Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Classe

der

k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.

Band XXIV. Jahrgang 1894.

München.
Verlag der K. Akademie.
1895.

In Commission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).

Ueber die Anwendung des Princips des kleinsten Zwanges auf die Elektrodynamik.

Von A. Wassmuth in Graz.

(Eingelaufen 5. Mai.)

Ein Punkt m eines Systems von Partikeln möge sich in der Zeit τ, wenn er frei wäre, von a nach b bewegen, während seine wirkliche Bewegung durch die Strecke $a\,c$ dargestellt sei; dann sagt bekanntlich das von Gauss aufgestellte Princip des kleinsten Zwanges aus, dass $\Sigma\, m \cdot b\,c^2$ ein Minimum ist oder dass, wenn $a\,d$ irgend eine virtuelle d. h. mit den Bedingungen des Systems verträgliche Bewegung vorstellt, stets: $\Sigma\, m \cdot b\,c^2 < \Sigma\, m \cdot b\,d^2$ sein muss. Sind $x\,y\,z$ die Coordinaten des Punktes m, auf den die Kräfte $m\,X$, $m\,Y$, $m\,Z$ wirken sollen, so geht irgend eine Coordinate x in der sehr kleinen Zeit τ für die wirkliche Bewegung über in:

$$x + \frac{d\,x}{d\,t}\tau + \frac{1}{2}\frac{d^2\,x}{d\,t^2}\tau^2$$

und für die freie Bewegung über in:

$$x + \frac{d\,x}{d\,t}\tau + \frac{1}{2}X\,\tau^2$$

so dass das Quadrat der Ablenkung $b\,c^2$ oder das Quadrat der Coordinatendifferenzen gleich $\frac{\tau^4}{4}\left[\left(\frac{d^2\,x}{d\,t^2} - X\right)^2 + \ldots\right]$ wird.

Man hat daher einen Ausdruck Z — er soll der Zwang des Systems heissen — von der Form

$$Z = \Sigma m \left[\left(\frac{d^2 x}{d t^2} - X \right)^2 + \left(\frac{d^2 y}{d t^2} - Y \right)^2 + \left(\frac{d^2 z}{d t^2} - Z \right)^2 \right]$$

wobei sich die Summe auf alle Partikeln erstreckt, zu einem Minimum in Bezug auf die diversen Beschleunigungen: $\frac{d^2 x}{d t^2}, \frac{d^2 y}{d t^2}, \ldots$ die kurz $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z} \ldots$ geschrieben werden sollen, zu machen. Differenzirt man dabei die Bedingungsgleichungen des Systems: $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0 \ldots$ zweimal nach der Zeit, so muss man sich, wie aus der obigen Ableitung hervorgeht[1]), gegenwärtig halten, dass die Coordinaten x und ihre ersten Differentialquotienten als „gegeben" anzusehen sind; die Gleichung: $\frac{d^2 \varphi}{d t^2} = 0$ drückt nur aus, dass die $\frac{\partial \varphi}{\partial t} \ddot{x} + \ldots$ unveränderlichen Werthen gleich sein müssen. Für gegebene Werthe der x und $\frac{d x}{d t}$ sollen also die $\ddot{x}$ so bestimmt werden, dass Z zu einem Minimum werde. Man erhält so die bekannten Gleichungen:

$$m(\ddot{x} - X) + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + \ldots = 0 \quad \text{u. s. w.}$$

Statt der Coordinaten $x\, y\, z \ldots$ sollen nun n von einander unabhängige Variabeln $p_1\, p_2\, p_3 \ldots p_n$ eingeführt werden, so dass die virtuelle Arbeit $= P_1 \delta p_1 + P_2 \delta p_2 + \ldots + P_n \delta p_n$ und die lebendige Kraft $T = \frac{1}{2} \sum_{\varkappa \lambda} a_{\varkappa \lambda}\, \dot{p}_\varkappa\, \dot{p}_\lambda$ wird, wobei die P_μ und $a_{\varkappa\lambda} = a_{\lambda\varkappa}$ nur von den Coordinaten abhängen und die griechischen Buchstaben, wie im folgenden immer, von 1 bis n gehen.

---

1) Lipschitz, Borch. Jour. 82. Band 316 (Rausenberger Mechanik I 166); Gibbs, Beiblätter IV 319.

Dann wird der Zwang Z, wie Lipschitz (a. a. O. p. 330) zeigte, ausgedrückt durch:

$$Z = \sum_{\mu\nu} \frac{A_{\mu\nu}}{\varDelta} \left[a_{1\mu}\ddot{p}_1 + a_{2\mu}\ddot{p}_2 + \ldots + \begin{bmatrix}1\,1\\ \mu\end{bmatrix}\dot{p}_1\dot{p}_1 + \begin{bmatrix}1\,2\\ \mu\end{bmatrix}\dot{p}_1\dot{p}_2 + \ldots - P_\mu\right]$$
$$\left[a_{1\nu}\ddot{p}_1 + a_{2\nu}\ddot{p}_2 + \ldots + \begin{bmatrix}1\,1\\ \nu\end{bmatrix}\dot{p}_1\dot{p}_1 + \begin{bmatrix}1\,2\\ \nu\end{bmatrix}\dot{p}_1\dot{p}_2 + \ldots - P_\nu\right]$$

wobei $\varDelta$ die Determinante aus den $a_{\varkappa\lambda}$ und $A_{\mu\nu}$ die adjungirte

$$\left(A_{\mu\nu} = \frac{\partial \varDelta}{\partial a_{\mu\nu}}\right)$$

vorstellt und

$$\begin{bmatrix}\varkappa\,\lambda\\ \mu\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial a_{\varkappa\mu}}{\partial p_\lambda} + \frac{\partial a_{\lambda\mu}}{\partial p_\varkappa} - \frac{\partial a_{\varkappa\lambda}}{\partial p_\mu}\right]$$

gesetzt ist.

Der Ausdruck für Z wird übersichtlicher und für (gewisse) physikalische Probleme geeigneter, wenn die lebendige Kraft T eingeführt wird. Setzt man nämlich:

$$T_\mu = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{p}_\mu} - \frac{\partial T}{\partial p_\mu}$$

so ist[1]) auch

$$T_\mu = a_{1\mu}\ddot{p}_1 + a_{2\mu}\ddot{p}_2 + \ldots + \begin{bmatrix}1\,1\\ \mu\end{bmatrix}\dot{p}_1\dot{p}_1 + \begin{bmatrix}1\,2\\ \mu\end{bmatrix}\dot{p}_1\dot{p}_2 + \ldots$$

und es wird:

$$Z = \sum_{\mu\nu} \frac{A_{\mu\nu}}{\varDelta}\,[T_\mu - P_\mu]\,[T_\nu - P_\nu] \quad \text{d. i.} \qquad \text{(I)}$$

$$Z = \frac{1}{\varDelta}\left|\begin{array}{l} A_{11}(T_1 - P_1)^2 + A_{22}(T_2 - P_2)^2 + \ldots \\ \qquad + 2A_{12}(T_1 - P_1)(T_2 - P_2) + \ldots \\ \qquad\qquad + 2A_{23}(T_2 - P_2)(T_3 - P_3) + \ldots \end{array}\right|$$

1) C. f. e. g. Rayleigh, der Schall, p. 111; Stäckel, Borch. Jour. 107, p. 322.

Da dieser Ausdruck für den Zwang Z, wie es scheint, neu ist, so ist es nicht überflüssig, nachzuweisen, dass man in Ausführung der Minimumsbedingung für Z zu den Lagrange-schen Gleichungen kommt. Dabei hat man zu Folge der obigen Bemerkung bei der Differentiation des Z nach $\ddot{p}_1$ die Grössen p_1 und $\dot{p}_1$ als gegeben oder fix anzusehen und von der Beziehung:

$$\frac{\partial T_\mu}{\partial \ddot{p}_\varkappa} = a_{\mu\varkappa} = a_{\varkappa\mu}$$

Gebrauch zu machen. Man erhält so:

$$\frac{\partial Z}{\partial \ddot{p}_1} = \sum_{\mu\nu} \frac{a_{1\mu} A_{\mu\nu}}{\varDelta} (T_\nu - P_\nu) + \sum_{\mu\nu} \frac{a_{1\nu} A_{\mu\nu}}{\varDelta} (T_\mu - P_\mu)$$

oder, da diese Summen einander gleich sind,

$$\frac{\partial Z}{\partial \ddot{p}_1} = \frac{2}{\varDelta} \sum_{\mu\nu} a_{1\mu} A_{\mu\nu} (T_\nu - P_\nu)$$

oder:

$$\frac{1}{\varDelta}\sum_\nu (T_\nu - P_\nu) \sum_\mu a_{1\mu} A_{\mu\nu} = \frac{1}{\varDelta}\sum_\nu (T_\nu - P_\nu)[a_{11} A_{1\nu} + a_{12} A_{2\nu} \ldots]$$

Da nun nach einer Eigenschaft der Determinanten: $a_{11} A_{1\nu} + a_{12} A_{2\nu} + \ldots = \varDelta$ oder Null wird, je nachdem $\nu = 1$ oder $\nu > 1$ ist, so folgt also aus: $\frac{\partial Z}{\partial \ddot{p}_1} = 0$ auch $T_1 - P_1 = 0$ d. i. die Lagrange'sche Gleichung:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{p}_1} - \frac{\partial T}{\partial p_1} = P_1$$

Für den Zwang Z lassen sich ganz ähnlich, wie man für die Lagrange'sche Grundgleichung Nebenformen[1]) aufstellte, noch andere Ausdrücke finden.

Wichtig für die Anwendung ist die Bemerkung, dass sich der Zwang Z so darstellen lässt, dass darin eine Be-

1) Weinstein, Wied. Ann. 15. Budde, Mechanik I 397.

schleunigung z. B. $\ddot{p}_1$ von den übrigen losgelöst erscheint; es ist: $Z \cdot \Delta = \frac{1}{2}(L_1 \ddot{p}_1^2 + 2 M_1 \ddot{p}_1 + N_1)$ wo die $L_1 M_1 N_1$ die $\ddot{p}_1$ nicht enthalten und L_1 und M_1 aus $\frac{\partial Z}{\partial \ddot{p}_1} = 0$ leicht gefunden werden können.

„Sind bei einem physikalischen Probleme die virtuelle Arbeit $\sum_\mu P_\mu \delta p_\mu$ und die lebendige Kraft $T = \frac{1}{2} \sum_{\varkappa\lambda} a_{\varkappa\lambda} \dot{p}_\varkappa \dot{p}_\lambda$ gegeben, so lässt sich mittelst der Gleichung I der Zwang des Systems bestimmen; die Minimumseigenschaft von Z drückt ein — in vielen Fällen sicher neues — Gesetz für das System aus, ganz abgesehen davon, dass andere, vielleicht schon bekannte Gesetze durch wirkliches Differenziren des Z daraus folgen."

So hat z. B. Herr Boltzmann in wundervoll einfacher Weise an der Hand der Lagrange'schen Gleichungen, somit sich stützend auf mechanische Vorgänge, in seinen Vorlesungen I die Maxwell'schen Gleichungen der Elektrizität abgeleitet. Es erhellt, dass man auch vom Principe des kleinsten Zwanges in der Form der obigen Gleichung I als Obersatz ausgehen kann und, da die virtuelle Arbeit und die lebendige Kraft angegeben werden, durch Aufsuchen der Minimumsbedingung zu den Lagrange'schen Gleichungen und — nun ganz an der Hand Boltzmann's fortschreitend — zu den Maxwell'schen Gleichungen kommen muss. Wenn es auch auf diese Art schwer möglich sein wird, die klassischen Methoden Boltzmann's, besonders die im 2. Theile seiner Vorlesungen, noch mehr zu vereinfachen, so drückt die Bedingung: $Z =$ Minimum immerhin eine neuerkannte Wahrheit aus.

Als ein Beispiel möge der Fall von 2 cyklischen Coordinaten $\dot{p}_1 = l_1'$ und $\dot{p}_2 = l_2''$ — von den langsam veränderlichen Parametern k werde einstweilen abgesehen — betrachtet werden. Hier ist: $T = \frac{1}{2} a_{11} \dot{p}_1^2 + \frac{1}{2} a_{22} \dot{p}_2^2 + a_{12} \dot{p}_1 \dot{p}_2 = \frac{A}{2} l_1'^2 + \frac{B}{2} l_2'^2 + C l_1' l_2'$, wenn Boltzmann's Bezeichnung eingeführt wird. Es folgt: $a_{11} = A$, $a_{22} = B$, $a_{12} = C$, $\Delta = \begin{vmatrix} A & C \\ C & B \end{vmatrix} = A B - C^2$, $A_{11} = B$, $A_{12} = - C$, $A_{22} = A$, $T_1 = \frac{d}{d t} (A l_1' + C l_2')$, $T_2 = \frac{d}{d t} (B l_2' + C l_1')$. Ausserdem möge wegen der Reibung oder Zähigkeit die von Rayleigh aufgestellte Zerstreuungsfunktion (a. a. O. 108 und 109 pg.) durch $F = \frac{1}{2} \sum (\varkappa_1 \dot{x}_1^2 + \ldots) = \frac{1}{2} b_{11} \dot{p}_1^2 + \frac{1}{2} b_{22} \dot{p}_2^2 + b_{12} \dot{p}_1 \dot{p}_1$ bezeichnet werden; dann tritt bekanntlich zu den Kräften $P_\mu = L_\mu$ noch hinzu: $- \frac{\partial F}{\partial \dot{p}_\mu}$. Auch erhellt aus inneren Gründen, dass $b_{12} = 0$ ist.

Hiemit wird denn schliesslich der Zwang Z ausgedrückt durch:

$$Z \times (A B - C^2) = B \left[\frac{d}{d t} (A l_1' + C l_2') - L_1 - b_{11} l_1'\right]^2$$

$$- 2 C \left[\frac{d}{d t} (A l_1' + C l_2') - L_1 - b_{11} l_1'\right]\left[\frac{d}{d t} (B l_2' + C l_1') - L_2 - b_{11} l_2'\right]$$

$$+ A \left[\frac{d}{d t} (B l_2' + C l_1') - L_2 - b_{22} l_2'\right]$$

und es soll Z ein Minimum sein, derart, dass $\frac{\partial Z}{\partial l_1''} = 0$ und $\frac{\partial Z}{\partial l_2''} = 0$ ist. Hierin stellen (Boltzmann I pg. 34 und 35) l_1' und l_2' die Stromstärken in 2 Leitern, b_{11} und b_{22} deren Widerstände, L_1 und L_2 die elektromotorischen Kräfte in ihnen, A und B die Coefficienten der Selbstinduction und C den der gegenseitigen Induction vor. Sind noch Condensatoren (l. c. I 35) eingeschaltet, so treten noch Glieder von der Form: $d_1 l_1$ und $d_2 l_2$ in die Klammern.

Die Bedingung: $Z =$ Minimum spricht also ein elektrodynamisches Grundgesetz aus und liefert die Theorie der Selbstinduction und wechselseitigen Induction für nicht zu schnelle Stromschwankungen. Will man auch die ponderomotorischen Kräfte erhalten, so muss ein langsam veränderlicher Parameter k neben l_1 und l_2 als 3. Variabele eingeführt, der allgemeine Ausdruck für Z aufgestellt und die Gleichung $\frac{\partial Z}{\partial \ddot{k}} = 0$, wobei k und $\dot{k}$ als constant anzusehen sind, gebildet werden; erst nachher hat man $\dot{k} = 0$ und $\ddot{k} = 0$ zu nehmen und erhält, wie Boltzmann, die Beziehung;

$$K = -\frac{\partial T}{\partial k} = -\frac{l_1'^2}{2}\frac{\partial A}{\partial k} - \frac{l_2'^2}{2}\frac{\partial B}{\partial k} - l_1' l_2' \frac{\partial C}{\partial k}$$

Auch die Akustik bietet ein weites Feld zur Anwendung des obigen Principes. Es treten da häufig in dem Ausdrucke für die lebendige Kraft nur rein quadratische Glieder mit gleichen Coefficienten auf, wesshalb sich dann die Gleichung für den Zwang einfacher gestaltet.

Führt man die Abkürzung: $T_\mu - P_\mu = Q_\mu$ ein, so ist der Zwang Z gegeben durch:

$$\begin{aligned} Z \cdot D = \sum_{\mu\nu} A_{\mu\nu} (T_\mu - P_\mu)(T_\nu - P_\nu) &= \sum_{\mu\nu} Q_\mu Q_\nu = \\ = A_{11} Q_1^2 + 2 A_{12} Q_1 Q_2 + \dots\dots & + 2 A_{1n} Q_1 Q_n \\ + A_{22} Q_2^2 + \qquad & + 2 A_{2n} Q_2 Q_n \\ & + A_{nn} Q_n^2 \end{aligned}$$

Die Bedingung: $\frac{\partial Z}{\partial \ddot{p}_\varrho} = 0$ lässt sich durch: $\frac{\partial Z}{\partial Q_\varrho} = 0$ ersetzen. Man hat nämlich:

$$\frac{d Z}{d \ddot{p}_\varrho} = \frac{\partial Z}{\partial Q_1}\frac{\partial Q_1}{\partial \ddot{p}_\varrho} + \dots + \frac{\partial Z}{\partial Q_n}\frac{\partial Q_n}{\partial \ddot{p}_\varrho}$$

$$\text{oder wegen } \frac{\partial Q_\nu}{\partial \ddot{p}_\varrho} = \frac{\partial T_\nu}{\partial \ddot{p}_\varrho} = a_{\nu\varrho}$$

$$\frac{dZ}{d\ddot{p}_\varrho} = a_{1\varrho}\frac{\partial Z}{\partial Q_1} + a_{2\varrho}\frac{\partial Z}{\partial Q_2} + \ldots + a_{n\varrho}\frac{\partial Z}{\partial Q_n} = 0; \;\; (\varrho = 1\,..\,n);$$

aus diesen n-Gleichungen folgt, da die Determinante: $D = |a_{\mu\nu}|$ nicht verschwindet, allgemein:

$$\frac{\partial Z}{\partial Q_\nu} = 0.$$

Differencirt man demnach den obigen Ausdruck wirklich, so ergeben sich die n-Gleichungen:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial Z}{\partial Q_\nu} = A_{1\nu}Q_1 + A_{2\nu}Q_2 + \,..\, + A_{\nu n}Q_n = 0; \;\; (\nu = 1\,..\,n)$$

die, da die Determinante $|A_{\mu\nu}| = D^{n-1}$ nie Null werden kann, wiederum die Lagrange'schen Gleichungen: $Q_1 = 0\,..$ $Q_n = 0$ nach sich ziehen.

Haben die Kräfte P ein Potential U, so dass $P_\mu = -\frac{\partial U}{\partial p_\mu}$ wird, und enthalten die Bedingungen die Zeit t explicit nicht, so hat man für die lebendige Kraft T einerseits:

$$2T = \frac{\partial T}{\partial \dot{p}_1}\dot{p}_1 + \frac{\partial T}{\partial \dot{p}_2}\dot{p}_2 + \,..$$

oder

$$2\frac{dT}{dt} = \dot{p}_1\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{p}_1}\right) + \ddot{p}_1\frac{\partial T}{\partial \dot{p}_1} + \ldots$$

während andererseits, da T auch Funktion von $p_1\;\dot{p}_1\,..$ ist,

$$\frac{dT}{dt} = \dot{p}_1\frac{\partial T}{\partial p_1} + \ddot{p}_1\frac{\partial T}{\partial \dot{p}_1} + \ldots \quad \text{wird;}$$

hieraus folgt durch Subtraction wegen:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{p}_\mu}\right) - \frac{\partial T}{\partial p_\mu} = T_\mu$$

$$\frac{d\,T}{d\,t} = \dot{p}_1\,T_1 + \dot{p}_2\,T_2 + \ldots$$

wozu man

$$\frac{d\,U}{d\,t} = \frac{\partial\,U}{\partial\,p_1}\dot{p}_1 + \ldots \quad = -\dot{p}_1\,P_1 - \dot{p}_2\,P_2 \ldots$$

addirt und so schliesslich wegen $T_\mu - P_\mu = Q_\mu$ zur Gleichung:

$$\frac{d\,(T+U)}{d\,t} = \dot{p}_1\,Q_1 + \dot{p}_2\,Q_2 + \ldots + \dot{p}_n\,Q_n = R$$

gelangt. Man sieht sofort, dass für $Q_1 = 0 \,.\,.\, Q_n = 0$ auch $R = 0$ d. i. $T + U =$ Constante sein muss oder dass sich aus den oben gefundenen Lagrange'schen Gleichungen auch das Princip der Erhaltung der Energie ergiebt. Beides lässt sich gleichzeitig gewinnen, wenn man in dem Ausdrucke für Z mit Hilfe der Beziehung: $R = \dot{p}_1\,Q_1 + \ldots.$ eine der Grössen Q z. B. Q_1 eliminirt und die Minimumsbedingungen: $\frac{\partial\,Z}{\partial\,Q_1} = 0 \,.\,.\, \frac{\partial\,Z}{\partial\,Q_n} = 0$ nachher aufstellt. Zweckmässig ist es dabei, für den Zwang Z die Determinantenform anzuwenden; es ist z. B für $n = 3$:

$$-Z \cdot D = \begin{vmatrix} 0 & Q_1 & Q_2 & Q_3 \\ Q_1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ Q_2 & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ Q_3 & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \frac{1}{\dot{p}_1^2} \begin{vmatrix} 0 & R & Q_2 & Q_3 \\ R & b_{11} & b_{21} & b_{31} \\ Q_2 & b_{21} & a_{22} & a_{23} \\ Q_3 & b_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

wobei

$$b_{11} = (a_{11}\,\dot{p}_1 + a_{21}\,\dot{p}_2 + a_{31}\,\dot{p}_3)\,\dot{p}_1 + \ldots$$

$$= \frac{\partial\,T}{\partial\,\dot{p}_1}\,\dot{p}_1 + \ldots = 2\,T$$

$$b_{21} = b_{12} = a_{21}\,\dot{p}_1 + a_{22}\,\dot{p}_2 + a_{23}\,\dot{p}_3 = \frac{\partial\,T}{\partial\,\dot{p}_2}$$

$$b_{31} = b_{13} = a_{31}\,\dot{p}_1 + a_{32}\,\dot{p}_2 + a_{33}\,\dot{p}_3 = \frac{\partial\,T}{\partial\,\dot{p}_3} \quad \text{ist.}$$

Die Ausführung der Minimumsbedingungen ergiebt:

$$A_{11}R + Q_2[\dot{p}_1 A_{12} - \dot{p}_2 A_{11}] + Q_3[\dot{p}_1 A_{13} - \dot{p}_3 A_{11}] = 0$$
$$A_{12}R + Q_2[\dot{p}_1 A_{22} - \dot{p}_2 A_{12}] + Q_3[\dot{p}_1 A_{23} - \dot{p}_3 A_{12}] = 0$$
$$A_{13}R + Q_2[\dot{p}_1 A_{23} - \dot{p}_2 A_{13}] + Q_3[\dot{p}_1 A_{33} - \dot{p}_3 A_{13}] = 0$$

oder, da die Determinante dieses Systems $\dot{p}_1^2 \,|A_{\mu\nu}| = \dot{p}_1^2 \cdot D^2$ nie verschwindet, $R = 0$ und $Q_2 = 0$, $Q_3 = 0$ d. i. das Princip von der Energie und die Lagrange'schen Gleichungen.

Eliminirt man in der allgemeinen Gleichung $A_{1\nu} Q_1 + A_{2\nu} Q_2 + \ldots + A_{\nu n} Q_n = 0$, $\nu = 1 \ldots n$ etwa Q_1, mit der Relation: $R = \dot{p}_1 Q_1 + \ldots$ so folgt natürlich ebenso: $R = 0$, $Q_2 = 0 \ldots Q_n = 0$.

Nachtrag,

betreffend lineare Stromverzweigungen.

Sind $p_1 \ldots p_n$ wiederum cyklische Coordinaten, $T = \frac{1}{2} a_{11} \dot{p}_1^2 + \frac{1}{2} a_{22} \dot{p}_2^2 + \ldots + a_{12} \dot{p}_1 \dot{p}_2 + \ldots$ die lebendige Kraft und ist $F = \frac{1}{2} b_{11} \dot{p}_1^2 + \frac{1}{2} b_{22} \dot{p}_2^2 + \ldots + b_{12} \dot{p}_1 \dot{p}_2 + \ldots$ die von Lord Rayleigh eingeführte Zerstreuungsfunktion, so kommt zu jeder Kraft P_μ noch die Kraft: $-\frac{\partial F}{\partial \dot{p}_\mu} = -(b_{1\mu} \dot{p}_1 + b_{2\mu} \dot{p}_2 + \ldots)$ dazu und es ergiebt das Princip des kleinsten Zwanges, dass

$$Z \cdot D = \Sigma A_{\mu\nu} Q_\mu Q_\nu = A_{11} Q_1^2 + A_{22} Q_2^2 + \ldots + 2 A_{12} Q_1 Q_2 + \ldots \quad (1)$$

ein Minimum für jedes Q sein müsse; dabei ist also:

$$Q_\mu = \frac{d}{dt}\Big[a_{1\mu} \dot{p}_1 + a_{2\mu} \dot{p}_2 + \ldots\Big] - P_\mu + \Big[b_{1\mu} \dot{p}_1 + b_{2\mu} \dot{p}_2 + \ldots\Big] \quad (2)$$

$$D = |a_{\varkappa\lambda}| \qquad A_{\varkappa\lambda} = \frac{\partial D}{\partial a_{\varkappa\lambda}}$$

Geht man zur Elektrodynamik über und setzt: $\dot{p}_1 = J_1$, $\dot{p}_2 = J_2 \ldots$ sowie

$$Q_\mu = \frac{d}{d\,t}\Big[a_{1\mu} J_1 + a_{2\mu} J_2 + \ldots\Big] - P_\mu + \Big[b_{1\mu} J_1 + b_{2\mu} J_2 + \ldots\Big] \quad (3)$$

so giebt die Minimumsbedingung (1) eine Eigenschaft einer linearen Stromverzweigung an. Dabei sind a_{11}, a_{22}, $a_{33} \ldots$ die Coefficienten der Selbstinduction des ersten, zweiten Umlaufes, a_{12}, a_{13}, $a_{23} \ldots$ die Coefficienten der gegenseitigen Induction, P_μ die constante elektromotorische Kraft; ferner ist b_{11} der Widerstand des ganzen ersten Umlaufes, b_{22} der des ganzen zweiten Umlaufes u. s. w. und b_{12} der Widerstand jenes Stückes der Leitung, das dem 1. und 2. Umlaufe gemeinsam ist; b_{12} ist positiv, wenn J_1 und J_2 dieselbe, negativ, wenn sie entgegengesetzte Richtungen haben. Die Ausführung der Minimumsbedingung $\frac{\partial Z}{\partial Q_1} = 0$ liefert: $Q_1 = 0$

$$\text{d. i. } P_1 = b_{11} J_1 + b_{12} J_2 + \ldots + b_{1n} J_n + \frac{d}{d\,t}[a_{11} J_1 + a_{12} J_2 + \ldots] \quad (4) \quad \text{u. s. w.}$$

Das sind — etwas verallgemeinert — jene Gleichungen, die Herr H. von Helmholtz 1851 (Abhandl. I 435) für die Induction in linearen Stromverzweigungen, die man sich in die möglichst geringe Zahl einfacher Umgänge zerlegt denken muss, aufgestellt hat.

Für die Arbeit der verzögernden Kräfte erhält man vom Zeichen abgesehen: $\frac{\partial F}{\partial \dot{p}_1} d\,p_1 + \ldots = \Big[\frac{\partial F}{\partial \dot{p}_1} \dot{p}_1 + \ldots\Big] d\,t = 2\,F dt$ $= [b_{11} J_1^2 + b_{22} J_2^2 + \ldots + 2\,b_{12} J_1 J_2 + \ldots]\,d\,t$ d. i. die Joule-sche Wärme und sind alle Summanden in der Klammer positiv.

Nun werde angenommen, dass $a_{12} = a_{13} = a_{23} = \ldots = 0$; $a_{11} = a_{22} = a_{33} = \ldots = a$ sei, welcher Fall experimentell unschwer zu verwirklichen wäre. Dann wird:

$Q_\mu = a \frac{d}{dt}[J_1 + J_2 + ..] - P_\mu + b_{1\mu} J_1 + b_{2\mu} J_2 + ..$ und es muss: $Z \cdot a = Q_1^2 + Q_2^2 + ..$ ein Minimum sein, wie klein auch a genommen wird. Für $\lim a = 0$ werden die Stromstärken unabhängig von der Zeit, also constant und es folgt aus der Bedingung: $Z^1 = Q_1^2 + Q_2^2 + .. =$ Minimum; $Q_\mu = b_{1\mu} J_1 + .. - P_\mu = 0$.

Die Gleichung: $\frac{\partial Z^1}{\partial Q_\mu} = 0$ kann, weil die Determinante aus den b nicht verschwindet, durch: $\frac{\partial Z^1}{\partial J_\mu} = 0$ ersetzt werden. Es ist demnach für constante Ströme: $Z^1 = \sum_\mu [(b_{1\mu} J_1 + ..) - P_\mu]^2$ für jedes J zu einem Minimum zu machen.

Anmerkung. Eine oft genannte Minimumseigenschaft für constante Ströme ergiebt sich aus der wohlbekannten Gleichung:

$$\frac{d(T+U)}{dt} = -2F \text{ oder: } -\left[\frac{dU}{dt} + F + \frac{dT}{dt}\right] = F \quad \text{(I)}$$

worin: $U = P_1 p_1 + ..$ das Potential der constanten Kräfte vorstellt und wie oben: $T = \frac{1}{2} a_{11} \dot{p}_1^2 + .. = \frac{1}{2} a_{11} J_1^2 + ..$ $F = \frac{1}{2} b_{11} \dot{p}_1^2 + .. = \frac{1}{2} b_{11} J_1^2 ..$ ist.

Erlangen die Stromstärken: $J_1, J_2 ..$ die anfangs Null waren, für $t = \infty$ ihre vollen Stärken $J'_1, J'_2 ..$ so ist (wegen $\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial J_1} \frac{dJ_1}{dt} + ..$) auch $\frac{dT}{dt} = 0$ und das in I rechts stehende F, das aus lauter positiven Gliedern besteht, erlangt seinen grössten Werth. Demnach wird die negative linke Seite in I d. i. $F + \frac{dU}{dt} = \frac{1}{2} b_{11} J_1^2 + .. - (P_1 J_1 + P_2 J_2 + ..)$ ein Minimum für jedes J darstellen.