Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Classe

der

k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.

Band XXIV. Jahrgang 1894.

München.
Verlag der K. Akademie.
1895.

In Commission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).

Ueber eine Verallgemeinerung der v. Helmholtz'schen Wirbel-Integrale, welcher eine unendliche Mannigfaltigkeit von mechanischen Bildern der Maxwell-schen Elektrodynamik entspricht.

Von Dr. J. R. Schütz.

(Eingelaufen 2. Juni.)

1. Wir setzen eine unendlich ausgedehnte reibungslose Flüssigkeitsmasse voraus, der wir vorläufig die Beschränkung der Incompressibilität noch nicht auferlegen wollen; wir betrachten vorerst nur solche Gebiete derselben, in welchen die 3 rechtwinkligen Geschwindigkeitscomponenten u_1, v_1, w_1 eindeutige und mit allen ihren Derivirten endliche und stetige Funktionen der 3 rechtwinkligen Raumcoordinaten x, y, z sind. Im Unendlichen soll die Flüssigkeit ruhen.

Ueberall dort, wo die Grössen u_1, v_1, w_1 eine Potentialfunktion Φ_1 (das Geschwindigkeitspotential) besitzen, werden die Gleichungen bestehen

$$\frac{\partial w_1}{\partial y} - \frac{\partial v_1}{\partial z} = \frac{\partial u_1}{\partial z} - \frac{\partial w_1}{\partial x} = \frac{\partial v_1}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y} = 0 \qquad 1)$$

Dort wo die Potentialfunktion Φ_1 zu existiren aufhört, werden gewisse Bewegungen auftreten, die v. Helmholtz in seiner Abhandlung „Ueber Integrale der hydrodynamischen Gleichungen etc". Crelle's Journal, Bd. 55, S. 25—55, 1858 unter dem Namen der „Wirbelbewegungen" eingeführt hat.

2. Wirbelpotential nenne ich eine Funktion Φ_2, deren Ableitungen nach den Coordinaten die nach diesen geschätzten Wirbelgeschwindigkeiten geben. Die Wirbelgeschwindigkeiten u_2, v_2, w_2 sind definirt durch die Gleichungen

$$u_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_1}{\partial y} - \frac{\partial v_1}{\partial z}\right), \quad v_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial z} - \frac{\partial w_1}{\partial x}\right),$$
$$w_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y}\right) \tag{2}$$

Dort wo ein Wirbelpotential existirt, wird sein

$$\frac{\partial w_2}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z} = \frac{\partial u_2}{\partial z} - \frac{\partial w_2}{\partial x} = \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial u_2}{\partial y} = 0 \tag{3}$$

An allen Stellen aber, wo diese Potentialfunktion zu existiren aufhört, setzen wir

$$u_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_2}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z}\right), \quad v_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial z} - \frac{\partial w_2}{\partial x}\right),$$
$$w_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial u_2}{\partial y}\right) \tag{4}$$

Die Grössen u_3, v_3, w_3 haben eine einfache und anschauliche physikalische Bedeutung, von der später noch die Rede sein wird; wir wollen sie die „Strömungsgeschwindigkeiten zweiter Ordnung" nennen. Die Grössen u_1, v_1, w_1 sind dann für uns die Strömungsgeschwindigkeiten erster Ordnung.

Es wird Stellen geben können, woselbst die Grössen u_3, v_3, w_3 sich als Ableitungen einer Funktion Φ_3 darstellen lassen. Wir nennen diese Funktion das „Strömungspotential zweiter Ordnung" (Φ_1 ist dann für uns das Strömungspotential erster Ordnung).

An allen diesen Stellen wird sein

$$\frac{\partial w_3}{\partial y} - \frac{\partial v_3}{\partial z} = \frac{\partial u_3}{\partial z} - \frac{\partial w_3}{\partial x} = \frac{\partial v_3}{\partial x} - \frac{\partial u_3}{\partial y} = 0 \tag{5}$$

Dort wo Φ_3 zu existiren aufhört, setzen wir wieder

$$u_4 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_3}{\partial y} - \frac{\partial v_3}{\partial z}\right), \quad v_4 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial z} - \frac{\partial w_3}{\partial x}\right),$$
$$w_4 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_3}{\partial x} - \frac{\partial u_3}{\partial y}\right) \tag{6}$$

Die Grössen u_4, v_4, w_4 nennen wir die Wirbelgeschwindigkeiten zweiter Ordnung und eine etwa existirende Potentialfunktion Φ_4 derselben das „Wirbelpotential zweiter Ordnung". In diesem Sinne sind dann u_2, v_2, w_2, bezw. Φ_2 die Wirbelgeschwindigkeiten bezw. das Wirbelpotential erster Ordnung.

Man sieht schon, wie sich der Faden weiter spinnt. Allgemein zu reden, nennen wir die Grössen u_{2n-1}, v_{2n-1}, w_{2n-1}, Φ_{2n-1} die Strömungsgeschwindigkeiten und das Strömungspotential $n$ter Ordnung und die Grössen u_{2n}, v_{2n}, w_{2n}, Φ_{2n} die Wirbelgeschwindigkeiten und das Wirbelpotential $n$ter Ordnung.

3. Die formale Uebereinstimmung der Differenzialgleichungen 4) und 6) lässt erwarten, dass auch die Integraleigenschaften der Wirbel und Strömungen höherer Ordnung wesentlich übereinstimmen. Es wird sich daher zur Abkürzung empfehlen, dass wir uns für beide zuweilen eines gemeinsamen Namens bedienen, und wir wählen hiefür, nicht ohne die Absicht, an den verwandten Quaternionen-Begriff des curl (vgl. Boltzmann, Vorl. II pag. 3) anzuklingen, den Ausdruck „Quirl".

Demnach nennen wir die Grössen u_k, v_k, w_k die nach den 3 rechtwinkligen Coordinatenaxen geschätzten Quirlgeschwindigkeiten $k$ter Ordnung und Φ_k das Quirlpotential $k$ter Ordnung, und erinnern uns, wenn erforderlich, daran, dass diese Grössen Strömungsgeschwindigkeiten bezw. ein Strömungspotential bedeuten, wenn k ungerade, dagegen Wirbelgeschwindigkeiten bezw. ein Wirbelpotential, wenn k gerade ist.

Man hat für die Quirlgeschwindigkeiten $k$ter Ordnung die Ausdrücke

$$\left.\begin{aligned} u_k &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_{k-1}}{\partial y} - \frac{\partial v_{k-1}}{\partial z}\right) \\ v_k &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_{k-1}}{\partial z} - \frac{\partial w_{k-1}}{\partial x}\right) \\ w_k &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_{k-1}}{\partial x} - \frac{\partial u_{k-1}}{\partial y}\right) \end{aligned}\right\} \qquad 7)$$

Für den Fall der Existenz eines Quirlpotentials Φ_k ist

$$u_k = \frac{\partial \Phi_k}{\partial x}, \quad v_k = \frac{\partial \Phi_k}{\partial y}, \quad w_k = \frac{\partial \Phi_k}{\partial z} \qquad 8)$$

und $$\frac{\partial w_k}{\partial y} - \frac{\partial v_k}{\partial z} = \frac{\partial u_k}{\partial z} - \frac{\partial w_k}{\partial x} = \frac{\partial v_k}{\partial x} - \frac{\partial u_k}{\partial y} = 0 \qquad 9)$$

Es lassen sich über die Wechselbeziehungen der Quirl verschiedener Ordnung zu einander eine grosse Reihe von Sätzen ableiten, von denen wir hier nur solche anführen wollen, die für unsere späteren Entwicklungen von einiger Bedeutung sind.

4. Existirt in einem Bereiche R ein Quirlpotential $k$ter Ordnung als variable Funktion der Coordinaten, so sind die Quirlpotentiale von höherer Ordnungszahl in demselben Bereiche constante Grössen, Quirlpotentiale von niederer Ordnungszahl aber können in demselben Bereiche nicht existiren. Denn es ist in diesem Bereiche nach Gl. 9)

$$u_{k+1} = v_{k+1} = w_{k+1} = 0, \text{ also } \Phi_{k+1} = \text{const.}$$

und dasselbe gilt natürlich auch von den analogen Grössen noch höherer Ordnungszahl. Der zweite Theil des obigen Satzes ist eine nothwendige Consequenz des ersten Theiles.

Man kann daher aus der gesammten betrachteten Flüssigkeitsmasse solche Bereiche R_1 hervorheben, die lediglich ein Quirlpotential erster Ordnung Φ_1 (d. i. ein Geschwindigkeitspotential) besitzen, dann solche Bereiche R_2, die lediglich ein Quirlpotential zweiter Ordnung Φ_2 (d. i. ein Wirbelpotential 1. Ordnung), dann solche R_3, die lediglich ein Quirlpotential 3. Ordnung (d. i. ein Geschwindigkeitspotential 2. Ordnung) bis zu solchen Bereichen R_k, die lediglich ein Quirlpotential $k$ter Ordnung besitzen. Wir können jetzt den obigen Satz auch so aussprechen:

In einem Bereiche R_k coexistiren nothwendig sämmtliche Arten von Quirlbewegungen, deren Ordnungszahl kleiner ist als k, und es existirt darin keine Quirlbewegung von einer grösseren Ordnungszahl. (Satz I.)

5. Jedes Quirlpotential Φ_k ($k > 1$) genügt der Laplace'schen Differentialgleichung (Satz II). Aus Gl. 7 ergibt sich (für $k > 1$)

$$\frac{\partial u_k}{\partial x} + \frac{\partial v_k}{\partial y} + \frac{\partial w_k}{\partial z} = 0 \tag{10}$$

Für den Fall der Existenz einer Potentialfunktion kann diese Gleichung so geschrieben werden

$$\Delta \Phi_k = 0 \tag{11}$$

Die Gleichung 10) gilt nicht für $k = 1$; nur, wenn die Flüssigkeit incompressibel ist, hat man auch

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial z} = 0 \tag{12}$$

Es müssen daher alle nachfolgenden Sätze, insoweit sie sich auf den Eingangs dieses Artikels angegebenen Satz stützen, entweder unter der beschränkenden Annahme $k > 1$, oder unter der Voraussetzung der Incompressibilität der Flüssigkeit verstanden werden.

6. Es kann nicht ein einziger Bereich R_k die ganze unendliche Flüssigkeitsmasse erfüllen. (Satz III.) Denn man hätte dann eine Funktion Φ_k, welche im ganzen unendlichen Raume der Gleichung $\Delta \Phi_k = 0$ genügte und im Unendlichen, da die Flüssigkeit daselbst als ruhend vorausgesetzt wird, gegen einen constanten Werth C limitirte. Genau so gross

würde daher auch das arithmetische Mittel der Funktionswerthe von Φ_k auf der Oberfläche einer Kugel sein, die man mit unendlich grossem Radius um einen im Endlichen gelegenen Punkt P beschriebe. Gemäss einem nach Herrn Riemann benannten Satze der Potentialtheorie müsste daher auch im Punkte P, und weil dieser beliebig gewählt wurde, überall im Endlichen $\Phi_k = C$ sein. Nach Satz I müsste demnach die Ordnungszahl des Bereiches R_k kleiner sein als k und sie könnte, da k beliebig ist, nur gleich 1 sein, aber auch dies nur dann, wenn die Flüssigkeit compressibel ist.

7. Es kann nicht ein Bereich R_k einem Bereiche R_m unmittelbar benachbart sein, es sei denn $k = m$. (IV.)

Denn setzen wir etwa willkürlich $m > k$, dann würde nach Satz I das Quirlpotential Φ_k im Bereiche R_k existiren, im Bereiche R_m aber zu existiren aufhören. Dagegen würde das Quirlpotential Φ_m sowohl im Raume R_m als auch im Raume R_k existiren, im letzteren Bereiche aber als Constante. Da die beiden Bereiche einander unmittelbar benachbart sein sollen, so muss ein Theil ihrer Begrenzungsflächen beiden gemeinsam sein. Denkt man sich diesen Theil entfernt, so erhielte man einen grösseren Bereich, in welchem eine Funktion Φ_m existirte, die überall der Laplace'schen Differentialgleichung genügte und in einem endlichen Theile des Bereiches einen constanten Werth C besässe. Wir können dann eine Kugelfläche so construiren, dass deren Mittelpunkt in diesem Bereiche, in welchem $\Phi_m = C$ ist, liegt, und die zum Theil in diesen Bereich selbst fällt, zum Theile aber in eine Region taucht, in der Φ_m grösser (oder kleiner) als C wird. Dann müsste aber auch das arithmetische Mittel der Funktionswerthe von Φ_m auf der Kugeloberfläche grösser (oder kleiner) als C sein, und dies wäre ein Widerspruch gegen den Riemann'schen Satz.

8. Es muss in der bewegten Flüssigkeitsmasse Bereiche, mindestens aber einen geben, innerhalb

deren überhaupt kein Quirlpotential irgend welcher Ordnungszahl existirt. (V.)

Dieser Satz ist eine nothwendige Consequenz der Sätze III und IV. Wir wollen diese Gebiete die „charakteristischen Schichten" nennen; nach Satz IV muss jeder Bereich R_k von einer solchen charakteristischen Schicht vollständig eingehüllt sein. Sie soll im Allgemeinen als von endlicher Dicke vorausgesetzt sein. An Stellen, wo sie unendlich dünn wird, degenerirt sie zu einer wahren Discontinuität; solche und andere Discontinuitäten wollen wir, wie schon Eingangs im Artikel 1 bemerkt ist, von unserer Betrachtung ausschliessen. Wir denken uns hiezu jede derselben einzeln von einer sie ganz umschliessenden, einfach zusammenhängenden Fläche umgeben, die wir passend „Discontinuitätshülle" nennen können. Die Flüssigkeit, die sich ausserhalb dieser Discontinuitätshüllen befindet, ist für uns die „betrachtete Flüssigkeitsmasse".

9. Ein für uns sehr wichtiger Satz ist der folgende: Die Bewegung der gesammten betrachteten Flüssigkeitsmasse ist zu irgend einem Zeitmomente überall eindeutig bestimmt, wenn in demselben Zeitmomente die Quirlgeschwindigkeiten irgend einer beliebigen Ordnungszahl n in allen charakteristischen Schichten gegeben sind und gleichzeitig auch die Bewegung der Flüssigkeit an den Discontinuitätshüllen vorgeschrieben ist. (VI.)

Man erhält aus den Gleichungen 7), indem man in denselben die Grössen u_{k-1}, v_{k-1}, w_{k-1} durch die Grössen u_{k-2}, v_{k-2}, w_{k-2} ersetzt, die folgenden:

$$\left.\begin{aligned} u_k &= \frac{1}{4}\left(\frac{\partial\,\Theta_{k-2}}{\partial x} - \Delta\, u_{k-2}\right) \\ v_k &= \frac{1}{4}\left(\frac{\partial\,\Theta_{k-2}}{\partial y} - \Delta\, v_{k-2}\right) \\ w_k &= \frac{1}{4}\left(\frac{\partial\,\Theta_{k-2}}{\partial z} - \Delta\, w_{k-2}\right) \end{aligned}\right\} \quad 13)$$

Hiebei ist

$$\Theta_{k-2} = \frac{\partial u_{k-2}}{\partial x} + \frac{\partial v_{k-2}}{\partial y} + \frac{\partial w_{k-2}}{\partial z} \qquad 14)$$

Nach Gleichung 10) verschwindet dieser Ausdruck für $k > 3$; also ist für $k > 1$ und bei incompressibeln Flüssigkeiten auch für $k = 1$

$$u_{k+2} = -\frac{1}{4} \varDelta u_k, \quad v_{k+2} = -\frac{1}{4} \varDelta v_k, \quad w_{k+2} = -\frac{1}{4} \varDelta w_k \qquad 15)$$

Speziell in Bereichen von der Ordnungszahl k ist daher mit Rücksicht auf Satz I

$$\varDelta u_{k-1} = 0, \quad \varDelta v_{k-1} = 0, \quad \varDelta w_{k-1} = 0 \qquad 16)$$

und auch

$$\varDelta u_k = 0, \quad \varDelta v_k = 0, \quad \varDelta w_k = 0 \qquad 17)$$

Wir beweisen nun zunächst folgenden Hilfssatz: Sind in allen Punkten der betrachteten Flüssigkeitsmasse die Quirlgeschwindigkeiten von der Ordnungszahl n, also u_n, v_n, w_n, in einem bestimmten Augenblicke gegeben, und ist gleichzeitig die Bewegung der Flüssigkeit an den Discontinuitätshüllen vorgeschrieben, so sind für denselben Augenblick auch die Quirlgeschwindigkeiten $(n-1)$ter Ordnung u_{n-1}, v_{n-1}, w_{n-1} überall eindeutig bestimmt. (VIa.)

Zunächst ist klar, dass auch überall die Quirlintensitäten $(n+1)$ter Ordnung, die ja aus jenen $n$ter Ordnung durch eindeutige Differenzation hervorgehen, gegeben sind. Nun ist nach Gleichung 15)

$$\varDelta u_{n-1} = -4 u_{n+1}, \; \varDelta v_{n-1} = -4 v_{n+1}, \; \varDelta w_{n-1} = -4 w_{n+1}; \qquad 18)$$

gäbe es noch 3 andere Funktionen $\mathfrak{u}_{n-1}$, $\mathfrak{v}_{n-1}$, $\mathfrak{w}_{n-1}$, welche denselben Differentialgleichungen

$$\varDelta \mathfrak{u}_{n-1} = -4 u_{n+1}, \text{ etc.} \qquad 18\text{a})$$

genügten, so wären $u_{n-1} - \mathfrak{u}_{n-1}$, $v_{n-1} - \mathfrak{v}_{n-1}$, $w_{n-1} - \mathfrak{w}_{n-1}$ drei neue Funktionen, welche — wie sich durch Subtraktion der Gleichung 18) und 18a) ergibt — in der ganzen betrachteten Flüssigkeit die Laplace'schen Differentialgleichungen befriedigen und an den Discontinuitätshüllen, sowie im Unendlichen verschwinden. Die — zufolge des Dirichlet'schen Principes einzige — Lösung hiefür ist

$$u_{n-1} - \mathfrak{u}_{n-1} = v_{n-1} - \mathfrak{v}_{n-1} = w_{n-1} - \mathfrak{w}_{n-1} = 0.$$

Es sind demnach die Quirlgeschwindigkeiten (n — 1) ter Ordnung und, da sich dieses Beweisverfahren beliebig oft wiederholen lässt, auch jene von beliebig anderer Ordnungszahl, demnach die gesammte Bewegung der Flüssigkeit eindeutig bestimmt.

Sind nun nicht in der ganzen Flüssigkeit, sondern bloss an den charakteristischen Stellen die Grössen u'_n, v'_n, w'_n gegeben, so lässt sich dieser Fall immer auf den durch den Hilfssatz präcisirten Fall zurückführen. Denn sei etwa R_k derjenige Bereich, der unter allen Bereichen R_1 bis R_k die höchste Ordnungszahl k hat, so bilden wir, wenn $n < k$ ist, aus den Grössen u'_n, v'_n, w'_n durch fortgesetztes Differenziren nach dem Schema der Gleichung 7) die Grössen

$$u'_{k+1}, \quad v'_{k+1}, \quad w'_{k+1} \qquad 19)$$

Da nun die Quirlgeschwindigkeiten $(k+1)$ ter Ordnung in der ganzen Flüssigkeitsmasse, mit Ausschluss der charakteristischen Schichten, verschwinden, in diesen letzteren aber die gegebenen Werthe 19) haben, so darf man sie in der gesammten Flüssigkeitsmasse als gegeben betrachten.

Ist aber $n > k$, dann sind ohnehin schon die Grössen u_n, v_n, w_n in allen Bereichen R_1 bis R_k gleich Null, also gleichfalls in der gesammten betrachteten Flüssigkeitsmasse gegeben.

10. Ein specieller Fall des vorigen Satzes ist der folgende: Sind in einem Augenblicke die Geschwindigkeiten u'_1, v'_1, w'_1 in allen charakteristischen Schichten sowie an den

Discontinuitätshüllen gegeben, so sind für denselben Augenblick die Geschwindigkeiten u_1, v_1, w_1 überall eindeutig bestimmt. Es sollen hier die drei letzteren Grössen aus den drei ersteren berechnet werden.

Es sei wieder R_k jener Quirlbereich, der die höchste Ordnungszahl k besitzt. Die auf die Zahl k zunächst folgende ungerade Zahl bezeichnen wir mit $2i+1$; sie ist — unabhängig davon ob k selbst eine gerade oder ungerade Zahl ist — jedenfalls durch die Formel gegeben

$$2i + 1 = k + \frac{3}{2} - \frac{1}{2}(-1)^k,$$

woraus folgt

$$i = \frac{k}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}(-1)^k \tag{20)}$$

Durch i-malige Anwendung der Δ-Operation auf die gegebenen Funktionen u'_1, v'_1, w'_1 erhält man gemäss Formel 15) — wenn wir uns für die i-malige Anwendung der gedachten Operation des Symboles Δ^i bedienen —

$$\Delta^i u'_1 = (-4)^i u'_{2i+1}, \quad \Delta^i v'_1 = (-4)^i v'_{2i+1}, \quad \Delta^i w'_1 = (-4)^i w'_{2i+1} \tag{21)}$$

Ganz ebenso würde man durch i-malige Anwendung der Δ-Operation auf die zu suchenden Funktionen u_1, v_1, w_1 erhalten

$$\Delta^i u_1 = (-4)^i u_{2i+1} \text{ etc.} \tag{21a)}$$

Nun sind aber die Grössen u'_{2i+1} und u_{2i+1} nicht nur in den charakteristischen Schichten, sondern auch in allen Quirlbereichen R_1 bis R_k einander gleich, weil sie daselbst — wegen $2i+1 > k$ — überall verschwinden. Also erhält man die Differentialgleichungen

$$\Delta^i u_1 = \Delta^i v'_1, \quad \Delta^i v_1 = \Delta^i v'_1, \quad \Delta^i w_1 = \Delta^i w'_1 \tag{22)}$$

Die vollständigen Integrale dieser Differentialgleichungen lauten:

$$\left.\begin{aligned}
u_1 &= \frac{1}{(-4\pi)^i}\iiint\frac{dx_i\,dy_i\,dz_i}{r_i}\iiint\frac{dx_{i-1}\,dy_{i-1}\,dz_{i-1}}{r_{i-1,i}}\cdots \\
&\quad \iiint\frac{dx_2\,dy_2\,dz_2}{r_{2,3}}\iiint\frac{dx_1\,dy_1\,dz_1}{r_{1,2}}\Delta^i u_1' + \frac{d}{dx}\int\frac{G\,d\sigma}{r_{ds}}, \\
v_1 &= \frac{1}{(-4\pi)^i}\iiint\frac{dx_i\,dy_i\,dz_i}{r_i}\iiint\frac{dx_{i-1}\,dy_{i-1}\,dz_{i-1}}{r_{i-1,i}}\cdots \\
&\quad \iiint\frac{dx_2\,dy_2\,dz_2}{r_{2,3}}\iiint\frac{dx_1\,dy_1\,dz_1}{r_{1,2}}\Delta^i v_1' + \frac{d}{dy}\int\frac{G\,d\sigma}{r_{ds}}, \\
w_1 &= \frac{1}{(-4\pi)^i}\iiint\frac{dx_i\,dy_i\,dz_i}{r_i}\iiint\frac{dx_{i-1}\,dy_{i-1}\,dz_{i-1}}{r_{i-1,i}}\cdots \\
&\quad \iiint\frac{dx_2\,dy_2\,dz_2}{r_{2,3}}\iiint\frac{dx_1\,dy_1\,dz_1}{r_{1,2}}\Delta^i w_1' + \frac{d}{dz}\int\frac{G\,d\sigma}{r_{ds}}.
\end{aligned}\right\} \quad 23)$$

Hiebei ist

$$\left.\begin{aligned}
r_{1,2} &= \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2} \\
&\cdot \\
r_{i-1,i} &= \sqrt{(x_{i-1}-x_i)^2+(y_{i-1}-y_i)^2+(z_{i-1}-z_i)^2} \\
r_i &= \sqrt{(x_i-x)^2+(y_i-y)^2+(z_i-z)^2} \\
\text{und} \qquad & \\
r_{ds} &= \sqrt{(x_{ds}-x)^2+(y_{ds}-y)^2+(z_{ds}-z)^2}
\end{aligned}\right\} \quad 24)$$

Alle dreifachen Integrale sind über die gesammte betrachtete Flüssigkeitsmasse zu erstrecken, das einfache Integral $\int\frac{G\,d\sigma}{r_{ds}}$ aber über die Oberfläche derselben, sowie über alle Discontinuitätshüllen.

G ist eine willkürliche Funktion, die so bestimmt werden muss, dass die Auswerthung der Gesammtintegrale für alle Punkte dieser Oberflächen die an denselben vorgeschriebenen Werthe von u_1, v_1, w_1 ergibt.

v. Helmholtz hat in seiner Eingangs erwähnten Abhandlung über die Wirbelbewegung eine interessante Analogie entwickelt, die zwischen dieser Art hydrodynamischer

Bewegung und den elektrodynamischen Erscheinungen besteht. Die Gleichungen 23) lehren, dass man eine unendliche Mannigfaltigkeit solcher Analogieen angeben kann. Bevor wir auf dieselben mit einigen Worten eingehen, wollen wir noch den Begriff der „Wirbellinie" verallgemeinern.

11. Wir verstehen unter einer „Quirllinie $k$ter Ordnung" eine Curve, welche der Differentialgleichung genügt

$$dx : dy : dz = u_k : v_k : w_k, \tag{25}$$

und unter einem „Quirlfaden" einen unendlich dünnen Faden, welcher aus der Flüssigkeit ausgeschnitten wird, wenn man durch alle Punkte des Umfanges einer unendlich kleinen Fläche die Quirllinien zieht. Auch erinnern wir uns wieder, dass wir es mit Stromlinien, bezw. -Fäden zu thun haben, wenn k ungerade ist, dagegen mit Wirbellinien bezw. -Fäden, wenn k gerade ist.

Durch Anwendung des Green'schen Satzes auf die Gleichung 10) erhalten wir

$$\int \nu_k \, dq = 0 \tag{26}$$

Hiebei bezeichnet ν_k die normal zum Oberflächenelemente dq geschätzte Componente der Quirlgeschwindigkeit $k$ter Ordnung. Wir nennen die Gleichung 26) die allgemeine Continuitätsgleichung der Quirlbewegungen; sie lehrt, dass kein Quirlfaden beliebiger Ordnungszahl inmitten der Flüssigkeit enden kann und dass für einen und denselben Quirlfaden das Produkt aus seinem Querschnitt und der Quirlgeschwindigkeit

$$\nu_k \cdot dq = i_k = \text{constans} \tag{27}$$

für seine ganze Erstreckung einen constanten Werth behalten muss.

12. Um uns nun die erwähnte unendliche Mannigfaltigkeit der elektrodynamischen Analogieen an einem Beispiele

zu versinnlichen, wollen wir annehmen, es sei ein aus der betrachteten Flüssigkeitsmasse herausgetheilter zweifach zusammenhängender Raum mit lauter Quirlfäden $k$ter Ordnung so erfüllt, dass er einen Quirlbereich R_k (im Sinne des Artikels 4) darstelle. Gemäss Artikel 7 und 8 muss dieser Quirlbereich zunächst von einer charakteristischen Schicht S umgeben sein, von welcher wir annehmen wollen, dass ihre Dicke sehr klein gegenüber den Dimensionen des Bereiches R_k ist. Die ganze übrige betrachtete Flüssigkeitsmasse soll ein Bereich R_{k-1} von der nächstniederen Ordnungszahl sein. Bezeichnen wieder u_k, v_k, w_k die Quirlgeschwindigkeiten im Bereiche R_k und u_k', v_k', w_k' dieselben Grössen in der charakteristischen Schicht, so ist für alle Punkte der betrachteten Flüssigkeitsmasse (die wir zur Vereinfachung so gross voraussetzen wollen, dass wir die Randbedingungen vernachlässigen können)

$$u_{k-2} = \frac{1}{\pi} \int\!\!\int\!\!\int \frac{u_k \, dx \, dy \, dz}{r} + \frac{1}{\pi} \int\!\!\int\!\!\int \frac{u_k' \, dx \, dy \, dz}{r}$$

Das erste Integral ist über den Bereich R_k zu erstrecken, das zweite über die charakteristische Schicht S. Wir wollen annehmen, dass letztere so dünn ist, dass der Beitrag, den das zweite Integral liefert, gegenüber dem des ersten verschwindet. Dann ist

$$\left.\begin{aligned} u_{k-2} &= \frac{1}{\pi} \int\!\!\int\!\!\int \frac{u_k \, dx \, dy \, dz}{r} \\ v_{k-2} &= \frac{1}{\pi} \int\!\!\int\!\!\int \frac{v_k \, dx \, dy \, dz}{r} \\ w_{k-2} &= \frac{1}{\pi} \int\!\!\int\!\!\int \frac{w_k \, dx \, dy \, dz}{r} \end{aligned}\right\} \qquad 28)$$

Wir führen nun statt des Volumelements $dx\,dy\,dz$ das Produkt $dq \cdot ds$ ein, d. i. jenes Volum, welches ein Längenelement ds des Quirlfadens vom Querschnitte dq besitzt. Ferner setzen wir

$$u_k = \nu_k \cdot \alpha, \quad v_k = \nu_k \cdot \beta, \quad w_k = \nu_k \cdot \gamma,$$

wobei ν_k die resultirende Quirlgeschwindigkeit und α, β, γ die Richtungscosinus des ds sind.

Berücksichtigen wir endlich noch, dass das Produkt $\nu_k \cdot dq$ für die ganze Erstreckung des Wirbelfadens einen constanten Werth i_k besitzt (Gleichung 27), so lauten die Gleichungen 28) jetzt

$$u_{k-2} = \int i_k \, ds \cdot \alpha \frac{1}{r}, \quad v_{k-2} = \int i_k \, ds \cdot \beta \frac{1}{r}, \quad w_{k-2} = \int i_k \, ds \cdot \gamma \frac{1}{r}$$

Hieraus erhalten wir für u_{k-1}

$$u_{k-1} = \int i_k \, ds \left[\gamma \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dy} - \beta \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dz} \right]$$

oder, wenn φ, χ, ψ die Richtungscosinus der Geraden r bezeichnen,

$$u_{k-1} = -\int i_k \frac{ds}{r^2} [\gamma \chi - \beta \psi]$$

Der in der eckigen Klammer stehende Ausdruck ist gleich dem Produkte $\sin(ds, r) \cdot \cos(n, x)$, wo n die auf ds und r senkrecht stehende Richtung ist; also ist

$$u_{k-1} = \int \frac{i_k \, ds \cdot \sin(ds, r)}{r^2} \cos(n, x), \quad \text{und analog}$$

$$v_{k-1} = \int \frac{i_k \, ds \sin(ds, r)}{r^2} \cos(n, y),$$

$$w_{k-1} = \int \frac{i_k \, ds \sin(ds, r)}{r^2} \cos(n, z).$$

Man kann diese Formeln so aussprechen: Jedes Element ds eines Quirlfadens von der Ordnungszahl k bedingt in jedem Theilchen der Flüssigkeitsmasse eine Quirlgeschwindigkeit von der Ordnungszahl $(k-1)$, deren Grösse gleich dem Ausdrucke

$$\frac{i_k\, ds \sin(ds, r)}{r^2} \tag{29}$$

ist, und deren Richtung n senkrecht zu jener Ebene steht, die durch das Fadenelement ds und das betrachtete Flüssigkeitstheilchen bestimmt ist.

13. Es besteht also zwischen den Quirllinien $k$ter und $(k-1)$ter Ordnung genau dieselbe Wechselbeziehung, die auch zwischen den elektrischen Stromlinien und den magnetischen Kraftlinien statt hat. (Vgl. hiezu Boltzmann, Vorlesungen I pag. 90.) Wäre etwa der Bereich R_k ein metallischer Leiter, innerhalb dessen das Strompotential Φ_k bestünde, so würde die hiedurch bedingte elektrische Strömung im Aussenraum eine Vertheilung der magnetischen Kraftlinien hervorrufen, die sich der Grösse und Richtung nach vollkommen mit der Vertheilung der Quirllinien $(k-1)$ter Ordnung im Bereiche R_{k-1} decken würde.

Es entspricht diese Analogie genau jener, welche v. Helmholtz a. a. O. abgeleitet hat und welche man hier erhält, wenn man $k=2$ setzt. Für $k=3$ erhält man das hydrodynamische Bild, welches Boltzmann in den Sitzungsberichten der bayerischen Akademie[1]) 1892 pag. 279 zur Maxwell'schen Elektrodynamik in Analogie gesetzt hat. Mit Bezug auf diese letztere Abhandlung, welche diese Analogie insbesonders auch für quasielastische Media mechanisch ausbaut, sei hier die übrigens selbstverständliche Bemerkung gemacht, dass unsere bisherigen Betrachtungen, da sie ja rein geometrischer Natur sind und desshalb jedweder physikalischen Voraussetzung entbehren können, natürlich auf jedes beliebige continuirliche Medium anwendbar sind.

14. Wir wollen aber sogleich eine andere wesentlich mechanische Analogie ableiten, welche die verwandtschaft-

1) Abgedruckt in Wiedemann's Annalen, Bd. 48 pag. 78.

lichen Beziehungen zwischen den allgemeinen Quirlbewegungen und den elektrodynamischen Phänomenen sehr enge knüpft.

Wir gehen dabei von den Integralen der Gleichung 23) aus; doch machen wir auch hier wieder die vereinfachende Annahme, dass die betrachtete Flüssigkeitsmasse so gross ist, dass wir die Oberflächenbedingungen vernachlässigen dürfen, sowie dass die charakteristischen Schichten im Vergleiche zu den Dimensionen der von ihnen umhüllten Quirlbereiche so dünn sind, dass ihre Beiträge in die Bewegung der betrachteten Flüssigkeitsmasse verschwindend klein sind. Wir behandeln den Fall, dass in der Flüssigkeit neben Quirlbereichen beliebig anderer Ordnungszahlen sich zwei Quirlbereiche R_k und R'_k von der Ordnungszahl k vorfinden, und es sei k die grösste unter den vorhandenen Ordnungszahlen. Φ_k und Φ'_k seien die Quirlpotentiale in diesen Bereichen, ν_k und ν'_k die Quirlgeschwindigkeiten in denselben und u_k, v_k, w_k, beziehlich u'_k, v'_k, w'_k deren Componenten.

Hier haben wir nun zum erstenmale zwischen den Strömungen und den Wirbeln höherer Ordnung zu unterscheiden. Wir wollen vorerst den einfacheren Fall betrachten und annehmen, es sei k eine ungerade Zahl $2i + 1$. Wir haben es also mit Strömungen zu thun.

Es seien u_1, v_1, w_1 die Geschwindigkeiten, welche irgend ein Flüssigkeitstheilchen $(dx \cdot dy \cdot dz)$ haben würde, wenn bloss der eine Quirlbereich R_k, und u'_1, v'_1, w'_1, jene, wenn bloss der zweite Quirlbereich R'_k vorhanden wäre. Die Geschwindigkeiten, die dasselbe Flüssigkeitstheilchen bei der Coexistenz beider Quirlbereiche R_k und R'_k hat, sind dann wegen der Linearität der Gleichungen 21a)

$$u_1 + u'_1,\ v_1 + v'_1,\ w_1 + w'_1 \tag{30}$$

Es ist noch wichtig, zu bemerken, dass die Grössen u_k, v_k, w_k bei gegebener Configuration der Systeme vollkommen unabhängig von den Grössen u'_k, v'_k, w'_k sind, so dass, wenn z. B. bloss der eine Quirlbereich R_k' existiren würde, an den Stellen, wo sich der von diesen weggedachte Quirlbereich R_k befindet, die Grössen u_k, v_k, w_k sämmtlich gleich Null wären, und umgekehrt.

15. Unter all den Voraussetzungen des vorhergehenden Artikels erhalten wir für u_1 in Anlehnung an Gleichung 23) das Integral

$$u_1 = \frac{1}{\pi} \int\int\int \frac{dx_i\, dy_i\, dz_i}{r_i} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$
$$\int\int\int \frac{d\,x_2\, d\,y_2\, d\,z_2}{r_{2.3}} \int\int\int \frac{dx_1\, dy_1\, dz_1\, u_k}{r_{1,2}} \tag{31}$$

Um das letzte dreifache Integral in ein Linienintegral zu verwandeln, zerlegen wir den Quirlbereich R_k, der allenfalls die Form eines Ringes hat, durch einander unendlich nah geführte Querschnitte in unendlich viele Cylinder von unendlich kleiner Höhe ds. Diese Querschnitte q sollen so geführt werden, dass sie zur resultirenden Geschwindigkeit ν_k überall normal stehen. Ausserdem zertheilen wir das ganze Bündel von Quirlfäden, welches die charakteristische Schicht erfüllt, in N unendlich dünne Quirlfäden so, dass das Produkt aus dem Querschnitt dq eines Fadens in dessen Quirlgeschwindigkeit ν_k gleich einer für alle Fäden constanten Grösse p_k ist

$$d\,q \cdot \nu_k = p_k = \text{constans}.$$

Dann kann man setzen

$$\int\int\int \frac{dx_1\, dy_1\, dz_1\ u_k}{r_{1,2}} = p_k \int \frac{d\,s \cos(d\,s,\, x}{r}$$

und es lautet die Gleichung 30):

$$u_1 = p_k \int\int\int \frac{1}{\pi^i} \frac{dx_i\, dy_i\, dx_i}{r_i} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$
$$\int\int\int \frac{d\,x_2\, dy_2\, d\,z_2}{r_{2,3}} \int \frac{ds, \cos(d\,s,\, x)}{r} \tag{32}$$

Das letzte einfache Integral ist über alle Quirlfäden einzeln zu erstrecken. Nimmt man an, dass alle Quirlfäden nahezu parallel laufen und dass überdies der gesammte Querschnitt des Quirlbereichs klein ist, dann darf man $N = 1$ setzen, und es braucht das Integral bloss über einen einzigen Stromfaden erstreckt werden. p_k können wir dann passend die Quirlintensität des Bereiches R_k nennen.

Zur Abkürzung bezeichnen wir noch das gesammte vielfache Integral der Gleichung 32) mit J_x, so dass

$$u_1 = p_k \cdot J_x, \quad v_1 = p_k \cdot J_y, \quad w_1 = p_k \cdot J_z \tag{33}$$

ist, wo J_y und J_z analog zu J_x zu bilden sind.

Ganz ebenso erhält man für die vom zweiten Quirlbereich R_k' bedingten Geschwindigkeiten u_1', v_1', w_1' unseres Flüssigkeitstheilchens die Werthe

$$u_1' = p_k' J_x', \quad v_1' = p_k' J_y', \quad w_1' = p_k' J_z' \tag{34}$$

16. Mit Rücksicht auf 30, 33 und 34 erhält man für die gesammte kinetische Energie T der betrachteten Flüssigkeitsmasse den Ausdruck

$$\begin{aligned} T = & \frac{1}{2} p_k^2 \iiint \varrho \, dx \, dy \, dz \, (J_x^2 + J_y^2 + J_z^2) \\ & + \frac{1}{2} p_k'^2 \iiint \varrho \, dx \, dy \, dz \, (J_x'^2 + J_y'^2 + J_z'^2) \\ & + p_k p_k' \iiint \varrho \, dx \, dy \, dz \, (J_x J_x' + J_y J_y' + J_z J_z') \end{aligned} \tag{35}$$

ϱ ist die Dichte der Flüssigkeit.

Wir bezeichnen das erste Integral mit $A_{(h_1, h_2, h_3)}$, das zweite mit $B_{(h_4, h_5, h_6)}$ und das dritte mit $C_{(h_7, h_8, h_9)}$, so dass

$$T = \frac{A_{(h_1, h_2, h_3)}}{2} p_k^2 + \frac{B_{(h_4, h_5, h_6)}}{2} p_k'^2 + C_{(h_7, h_8, h_9)} p_k p_k' \tag{36}$$

und es seien h_1, h_2, h_3 drei Coordinaten (Parameter), welche die geometrische Configuration des Quirlbereiches R_k bezogen auf seinen Schwerpunkt bestimmen, h_4, h_5, h_6 die analogen

Parameter für den zweiten Quirlbereich und h_7, h_8, h_9 die Parameter, welche die relative Configuration der beiden Bereiche zu einander bestimmen.

Wir wollen annehmen, dass alle diese Configurationen im Raume sich mit Geschwindigkeiten ändern, die klein gegen die Geschwindigkeiten der Flüssigkeitstheilchen sind. Dann liefert die Lagrange'sche Gleichung für die Kräfte P_k, P'_k und H_i, welche beziehlich die cyclischen Coordinaten p_k, p'_k und den beliebig gewählten Parameter h_i zu beschleunigen streben, die Werthe

$$\left.\begin{aligned} P_k &= \frac{d}{dt}\left(A_{(h_1, h_2, h_3)}\, p_k + C_{(h_7, h_8, h_9)}\, p'_k\right) \\ P'_k &= \frac{d}{dt}\left(C_{(h_7, h_8, h_9)}\, p_k + B_{(h_4, h_5, h_6)}\, p'_k\right) \\ H_i &= -\frac{p_k^2}{2}\frac{\partial A_{(h_1, h_2, h_3)}}{\partial h_i} - \frac{p_k'^2}{2}\frac{\partial B_{(h_4, h_5, h_6)}}{\partial h_i} - p_k p'_k \frac{\partial C_{(h_7, h_8, h_9)}}{\partial h_i} \end{aligned}\right\} 37)$$

17. Gleichungen von ganz derselben Form erhält man auch, wenn man annimmt, dass die Ordnungszahl k gerade ist, in welchem Falle man es mit Wirbeln höherer Ordnung zu thun hat. Doch haben dann die Parameterfunktionen A, B, C eine etwas andere Bedeutung, von der sogleich die Rede sein wird. Vergleicht man die Gleichungen 37) mit den Gleichungen 12) in Boltzmann's Vorlesungen über Maxwell's Theorie I, pag. 24, so sieht man, dass zwei Quirlbereiche gleicher, im Uebrigen aber beliebiger Ordnungszahl ganz analoge ponderomotorische und Inductionswirkungen auf einander ausüben, wie elektrische Ströme. Dieses Resultat ist an sich so wenig wunderbar, dass es sogar als ganz selbstverständliches Postulat der Maxwell'schen Theorie erscheint, wenn wir diese in der Allgemeinheit auffassen, in der sie in den wiederholt citirten „Vorlesungen" dargestellt worden ist.

18. Es besteht aber in Bezug auf den Richtungssinn, in welchem diese ponderomotorischen und Induktionswirkungen erfolgen, eine bemerkenswerthe Differenzirung zwischen den Quirlbewegungen von gerader und jenen von ungerader Ordnungszahl. Man gelangt zu derselben durch eine Discussion der Parameterfunktionen A, B, C. Wir wollen diese oben mit dem Index s versehen, wenn sie sich auf Quirlbereiche mit ungerader Ordnungszahl (Strömungen) beziehen, dagegen mit dem Index w, wenn sie sich auf solche mit gerader Ordnungszahl (Wirbeln) beziehen. Nach den Festsetzungen der Artikel 15 und 16 haben die A^s, B^s, C^s folgende Werthe:

$$\left.\begin{aligned} A^s &= \int\!\!\int\!\!\int \varrho\, dx\, dy\, dz\, (J_x^2 + J_y^2 + J_z^2) \\ B^s &= \int\!\!\int\!\!\int \varrho\, dx\, dy\, dz\, (J_x'^2 + J_y'^2 + J_z'^2) \\ C^s &= \int\!\!\int\!\!\int \varrho\, dx\, dy\, dz\, (J_x J_x' + J_y J_y' + J_z J_z') \end{aligned}\right\} \quad 38)$$

Hiebei hat J_x den Werth

$$\begin{aligned} J_x = \int\!\!\int\!\!\int \frac{1}{\pi^i} \frac{dx_i\, dy_i\, dz_i}{r_i} \; \cdots\cdots \\ \int\!\!\int\!\!\int \frac{dx_2\, dy_2\, dz_2}{r_{2,3}} \int \frac{ds \cos(ds,x)}{r} \end{aligned} \quad 39)$$

Die Grössen J_y und J_z erhält man, wenn man im letzten einfachen Integral statt cos (ds, x) beziehlich cos (ds, y) und cos (ds, z) setzt, und die Grössen J_x', J_y', J_z' erhält man, wenn man das einfache Integral beziehlich über alle Quirlfäden im Bereiche R_k' erstreckt. Der Index i hat den Zahlenwerth $\dfrac{k-1}{2}$.

Für die Parameterfunktionen A^w, B^w, C^w aber erhält man folgende Werthe:

$$\left.\begin{aligned}
A^w &= \int\int\int \varrho\, dx\, dy\, dz \left[\left(\frac{\partial J_z}{\partial y} - \frac{\partial J_y}{\partial z}\right)^2 \right.\\
&\qquad \left. + \left(\frac{\partial J_x}{\partial z} - \frac{\partial J_z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial J_y}{\partial x} - \frac{\partial J_x}{\partial y}\right)^2\right]\\
B^w &= \int\int\int \varrho\, dx\, dy\, dz \left[\left(\frac{\partial J'_z}{\partial y} - \frac{\partial J'_y}{\partial z}\right)^2 \right.\\
&\qquad \left. + \left(\frac{\partial J'_x}{\partial z} - \frac{\partial J'_z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial J'_y}{\partial x} - \frac{\partial J'_x}{\partial y}\right)^2\right]\\
C^w &= \int\int\int \varrho\, dx\, dy\, dz \left[\left(\frac{\partial J_z}{\partial y} - \frac{\partial J_y}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial J'_z}{\partial y} - \frac{\partial J'_y}{\partial z}\right)\right.\\
&+ \left.\left(\frac{\partial J_x}{\partial z} - \frac{\partial J_z}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial J'_x}{\partial z} - \frac{\partial J'_z}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial J_y}{\partial x} - \frac{\partial J_x}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial J'_y}{\partial x} - \frac{\partial J'_x}{\partial y}\right)\right]
\end{aligned}\right\} \quad 40)$$

Die Grössen J_x, J_y, J_z, J'_x, J'_y, J'_z haben auch hier noch die in Gleichung 39) gegebene Bedeutung; doch ist hier $i = \frac{k}{2}$ zu setzen.

19. Wir wollen die Grössen A, B die Selbstinductionscoefficienten der beiden Quirlbereiche und die Grösse C den wechselseitigen Inductionscoefficienten derselben nennen. Man kann dann die Inductionsgesetze so aussprechen, dass sie allgemein für beliebige Quirlfäden gerader und ungerader Ordnungszahl gelten. Man sagt dann z. B.: „Wird die relative geometrische Configuration der beiden Quirlfäden so geändert, dass dadurch der wechselseitige Inductionscoefficient vergrössert wird, so erregen die Quirlfäden in einander Quirlbewegungen, welche den erregenden entgegengesetzt gerichtet sind.“ Aehnliches gilt für das Gesetz der ponderomotorischen Kräfte. Würde man aber diese Sätze speziell so aussprechen: „Nähert man zwei geradlinige parallele Quirlfäden, so erregen sie in einander etc.“ oder „zwei geradlinige parallele und gleichgerichtete Quirlfäden ziehen einander an“, so wären sie in dieser Form nur für Quirlfäden

mit ungerader Ordnungszahl unbedingt zutreffend; überhaupt gebührt den letzteren auch noch in anderer Hinsicht der Vorzug, wenn man sich darüber entscheiden will, welche Art der Quirlbewegungen man den elektrischen Strömen zuordnen soll; auf einen hieher gehörigen Punkt hat schon Boltzmann[1]) aufmerksam gemacht; man kann die daselbst angewandte Betrachtungsweise leicht auf die Quirl jeder beliebigen geraden Ordnungszahl verallgemeinern. Aber gerade die Discussion der Parameterfunktionen A^s, B^s, C^s und A^w, B^w, C^w liesse sogar auch noch unter den Quirlbewegungen ungerader Ordnungszahl eine spezielle Vorzugswahl treffen. Die letzten Consequenzen, zu denen man dann gelangen würde, kann man aber auch noch auf einem anderen direkteren Wege erreichen. In einer Abhandlung über die Grundgleichungen der Elektrodynamik für rasch veränderliche Parameter, welche gleichzeitig mit der vorliegenden an anderer Stelle zum Drucke gelangt, findet sich einiges hierüber.

20. Hier sei noch folgendes bemerkt: Unsere Analogieen bleiben auch dann noch bestehen, wenn wir unter u_1, v_1, w_1, nicht die Geschwindigkeiten eines Mediumtheilchens, sondern die einfachen Verschiebungen eines solchen, unter u_k, v_k, w_k aber Grössen verstehen, welche aus jenen durch k malige Anwendung der Curl-Operation hervorgehen, nur bedarf es hiezu der Annahme, dass die durch diese Verschiebungen in das Medium gespeicherte (hier potentielle) Energie wiederum dem Ausdrucke $u_1^2 + v_1^2 + w_1^2$ proportional ist. Auch sei besonders noch betont, dass alle unsere Aussagen ihren physikalischen Sinn in voller Strenge nur dann bewahren, wenn wir uns vorstellen, dass alle inneren Kräfte des Mediums stets durch willkürlich hinzugefügte langsam veränderliche äussere Kräfte paralysirt werden.

Es mögen hier noch 2 Sätze Platz finden, welche wir

1) Wiedem. Ann. Bd. 48, 1893, p. 95.

als die mechanischen Bilder der beiden Hertz'schen Gleichungssysteme betrachten können:

a) Sind die Quirllinien $(k+1)$ter Ordnung elektrische Stromlinien, so sind die Quirllinien $k$ter Ordnung magnetische Kraftlinien. (Mechanisches Bild des „zweiten" Hertz'schen Gleichungssystems.)

b) Sind die Quirllinien $k$ter Ordnung magnetische Stromlinien, so sind die Quirllinien $(k-1)$ter Ordnung elektrische Kraftlinien. (Mechanisches Bild des „ersten" Hertzschen Gleichungssystems.)

Der Begriff des magnetischen Stromes ist dabei natürlich nicht im vulgären elektrotechnischen Sinne zu verstehen, sondern in jener Auffassung, in welcher er zuerst wohl von Hertz (1884) gebraucht und später vornehmlich von Heaviside in die Theorie eingebürgert worden ist.

Der Satz a) gilt — sofern man der Ampère'schen Ansicht vom Wesen des Magnetismus beipflichtet — immer auch umgekehrt, der Satz b) dies aber nur dann, wenn das elektromagnetische Feld frei von elektrostatischer Ladung ist.

Die beiden Sätze a) und b) umfassen — im wohlverstandenen bildlich-mechanischen Sinne — das gesammte Lehrgebäude der Maxwell'schen Theorie der Elektrodynamik des freien Aethers.

München, mathem.-physik. Institut d. Universität.

Elektrodynamik entspricht 273-295