Grunde gelegte Zustand ist ein im höchsten Grade instabiler, wie oben auseinandergesetzt, und demzufolge ist die Untersuchung über die Unmöglichkeit fester Ringe unnöthig, weil das System nur ganz kurze Zeit bestehen kann. Es ist schon oben erwähnt worden, dass auch einseitige Belastungen nichts an der Sachlage ändern können, wenn man nicht das Aussehen der Saturnringe ganz ignoriren will und so wird wohl immer das Hauptargument gegen die Möglichkeit fester Ringe in den einfachen Rechnungen bestehen, welche am Anfange dieses Aufsatzes ausgeführt worden sind.

Frägt man nun weiter nach der eigentlichen Constitution der Ringe, nachdem der feste Aggregatzustand ausgeschlossen ist, so drängt sich zunächst die Vermuthung auf, diese Gebilde könnten flüssiger oder gasförmiger Natur sein. Um die Mitte dieses Jahrhunderts hatte diese Hypothese an den beiden amerikanischen Gelehrten W. C. Bond und Peirce energische Verfechter gefunden, man wird sie aber trotzdem nicht ernstlich in Betracht zu ziehen haben. Lange Zeit und vereinzelt auch jetzt noch hat man die berühmten Experimente von Plateau über ringförmige Gebilde, die in rotirenden Flüssigkeiten auftreten, als einen Beweis für die Möglichkeit solcher kosmischen Gebilde angesehen. Diese Versuche veranschaulichen aber nur die Wirkung der Capillarität und haben mit Gravitationswirkungen gar nichts zu schaffen. Sie hängen also gar nicht mit den Gleichgewichtsfiguren kosmischer Massen zusammen, ganz abgesehen davon, dass sie auch äusserlich den Verhältnissen beim Saturnring nicht entsprechen. Denn hier liegt in der Mitte der Ringe von sehr geringer Masse, die bedeutende Saturnmasse, welcher Fall sich bei den genannten Figuren wohl kaum erzielen lässt.

Nachdem Laplace die Theorie der ringförmigen Gleichgewichtsfiguren zu untersuchen begonnen hatte, ist dieses Problem ausführlich und streng von verschiedenen Seiten behandelt worden. Die Hauptfrage, die aber bei einer Verwerthung der erlangten Resultate in der Astronomie von der grössten Wichtigkeit ist, ob nämlich solche Figuren stabil sind und nicht durch Hinzutritt kleiner Störungen von aussen auseinanderfliessen, hat eine genügende Beantwortung bis jetzt nicht gefunden, indessen ist kaum wahrscheinlich, dass die erforderliche Stabilität vorhanden ist. Zu diesem Resultate kommt auch Hirn auf einem interessanten Wege, auf welchem ihm hier gefolgt werden soll.

Es werde angenommen, dass zu einer gewissen Zeit der flüssige Ring wirklich bestehe, wenn Saturn genau in dessen Centrum sich befindet. Dann wird der Ring mit gleichförmiger Geschwindigkeit wie ein fester Körper um sein Centrum rotiren und die einzelnen Theilchen werden keine Verschiebung gegen einander erleiden. Wenn nun Saturn sich aus irgend einer Ursache von dem Ringmittelpunkt ein wenig entfernt, so werden die einzelnen Theilchen nicht mehr gleichförmig rotiren können. Dort wo sie dem Saturn näher stehen, werden sie sich schneller, dort wo sie von ihm entfernter sind, werden sie sich langsamer bewegen müssen. Man wird sich, weil die Anziehung des Ringes auf seine einzelnen Theile gering ist gegenüber der Anziehung des Saturn, ein näherungsweise richtiges Bild von der Bewegung bilden, wenn man annimmt, dass die einzelnen Theile Ellipsen beschreiben, deren Brennpunkt im Saturn liegt. Ist die Ringmaterie ein zusammendrückbares Gas, so werden die einzelnen Theilchen in der Saturnnähe, da sie sich hier schneller bewegen, auseinanderrücken und in der Saturnferne wird das Entgegengesetzte eintreten. Ist der Ring aus einer unzusammendrückbaren Flüssigkeit gebildet, so werden sich die einzelnen Theilchen im letzteren Punkte anhäufen un der Ring wird hier breiter oder dicker werden müssen. Dieses Spiel wiederholt sich bei jedem Umlaufe, also alle 10 bis 14 Stunden. Infolge der Reibung zwischen den einzelnen Theilchen wird beim Anhäufen oder Zusammendrängen der Theilchen Wärme erzeugt werden, was aber in der Saturnferne stattfinden muss, während, wenigstens ist dies bei gasförmiger Constitution sicher, in der Saturnnähe eine Abkühlung erfolgen wird. Infolge der Wärmeleitung, des Stosses der einzelnen Theilchen gegeneinander etc., werden nun, wie die Thermodynamik zeigt, sich die Wärmewirkungen in der Saturnferne und -Nähe und auch in den dazwischen liegenden Punkten nicht ausgleichen, vielmehr bleibt ein Rest übrig, welcher eine Temperaturerhöhung der Ringmasse hervorbringt. Dies kann aber nur auf Kosten der Bewegungsenergie geschehen und es werden sich also die Dimensionen des Ringes nach dem Saturn hin verkleinern. Die Innenseite des Ringes wird sich demzufolge ziemlich gleichmässig von allen Seiten, langsam dem Saturn nähern, um sich schliesslich mit ihm zu vereinigen.

Auf Grund seiner Untersuchungen kommt Hirn zu dem

Resultate, dass sich alle Schwierigkeiten und Unmöglichkeiten heben, wenn man annimmt, der Saturnring bestehe aus einzelnen discreten Massentheilchen oder er sei, kurz gesagt, von staubförmiger Structur. Wie sich die mechanischen Verhältnisse in einem solchen Systeme abwickeln, hat Hirn nicht weiter untersucht und die kurzen Bemerkungen, die er in dieser Richtung macht, werden voraussichtlich theilweise der Correctur bedürfen. Dagegen hat Maxwell diese Probleme in Angriff zu nehmen versucht, ohne dass es ihm aber, wie ich glaube, gelungen ist, zu einer einwurfsfreien Lösung zu gelangen.

Die Erscheinungen, welche ein staubförmiger Saturnring darbietet, habe ich in zwei grösseren Arbeiten besprochen und ich glaube dort den stricten Nachweis geliefert zu haben, dass alle Erscheinungen, die zum Theil sehr complexer Natur sind, nur durch die zu Grunde gelegte Annahme erklärt werden können. Bei dem noch nicht gehörig entwickelten Zustande der Dynamik des Saturnringes dürfte auf diesem Wege die festeste Stütze gewonnen sein, die man bis jetzt der Maxwell-Hirn'schen Annahme geben konnte.

Es ist interessant, dass die Forschung, nachdem der Reihe nach alle nur denkbaren Annahmen über die Constitution des Saturnringes discutirt und als wahrscheinlich hingestellt worden sind, wieder jener Ansicht zuneigt, welche als eine der ersten aufgestellt worden ist, um dann aber, wie es scheint, völlig der Vergessenheit zu verfallen. Es ist von verschiedenen Seiten bemerkt worden, dass Jacques Cassini (1677—1756) bereits die Maxwell-Hirn'sche Ansicht ausgesprochen hat. Die Wichtigkeit der Angelegenheit wird es wohl rechtfertigen, wenn ihr etwas nachgegangen wird. Bei Gelegenheit der Veröffentlichung seiner Beobachtungen des Saturn, namentlich des Verschwindens des Ringes im Jahre 1715 [1]) spricht sich Cassini ganz deutlich aus. Pag. 47 sagt er:

1) Observations nouvelles sur Saturne. Mémoires de mathematique et de physique, tirés des registres de l'académie royale des sciences de l'année 1715 pg. 41 ff.

„Cette apparence qui n'a point sa pareille dans les corps célestes, a donné lieu de conjecturer que ce pouvait être un amas de satellites qui étaient dans le plan des autres et faisaient leur révolution autour de cette planète, que leur grandeur est si petite qu'on ne peut pas les apercevoir chacun séparément, mais qu'ils sont en même temps si près l'un de l'autre qu'on ne peut point distinguer les intervalles qui sont entr'eux, ensorte qu'ils paraissent former un corps continu".

Hieran werden Bemerkungen geknüpft über Schwierigkeiten, die bei der Darstellung der Beobachtungen auftreten sollen, in dieser Form aber wohl nicht existiren. Den Schluss bildet (pg. 48) die Bemerkung:

„On peut donc supposer avec beaucoup de vraisemblance que l'anneau de Saturne est formé d'une infinité de petites Planètes fort près l'une de l'autre, qui étant comprises dans son Atmosphère, sont entraînés par le mouvement qui fait tourner Saturne autour de son centre et que dans cette Atmosphère etc."

Hiernach nimmt also Cassini an, dass die discreten Theilchen, welche den Ring bilden, in der Atmosphäre des Saturn sich befinden und mit dieser durch die Rotation des Saturn herumgeführt werden. Das ist freilich ein Zusatz, welcher die ganze Auffassung völlig verschiebt, und da Cassini diesen Zusatz für ganz wesentlich hält, steht er doch auf wesentlich anderem Boden als auf dem der Hypothese von Maxwell und Hirn. Es erscheint demnach doch nicht so räthselhaft, dass die Cassini'sche Ansicht nicht allgemeine Verbreitung gefunden hat.

Danach wird man, wie ich glaube, nicht gegen die historische Gerechtigkeit verstossen, wenn man die Erkenntniss, dass die Saturnringe eine staubförmige Constitution haben, an die Namen Maxwell und Hirn knüpft.