# Sitzungsberichte

der

## mathematisch-physikalischen Classe

der

## k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.

---

Band XXIV. Jahrgang 1894.

**München.**
Verlag der K. Akademie.
1895.

In Commission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).

# Zur Theorie der continuirlichen, homogenen und linearen Gruppen.

Von L. Maurer in Strassburg.

(Eingelaufen 7. Juli.)

Die folgende Untersuchung schliesst sich an die Abhandlung von mir an, die der Akademie im Jahre 1888 vorgelegen ist.[1]) Es sei gestattet zunächst in Kürze an den Inhalt derselben zu erinnern.

Den Ausgangspunkt bildet die Aufgabe, die umfassendste continuirliche Gruppe linearer homogener Substitutionen zu bestimmen, die eine rationale und homogene Function $f$ der Variabeln $x_1\ x_2 \ldots x_n$ in sich selbst transformirt. Ist diese Gruppe gerade $m$-gliedrig, so genügt $f$ einem System von $m$ Differentialgleichungen der Form

$$(\gamma)\qquad \sum_{\lambda=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{n} c_{\lambda\mu}^{(i)} \frac{\partial f}{\partial x_\lambda} x_\mu = C_i(f) = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots m$$

Diese Differentialgleichungen sind von einander linear unabhängig, d. h. ihre Coefficienten genügen keiner Relation der Form

$$q_1\, c_{\lambda\mu}^{(1)} + q_2\, c_{\lambda\mu}^{(2)} \ldots + q_m\, c_{\lambda\mu}^{(m)} = 0 \qquad \lambda, \mu = 1, 2, \ldots n$$

Damit ist nicht ausgeschlossen, dass nicht eine der Differentialgleichungen $(\gamma)$ eine Folge der übrigen ist.

---

1) Ueber allgemeinere Invariantensysteme. Ich citire diese Abhandlung im Folgenden kurz mit Inv.

Die Coefficienten der Differentialgleichungen ($\gamma$) genügen Gleichungen der Form

$$(J)\ \sum_{\nu=1}^{n}\left(c_{\lambda\nu}^{(i)}\,c_{\nu\mu}^{(k)}-c_{\lambda\nu}^{(k)}\,c_{\nu\mu}^{(i)}\right)=\sum_{j=1}^{m}\varepsilon_j^{ik}\,c_{\lambda\mu}^{(j)}$$
$$\lambda,\mu=1,2,\ldots n \qquad i,k=1,2,\ldots m$$

Man kann dieselben auch in der symbolischen Form

$$C_i\,C_k(f)-C_k\,C_i(f)=\sum_{j=1}^{m}\varepsilon_j^{ik}\,C_j(f)$$

darstellen.

Die Coefficienten der allgemeinen Substitution der Gruppe, die $f$ in sich selbst transformirt, sind als Funktionen von $m$ Parametern $u_1\,u_2\ldots u_m$ definirt durch die Differentialgleichungen

$$(\alpha)\qquad \frac{\partial a_{\lambda\mu}}{\partial u_i}=\sum_{j=1}^{m}\sum_{\nu=1}^{n}a_{\lambda\nu}\,c_{\nu\mu}^{(j)}\,P_j^{(i)} \qquad \begin{array}{l}\lambda,\mu=1,2,\ldots n\\ i=1,2,\ldots m\end{array}$$

und die Anfangsbedingung, dass einem bestimmten Werthsystem der Parameter — den Anfangswerthen — die identische Substitution entspricht.

Die $m^2$ Funktionen $P_j^{(i)}$ der Parameter unterliegen der Bedingung, dass ihre Determinante nicht identisch verschwindet und dass sie insbesondere nicht für die Anfangswerthe der Parameter gleich Null ist.

Die angegebenen Bedingungen reichen — wie aus der allgemeinen Theorie des H. Lie hervorgeht — aus, damit das $m$-fach unendliche Substitutionensystem

$$y_\lambda=\sum_{\mu=1}^{n}a_{\lambda\mu}((u))\,x_\mu \qquad \lambda=1,2,\ldots n$$

eine Gruppe bildet. Damit aber diese Gruppe die umfassendste Gruppe ist, die eine rationale Funktion in sich selbst transformirt, müssen noch weitere Bedingungen erfüllt sein.

Die Aufstellung dieser Bedingungen führt zu einer Eintheilung der „infinitesimalen Transformationen“ der Form

$$C(f) = \sum_{\lambda=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{n} c_{\lambda\mu} \frac{\partial f}{\partial x_\lambda} x_\mu$$

in verschiedene Arten.

Nehmen wir an, die zu $C(f)$ gehörige charakteristische Determinante

$$\Delta(p) = | c_{\lambda\mu} - \binom{\lambda}{\mu} p |\ ^{1)} \qquad \lambda, \mu = 1, 2 \ldots n$$

verschwinde nur für $p = 0$, dann bezeichne ich $C(f)$ als regulär von der ersten Art.

Nehmen wir zweitens an, $\Delta(p)$ verschwinde nur für ganzzahlige Werthe von $p$ und es verschwinden für eine $h$-fache Wurzel auch alle Unterdeterminanten $n - h + 1$. Grades des Systems

$$| c_{\lambda\mu} - \binom{\lambda}{\mu} p |$$

dann bezeichne ich $C(f)$ als regulär von der zweiten Art. In allen anderen Fällen heisst $C(f)$ irregulär. Diese Bezeichnungen werden auch auf das Coefficientensystem $c_{\lambda\mu}$ angewandt. Ist $C(f)$ irregulär, so kann man immer eine Anzahl regulärer infinitesimaler Transformationen

$$K(f) \quad K_1(f) \quad K_2(f) \ldots \quad K_\beta(f)$$

derart bestimmen[2]) dass

$$C(f) = K(f) + \varrho_1 K_1(f) + \varrho_2 K_2(f) \ldots + \varrho_\beta K_\beta(f)$$

Von diesen inf. Transformationen ist die erste von der ersten Art, alle übrigen sind von der zweiten Art.

---

1) Das Symbol $\binom{\lambda}{\mu}$ hat den Werth 1 oder 0, je nachdem $\lambda$ und $\mu$ gleich oder ungleich sind.

2) Inv. S. 123.

Die Zerlegung von $C(f)$ in reguläre inf. Transformationen ist im wesentlichen vollkommen bestimmt, d. h. eine Unbestimmtheit tritt nur insoferne ein, als eine jede der inf. Transformationen $K_1(f)$ $K_2(f)$ .. $K_\beta(f)$ durch einen Ausdruck der Form

$$\alpha_1 K_1(f) + \alpha_2 K_2(f) \ldots + \alpha_\beta K_\beta(f)$$

mit ganzzahligen Coefficienten $\alpha_1$ $\alpha_2$ .. ersetzt werden kann.

Die oben erwähnten weiteren Bedingungen, denen unsere Gruppe genügen muss, lauten nun:

Kommt unter den inf. Transformationen der Gruppe eine irreguläre Transformation $C(f)$ vor, so gehören der Gruppe auch alle die regulären Transformationen $K(f)$ $K_1(f)$ .. $K_\beta(f)$ an, in die $C(f)$ zerlegt werden kann.

Daraus folgt sofort:

Unsere $m$-gliedrige Gruppe enthält $m$ linear unabhängige reguläre inf. Transformationen.

Sind die angegebenen Bedingungen erfüllt, so kann man die Substitutionscoefficienten $a_{\lambda\mu}$ als rationale Funktionen von $m$ Parametern $u_1$ $u_2$ .. $u_m$ darstellen und daraus folgt dann die Existenz rationaler Funktionen — der Invarianten der Gruppe — die durch die Gruppe in sich selbst transformirt werden.

Zu dieser rationalen Darstellung der Substitutionscoefficienten gelangt man auf folgende Art:

Man wähle $m$ linear unabhängige inf. Transformationen $C_1(f)$ $C_2(f)$ .. $C_m(f)$ der Art aus, dass eine jede derselben regulär ist.

Die infinitesimale Transformation $C_i(f)$ „erzeugt" eine eingliedrige Gruppe $B_i(u_i)$. Ist die inf. Transformation $C_i(f)$ von der ersten Art, so sind die Coefficienten $b_{\lambda\mu}^{(i)}$ der allgemeinen Substitution der Gruppe $B_i(u_i)$ durch die Differentialgleichungen

$$\frac{d\,b_{\lambda\mu}^{(i)}}{d\,u_i} = \sum_{\nu=1}^{n} b_{\lambda\nu}^{(i)}\, c_{\nu\mu}^{(i)} \qquad \lambda, \mu = 1, 2, \ldots n$$

und die Anfangsbedingung $b_{\lambda\mu}^{(i)} = \binom{\lambda}{\mu}$ für $u_i = 0$ bestimmt. Die Grössen $b_{\lambda\mu}^{(i)}$ sind in diesem Fall ganze Funktionen von $u_i$.

Ist dagegen die inf. Transformation $C_i(f)$ von der zweiten Art, so sind die Substitutionscoefficienten $b_{\lambda\mu}^{(i)}$ durch die Differentialgleichungen

$$u_i \frac{d\,b_{\lambda\mu}^{(i)}}{d\,u_i} = \sum_{\nu=1}^{n} b_{\lambda\nu}^{(i)}\, c_{\nu\mu}^{(i)} \qquad \lambda, \mu = 1, 2, \ldots n$$

und die Anfangsbedingung $b_{\lambda\mu}^{(i)} = \binom{\lambda}{\mu}$ für $u_i = 1$ bestimmt. In diesem Fall sind die Substitutionscoefficienten wenigstens rationale Funktionen des Parameters $u_i$.

Setzt man nun die $m$ eingliedrigen Gruppen $B_i(u_i)$ zu einer $m$-gliedrigen Gruppe

$$A(u_1\, u_2 \ldots u_m) = B_1(u_1)\, B_2(u_2) \ldots B_m(u_m)$$

zusammen, so ist klar, dass die Coefficienten der allgemeinen Substitution dieser Gruppe $A$ sich als rationale Funktionen der $m$ Parameter $u_1\, u_2 \ldots u_m$ ergeben, und zwar gilt dies, wie auch immer die $m$ inf. Transformationen $C_i(f)$ im übrigen gewählt sein mögen, wenn nur eine jede derselben regulär ist.

Setzt man zwei Substitutionen der Gruppe $A$

$$z_\lambda = \sum_{\mu=1}^{n} a_{\lambda\mu}((v))\, y_\mu \qquad y_\lambda = \sum_{\mu=1}^{n} a_{\lambda\mu}((u))\, x_\mu \qquad \lambda = 1, 2, \ldots n$$

zusammen, so erhält man dem Gruppenbegriff gemäss wieder eine Substitution der Gruppe.

Es muss also möglich sein $m$ Funktionen $w_1\, w_2 \ldots w_m$ der Grössen $u_1\, u_2 \ldots u_m$; $v_1\, v_2 \ldots v_m$ der Art zu bestimmen, dass

$$a_{\lambda\mu}((w)) = \sum_{\nu=1}^{n} a_{\lambda\nu}((v))\, a_{\nu\mu}((u)) \qquad \lambda, \mu = 1, 2, \ldots n$$

Die Grössen $w$ sind im allgemeinen algebraische Funktionen der Grössen $u$ und $v$, weil ja die Substitutionscoefficienten rationale Funktionen der Parameter sind. Aber es gilt der Satz:

Man kann die $m$ inf. Transformationen $C_i(f)$, von deren Wahl die Wahl des Parametersystems abhängig gemacht worden ist, so wählen, dass die Grössen $w$ rationale Funktionen der Grössen $u$ und $v$ werden.

Der Satz ist für die allgemeine Theorie der continuirlichen Gruppen insofern von Bedeutung, als er für eine sehr ausgedehnte Classe von Gruppentypen die Existenz einfach transitiver rationaler Gruppen nachweist. Es ist aber auch vom invariantentheoretischen Gesichtspunkt von Interesse, worauf aber hier nicht näher eingegangen werden soll.

Im Folgenden erlaube ich mir einen Beweis dieses Satzes vorzulegen.

Der Beweis wird in der Weise geführt, dass nachgewiesen wird: bei passender Wahl der inf. Transformationen $C_i(f)$ ergeben sich nicht nur die Coefficienten der allgemeinen Substitution der Gruppe als rationale Funktionen der Parameter, sondern es sind auch umgekehrt die Parameter rational durch die Substitutionscoefficienten bestimmt. Ist dies bewiesen, so ist klar, dass von den vorhin besprochenen drei Grössensystemen $u$; $v$; $w$ ein jedes durch die beiden anderen rational bestimmt ist.

Für den Beweis ist es zweckmässig die hier in Betracht kommenden Gruppen in drei Classen einzutheilen. In die erste Classe rechnen wir die Gruppen, deren inf. Transformationen sämmtlich regulär von der ersten Art sind; in die zweite Classe die Gruppen, deren inf. Transformationen sämmtlich regulär von der zweiten Art sind; in die dritte

Classe endlich die Gruppen, die sowohl reguläre inf. Transformationen erster Art als auch solche zweiter Art enthalten. Jede dieser Classen muss für sich betrachtet werden.

## I.

Die im Vorausgehenden ausgesprochenen Sätze kann man leicht von einer unnöthigen, ihnen anhaftenden Beschränkung frei machen.

Diese Sätze beziehen sich nämlich zunächst nur auf solche Gruppen, für die Invarianten existiren, die also nach der Lie'schen Terminologie intransitiv sind. Damit Invarianten auftreten, ist erforderlich, dass die Differentialgleichungen ($\gamma$) wenigstens eine Lösung zulassen, dass also die Anzahl der untereinander unabhängigen Differentialgleichungen kleiner als $n$ ist.

Halten wir an der Voraussetzung fest, dass die Gleichungen

$$y_\lambda = \sum_{\mu=1}^{n} a_{\lambda\mu}((u))\, x_\mu \qquad \lambda = 1, 2, \ldots n$$

eine $m$-gliedrige Gruppe definiren, lassen aber die Voraussetzung, dass für diese Gruppen Invarianten existiren, fallen und machen wir statt dessen die Voraussetzung, die Gruppe sei durch algebraische Relationen zwischen den Substitutionscoefficienten definirt. Derartige Gruppen sollen im Folgenden als reguläre Gruppen bezeichnet werden.

Die Substitutionscoefficienten $a_{\lambda\mu}$ genügen — wie aus der allgemeinen Theorie des H. Lie hervorgeht — einem System von Differentialgleichungen der Form ($\alpha$) und den zugehörigen Anfangsbedingungen.

Wir betrachten nun ein System von $q$ cogredienten Substitutionen

$$(\beta)\quad y_\lambda^{(\sigma)} = \sum_{\mu=1}^{n} a_{\lambda\mu}((u))\, x_\mu^{(\sigma)} \qquad \lambda = 1, 2, \ldots n;\ \ \sigma = 1, 2, \ldots q$$

und wählen die Zahl $q$ so gross, dass $q\,n > m$ ist. Alsdann hat das System der Differentialgleichungen

$$(\gamma) \qquad S_i(f) = \sum_{\sigma=1}^{q} \sum_{\lambda=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{n} c_{\lambda\mu}^{(i)} \frac{\partial f}{\partial x_\lambda^{(\sigma)}} x_\mu^{(\sigma)} = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots m$$

$q\,n - m$ unabhängige Lösungen und jede Lösung ist gegenüber der Gruppe $(\beta)$ invariant. Da aber die Gruppe $(\beta)$ durch algebraische Relationen zwischen den Substitutionscoefficienten definirt ist, so gibt es rationale Invarianten der Gruppe[1]) und zwar sind darunter $q\,n - m$ untereinander unabhängige.

Den Differentialgleichungen $S_i(f) = 0$ kommt also ein vollständiges System rationaler Lösungen zu. Es finden somit die in der Einleitung angegebenen Sätze auf die Gruppe $(\beta)$ Anwendung.

Nun überzeugt man sich leicht, dass die inf. Transformation $S_i(f)$ regulär oder irregulär ist, je nachdem die inf. Transformation $C_i(f)$ regulär oder irregulär ist. Es gilt somit der Satz:

Findet sich unter den inf. Transformationen, die zu einer regulären Gruppe gehören, eine irreguläre Transformation $C(f)$, so gehören alle die regulären Transformationen, in die $C(f)$ zerlegt werden kann, der Gruppe an.

## II.

Um später den Gang der Untersuchung nicht unterbrechen zu müssen, schicke ich einige Hülfssätze aus der Theorie der bilinearen Formen voraus.

Wir stellen uns zunächst die folgende Frage: es seien $n^2$ Grössen $c_{\lambda\mu}$ gegeben, unter welchen Bedingungen gibt es

---

1) Christoffel Math. Annalen Bd. 19 S. 280.

dann $n^2$ Grössen $c'_{\lambda\mu}$, die nicht alle gleich Null sind und die den Gleichungen

$$(a) \qquad \sum_{\nu=1}^{n} (c_{\lambda\nu}\, c'_{\nu\mu} - c'_{\lambda\nu}\, c'_{\nu\mu}) = \omega\, c'_{\lambda\mu} \qquad \lambda, \mu = 1, 2, \ldots n$$

Ich behaupte, ein derartiges System $c'_{\lambda\mu}$ kann nur existiren, wenn die Grösse $\omega$ gleich der Differenz zweier der Werthe $r$ ist, für die die charakteristische Determinante $\Delta(r) = \left| c_{\lambda\mu} - \binom{\lambda}{\mu} r \right| \quad \lambda, \mu = 1, 2, \ldots n$ verschwindet.

Den Beweis führen wir indirect: wir nehmen an, $\omega$ sei nicht gleich der Differenz zweier Wurzeln der Gleichung $\Delta(r) = 0$, und beweisen, dass dann alle $n^2$ Grössen $c'_{\lambda\mu}$ verschwinden müssen.

Die von einander verschiedenen Wurzeln der Gleichung $\Delta(r) = 0$ bezeichnen wir mit $r_1\, r_2 \ldots r_{n'}$, und die Exponenten der zum Wurzelfaktor $r_k - r$ gehörigen Elementartheiler mit $e_0^{(k)}\, e_1^{(k)} \ldots e_{l_k}^{(k)}$.

Wie ich in meiner Inauguraldissertation[1]) nachgewiesen habe, lassen sich $n^2$ Grössen $[g\, h\, \lambda]_k$ mit nicht verschwindender Determinante so bestimmen, dass

$$\begin{aligned} \sum_{\mu=1}^{n} c_{\lambda\mu}\, [1\, h\, \mu]_k &= r_k\, [1\, h\, \lambda]_k \\ \sum_{\mu=1}^{n} c_{\lambda\mu}\, [g\, h\, \mu]_k &= r_k\, [g\, h\, \lambda]_k + [g-1\, h\, \lambda]_k \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \lambda &= 1, 2, \ldots n \\ g &= 2, 3, \ldots e_h^{(k)} \\ h &= 0, 1, \ldots l_k \\ k &= 1, 2, \ldots n' \end{aligned}$$

Nun folgt aus den Gleichungen (a)

$$\sum_{\nu=1}^{n} c_{\lambda\nu} \left( \sum_{\mu=1}^{n} c'_{\nu\mu}\, [1\, h\, \mu]_k \right) = (r_k + \omega) \sum_{\mu=1}^{n} c'_{\lambda\mu}\, [1\, h\, \mu]_k$$
$$\lambda = 1, 2, \ldots n$$

Weil nach Voraussetzung die Determinante $\Delta(r)$ für $r = r_k + \omega$ nicht verschwindet, so folgt hieraus

1) Zur Theorie der linearen Substitutionen, Strassburg 1887.

$$\sum_{\mu=1}^{n} c'_{\lambda\mu}\,[1\,h\,\mu]_k = 0 \quad \text{für } \lambda = 1, 2, \ldots n$$

Nun folgt aus ($a$) weiter

$$\sum_{\nu=1}^{n} c_{\lambda\nu}\left(\sum_{\mu=1}^{n} c'_{\nu\mu}\,[2\,h\,\mu]_k\right) = (r_k + w)\sum_{\mu=1}^{n} c'_{\lambda\mu}\,[2\,h\,\mu]_k$$
$$\lambda = 1, 2, \ldots n$$

und hieraus ergibt sich

$$\sum_{\mu=1}^{n} c'_{\lambda\mu}\,[2\,h\,\mu]_k = 0 \qquad \lambda = 1, 2, \ldots n$$

Diese Schlussweise fortsetzend erkennt man, dass

$$\sum_{\mu=1}^{n} c'_{\lambda\mu}\,[g\,h\,\mu]_k = 0 \quad \text{für } \lambda = 1, 2, \ldots n$$

und alle $n$ Werthsysteme der Indices $g$, $h$, $k$.

Da die Determinante der Grössen $[g\,h\,\mu]_k$ nicht verschwindet, so folgt hieraus $c'_{\lambda\mu} = 0$ für $\lambda, \mu = 1, 2, \ldots n$, w. z. b. w.

Aus dem eben Bewiesenen folgt der

1. Hülfssatz:

Ist das System der $n^2$ Grössen $c_{\lambda\mu}$ regulär von der ersten Art, so können die Gleichungen

$$\sum_{\nu=1}^{n} (c_{\lambda\nu}\,c'_{\nu\mu} - c'_{\lambda\nu}\,c_{\nu\mu}) = \omega\,c'_{\lambda\mu} \qquad \lambda, \mu = 1, 2, \ldots n$$

nur dann bestehen, wenn entweder $\omega$ oder alle $n^2$ Grössen $c'_{\lambda\mu}$ gleich Null sind.

Denn in diesem Fall verschwindet die charakteristische Determinante $\Delta(r)$ nur für $r = 0$.

Man kann das Gleichungssystem ($a$) in bekannter Weise durch die symbolische Gleichung

$$C\,C' - C'\,C = \omega\,C'$$

repräsentiren. Aus dieser symbolischen Gleichung ergibt sich:

$$CC'^2 - C'^2C = (CC' - C'C)\,C' + C'\,(CC' - C'C) = 2\omega\,C'^2$$
$$CC'^3 - C'^3C = (CC'^2 - C'^2C)\,C' + C'^2(CC' - C'C) = 3\omega C'^3$$

und allgemein $CC'^h - C'^hC = h\,\omega\,C'^h$

Wählt man die Zahl $h$ so gross, dass $h\,\omega$ nicht gleich der Differenz zweier Wurzeln der Gleichung $\varDelta(r) = 0$ ist, was offenbar immer möglich ist, wenn $\omega$ von Null verschieden ist — so müssen alle $n^2$ Elemente des durch das Symbol $C'^h$ repräsentirten Systems verschwinden. Das ist aber nur möglich, wenn die zu dem System $c'_{\lambda\mu}$ gehörige charakteristische Determinante $\varDelta'(r)$ für keinen von Null verschiedenen Werth von $r$ verschwindet, d. h. wenn das System der $n^2$ Grössen $c'_{\lambda\mu}$ regulär von der ersten Art ist.

Es gilt somit der

### 2. Hülfssatz:

Bestehen die $n^2$ Gleichungen

$$\sum_{\nu=1}^{n} (c_{\lambda\nu}\,c'_{\nu\mu} - c'_{\lambda\nu}\,c_{\nu\mu}) = \omega\,c'_{\lambda\mu} \qquad \lambda, \mu = 1, 2, \ldots n$$

und ist die Constante $\omega$ von Null verschieden, so ist das System der $n^2$ Grössen $c'_{\lambda\mu}$ regulär von der ersten Art.

Die beiden ersten Hülfssätze haben sich auf reguläre Systeme erster Art bezogen, die beiden folgenden beziehen sich auf reguläre Systeme zweiter Art.

### 3. Hülfssatz:

Wenn die charakteristische Determinante

$$\varDelta(r) = \left| c_{\lambda\mu} - \binom{\lambda}{\mu} r \right| \qquad \lambda, \mu = 1, 2, \ldots n$$

nur Elementartheiler erster Ordnung besitzt, so können die Gleichungen

$$\sum_{\nu=1}^{n} (c_{\lambda\nu}\, c'_{\nu\mu} - c'_{\lambda\nu}\, c_{\nu\mu}) = \omega\, c'_{\lambda\mu}$$
$$\lambda, \mu = 1, 2, \ldots n$$
$$\sum_{\nu=1}^{n} (c_{\lambda\nu}\, c''_{\nu\mu} - c''_{\lambda\nu}\, c_{\nu\mu}) = \omega\, c''_{\lambda\mu} + c'_{\lambda\mu}$$

nur dann bestehen, wenn alle $n^2$ Grössen $c'_{\lambda\mu}$ gleich Null sind.

Bezeichnen wir die Wurzeln der Gleichung $\Delta(r) = 0$, unter denen beliebig viele einander gleiche vorkommen können, mit $r_1\, r_2 \ldots r_n$. Aus unserer Voraussetzung folgt: es gibt zwei Systeme von je $n^2$ Grössen $d_\lambda^{(\sigma)}$ und $\delta_\lambda^{(\sigma)}$ $(\sigma, \lambda = 1, 2 \ldots n)$ mit nicht verschwindender Determinante, die den folgenden Gleichungen genügen:

$$\sum_{\mu=1}^{n} c_{\lambda\mu}\, d_\mu^{(\sigma)} = r_\sigma\, d_\lambda^{(\sigma)}$$
$$\lambda, \sigma = 1, 2, \ldots n$$
$$\sum_{\mu=1}^{n} c_{\mu\lambda}\, \delta_\mu^{(\sigma)} = r_\sigma\, \delta_\lambda^{(\sigma)}$$

Mit Hülfe dieser Gleichungen leitet man aus dem vorgelegten Gleichungssystem das Folgende ab:

$$(r_\varrho - r_\sigma - \omega) \sum_{\lambda=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{n} c'_{\lambda\mu}\, \delta_\lambda^{(\varrho)}\, d_\mu^{(\sigma)} = 0$$

$$(r_\varrho - r_\sigma - \omega) \sum_{\lambda=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{n} c''_{\lambda\mu}\, \delta_\lambda^{(\varrho)}\, d_\mu^{(\sigma)} = \sum_{\lambda=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{n} c'_{\lambda\mu}\, \delta_\lambda^{(\varrho)}\, d_\mu^{(\sigma)}$$
$$\varrho, \sigma = 1, 2, \ldots n$$

Die erste Gleichung zeigt, dass der Ausdruck

$$\sum_\lambda \sum_\mu c'_{\lambda\mu}\, \delta_\lambda^{(\varrho)}\, d_\mu^{(\sigma)}$$

verschwindet, wenn $r_\varrho - r_\sigma - \omega$ von Null verschieden ist. Die zweite Gleichung zeigt, dass dieser Ausdruck auch dann verschwindet, wenn $r_\varrho - r_\sigma - \omega = 0$ ist. Der genannte Ausdruck verschwindet also in allen Fällen und daraus folgt $c'_{\lambda\mu} = 0$ für $\lambda, \mu = 1, 2, \ldots n$, w. z. b. w.

4. Hülfssatz:

Es seien $m$ Systeme von je $n^2$ Grössen vorgelegt:

$$c^{(1)}_{\lambda\mu}\, c^{(2)}_{\lambda\mu} \ldots c^{(m)}_{\lambda\mu} \qquad \lambda, \mu = 1, 2, \ldots n$$

Wir setzen voraus, die zu einem jeden Systeme gehörige charakteristische Determinante $\Delta_i(r)$ habe nur Elementartheiler erster Ordnung, und wir setzen weiter voraus, zwischen den Elementen von je zwei Grössensystemen bestehen die Gleichungen

$$\sum_{\nu=1}^{n} \left(c^{(i)}_{\lambda\nu}\, c^{(k)}_{\nu\mu} - c^{(k)}_{\lambda\nu}\, c^{(i)}_{\nu\mu}\right) = 0 \qquad \begin{matrix} \lambda, \mu = 1, 2, \ldots n \\ i, k = 1, 2, \ldots m \end{matrix}$$

Dann kann man ein System von $n^2$ Grössen $d^{(\sigma)}_\lambda$ mit nicht verschwindender Determinante derart bestimmen, dass

$$\sum_{\mu=1}^{n} c^{(i)}_{\lambda\mu}\, d^{(\sigma)}_\mu = r^{(i)}_\sigma\, d^{(\sigma)}_\lambda \qquad \begin{matrix} \lambda, \sigma = 1, 2, \ldots n \\ i = 1, 2, \ldots m \end{matrix}$$

Die $n$ Grössen $r^{(i)}_1\, r^{(i)}_2 \ldots r^{(i)}_n$ sind die Wurzeln der Gleichung $\Delta_i(r) = 0$, also ganze Zahlen, wenn das System der $c^{(i)}_{\lambda\mu}$ regulär von der zweiten Art ist.

Dass der eben ausgesprochene Satz gilt, wenn nur ein Grössensystem $c^{(i)}_{\lambda\mu}$ vorgelegt ist, ist bekannt. Um seine allgemeine Gültigkeit darzuthun, wollen wir annehmen, er gelte, solange die Anzahl der vorgelegten Grössensysteme kleiner als $m$ ist, und beweisen, dass er dann auch noch für $m$ Grössensysteme gilt. Wir nehmen also an, es gebe ein Grössensystem $t^{(\sigma)}_\lambda$ mit nicht verschwindender Determinante, das den Gleichungen

$$(T)\quad \sum_{\mu=1}^{n} c_{\lambda\mu}^{(i)}\, t_{\mu}^{(\sigma)} = r_{\sigma}^{(i)}\, t_{\lambda}^{(\sigma)} \qquad \lambda = 1, 2, \ldots n;\; i = 1, 2, \ldots m-1$$

genügt. Weil nach Voraussetzung die Determinante der $t_{\lambda}^{(\sigma)}$ nicht verschwindet, so kann man die Gleichungen ansetzen

$$(\alpha)\quad \sum_{\mu=1}^{n} c_{\lambda\mu}^{(m)}\, t_{\mu}^{(\sigma)} = \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_{\sigma\nu}\, t_{\lambda}^{(\nu)} \qquad \lambda, \sigma = 1, 2, \ldots n$$

Nach dem bekannten Theorem des H. Weinstrass stimmen die charakteristischen Determinanten.

$$\Delta_m(r) = \left| c_{\lambda\mu}^{(m)} - \binom{\lambda}{\mu} r \right| \text{ und } \Delta_m'(r) = \left| \alpha_{\lambda\mu} - \binom{\lambda}{\mu} r \right|$$
$$\lambda, \mu = 1, 2, \ldots n$$

in ihren Elementartheilern überein.

Nun folgt aus den Gleichungen, von denen wir ausgegangen sind bei Benützung der Gleichungen $(T)$ und $(\alpha)$

$$\sum_{\mu=1}^{n} \sum_{\nu=1}^{n} \left(c_{\lambda\nu}^{(i)}\, c_{\nu\mu}^{(m)} - c_{\lambda\nu}^{(m)}\, c_{\nu\mu}^{(i)}\right) t_{\mu}^{(\sigma)} = \sum_{\nu=1}^{n} \left(r_{\nu}^{(i)} - r_{\sigma}^{(i)}\right) \alpha_{\sigma\nu}\, t_{\lambda}^{(\nu)} = 0$$
$$\sigma, \lambda = 1, 2, \ldots n;\; i = 1, 2, \ldots m-1$$

und hieraus ergibt sich $\alpha_{\sigma\nu} = 0$, wenn nicht

$$r_{\nu}^{(i)} = r_{\sigma}^{(i)} \text{ für } i = 1, 2, \ldots m-1$$

Ist nun für keinen Index $\nu > 1$ gleichzeitig $r_{\nu}^{(i)} = r_{1}^{(i)}$ für $i = 1, 2, \ldots m-1$, so ist

$$\sum_{\mu=1}^{m} c_{\lambda\mu}^{(m)}\, t_{\mu}^{(i)} = \alpha_{11}\, t_{\lambda}^{(1)} \qquad \lambda = 1, 2, \ldots n$$

und wir genügen den zu beweisenden Gleichungen, wenn wir $d_{\lambda}^{1)} = t_{\lambda}^{(1)}$ und $r_{1}^{(m)} = \alpha_{11}$ setzen.

Nehmen wir nunmehr an, es sei

$$r_{1}^{(i)} = r_{2}^{(i)} \ldots = r_{h}^{(i)} \qquad i = 1, 2, \ldots m-1$$

dagegen sei für keinen Index $\nu > h$ gleichzeitig

$$r_\nu^{(i)} = r_1^{(i)} \qquad i = 1, 2, \ldots m-1$$

Von den Elementen der Determinante

$$\Delta'_m(r) = \left| \alpha_{\lambda\mu} - \binom{\lambda}{\mu} r \right| \qquad \lambda, \mu = 1, 2, \ldots n$$

verschwinden alle, die den ersten $h$ Zeiten, aber nicht gleichzeitig den ersten $h$ Spalten angehören. Beachtet man, dass die Determinante $\Delta'_m(r)$ ebenso wie die Determinante $\Delta_m(r)$ nur Elementartheile erster Ordnung besitzt, so überzeugt man sich leicht, dass auch die charakteristische Determinante des Systems $h^{\text{ten}}$ Grades $\alpha_{\lambda\mu} - \binom{\lambda}{\mu} r \quad \lambda, \mu = 1, 2, \ldots h$ nur Elementartheiler erster Ordnung hat, und daraus folgt: man kann ein System von $h^2$ Grössen $\beta_{\varrho\sigma}$ mit nicht verschwindender Determinante derart bestimmen, dass

$$\sum_{\sigma=1}^{h} \beta_{\varrho\sigma} \alpha_{\sigma\nu} = r_\varrho^{(m)} \beta_{\varrho\nu} \qquad \varrho, \nu = 1, 2, \ldots h$$

Setzt man dann

$$\sum_{\nu=1}^{h} \beta_{\varrho\nu} t_\lambda^{(\nu)} = d_\lambda^{(\varrho)} \qquad \lambda = 1, 2, \ldots n; \ \varrho = 1, 2, \ldots h$$

so ergibt sich aus den Gleichungen ($\alpha$)

$$\sum_{\mu=1}^{n} c_{\lambda\mu}^{(m)} d_\mu^{(\varrho)} = r_\varrho^{(m)} d_\lambda^{(\varrho)} \qquad \lambda = 1, 2, \ldots n; \quad \varrho = 1, 2, \ldots h$$

Damit sind die ersten $h$ der zu beweisenden Gleichungen als richtig erwiesen. Der Beweis der übrigen ergibt sich auf analoge Weise.

## III.

Nach diesen Vorbereitungen wenden wir uns zunächst zu den Gruppen der zweiten Classe (s. Einleitung, Schluss).

Wir nehmen also an, eine jede inf. Transformation, die der vorgelegten $m$-gliedrigen Gruppe $A$ angehört, sei regulär von der zweiten Art. Zwischen den Coefficienten von $m$ linear unabhängigen inf. Transformationen der Gruppe $A$

$$C_i(f) = \sum_{\lambda=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{n} c_{\lambda\mu}^{(i)} \frac{\partial f}{\partial x_\lambda} x_\mu \qquad i = 1, 2, \ldots m$$

bestehen Gleichungen der Form

$$\sum_{\nu=1}^{n} \left( c_{\lambda\nu}^{(i)} c_{\nu\mu}^{(k)} - c_{\lambda\nu}^{(k)} c_{\nu\mu}^{(i)} \right) = \sum_{j=1}^{m} \varepsilon_j^{ik} c_{\lambda\mu}^{(j)}$$

$$(\lambda, \mu = 1, 2, \ldots n; \quad i, k = 1, 2, \ldots m)$$

Ich behaupte, die Constanten $\varepsilon_j^{ik}$ müssen alle gleich Null sein. Wäre nämlich z. B. eine der $m^2$ Grössen $\varepsilon^{1k}$ von Null verschieden, so müsste die Determinante $E(r) = | \varepsilon_j^{1k} - \binom{k}{j} r |$ $k, j = 1, 2, \ldots m$ entweder wenigstens für einen von Null verschiedenen Werth von $r$ verschwinden, oder sie müsste, wenn sie durch $r^n$ theilbar ist, wenigstens einen Elementartheiler von höherer als der ersten Ordnung haben.

Tritt der letztere Fall ein, so kann man zwei Werthsysteme, deren Elemente nicht alle verschwinden, $e_1\, e_1 \ldots e_m$ und $e_1'\, e_2' \ldots e_m'$ so bestimmen, dass

$$\sum_{h=1}^{m} \varepsilon_j^{1h} e_h = 0 \text{ und } \sum_{h=1}^{m} \varepsilon_j^{1h} e_h' = e_j \qquad (j = 1, 2, \ldots m)$$

Setzt man nun

$$\sum_{i=1}^{m} e_i c_{\lambda\mu}^{(i)} = k_{\lambda\mu} \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^{m} e_i' c_{\lambda\mu}^{(i)} = k_{\lambda\mu}' \qquad (\lambda, \mu = 1, 2, \ldots n)$$

so bestehen die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{\nu=1}^{n} \left( c_{\lambda\nu}^{(1)} k_{\nu\mu} - k_{\lambda\nu} c_{\nu\mu}^{(1)} \right) = 0 \\ &\sum_{\nu=1}^{n} \left( c_{\lambda\nu}^{(1)} k_{\nu\mu}' - k_{\lambda\nu}' c_{\nu\mu}^{(1)} \right) = k_{\lambda\mu} \end{aligned}\right\} \quad \lambda, \mu = 1, 2, \ldots n$$

Aber diese Gleichungen können nach Hülfssatz (3) nur dann statt haben, wenn alle $n^2$ Grössen $k_{\lambda\mu}$ verschwinden.

Dies ist aber unmöglich, weil einerseits nicht alle $m$ Grössen $e_i$ Null sind, und andererseits die $m$ inf. Transformationen $C_i(f)$ linear unabhängig sind.

Nehmen wir nunmehr an, die Determinante $E(r)$ verschwinde für einen von Null verschiedenen Werth $\omega$ von $r$. Unter dieser Voraussetzung kann man $m$ Grössen $e_1\, e_2 \,.\,.\, e_m$, die nicht alle gleich Null sind, so bestimmen, dass

$$\sum_{h=1}^{m} \varepsilon_j^{1h}\, e_h = \omega\, e_j \qquad \text{für } j = 1, 2, .\,.\, m$$

Setzen wir wieder zur Abkürzung

$$\sum_{i=1}^{m} e_i\, c_{\lambda\mu}^{(i)} = k_{\lambda\mu}$$

Diese Grössen $k_{\lambda\mu}$ genügen der Gleichung

$$\sum_{\nu=1}^{n} \left(c_{\lambda\nu}^{(1)}\, k_{\nu\mu} - k_{\lambda\nu}\, c_{\nu\mu}^{(1)}\right) = \omega\, k_{\lambda\mu} \qquad \lambda, \mu = 1, 2, .\,.\, n$$

Aber diese Gleichungen können nach Hülfssatz (2) nur dann bestehen, wenn entweder alle $n^2$ Grössen $k_{\lambda\mu}$ verschwinden oder wenn diese Grössen ein reguläres System erster Art bilden. Beides ist durch unsere Voraussetzungen ausgeschlossen.

Damit ist bewiesen: die Coefficienten der vorgelegten $m$ inf. Transformationen genügen den Gleichungen

$$(S) \qquad \sum_{\nu=1}^{n} \left(c_{\lambda\nu}^{(i)}\, c_{\nu\mu}^{(k)} - c_{\lambda\nu}^{(k)}\, c_{\nu\mu}^{(i)}\right) = 0$$

$$\text{für } \lambda, \mu = 1, 2, .\,.\, n; \quad i, k = 1, 2, .\,.\, m$$

Es sind somit die Voraussetzungen erfüllt, auf denen der Hülfssatz (4) beruht, und man kann daher $n^2$ Grössen $d_\mu^{(\sigma)}$ mit nicht verschwindender Determinante so bestimmen, dass

$$(T) \qquad \sum_{\mu=1}^{n} c_{\lambda\mu}^{(i)}\, d_\mu^{(\sigma)}\, r_\sigma^{(i)} = d_\lambda^{(\sigma)}$$

$$\sigma, \lambda = 1, 2, .\,.\, n; \quad i = 1, 2, .\,.\, m$$

Führt man an Stelle der inf. Transformationen $C_i(f)$ $m$ andere linear unabhängige inf. Transformationen

$$K_i(f) = \sum_{h=1}^{m} q_{ih}\, C_h(f) \qquad i = 1, 2, \ldots m$$

ein, so treten in den Gleichungen ($T$) an Stelle der Grössen $r_\sigma^{(i)}$ die Grössen

$$\varrho_\sigma^{(i)} = \sum_{h=1}^{m} q_{ih}\, r_\sigma^{(h)}$$

während die Grössen $d_\lambda^{(\sigma)}$ unverändert bleiben.

Ich behaupte nun: man kann die verfügbaren Grössen $q_{ih}$ so wählen, dass

1. auch die Grössen $\varrho_\sigma^{(i)}$ — ebenso wie die Grössen $r_\sigma^{(i)}$ — ganze Zahlen sind, und dass

2. die aus $m$ Spalten des Systems

$$\begin{array}{cccc} \varrho_1^{(1)} & \varrho_2^{(1)} & \ldots & \varrho_n^{(1)} \\ \varrho_1^{(2)} & \varrho_2^{(2)} & \ldots & \varrho_n^{(2)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varrho_1^{(m)} & \varrho_2^{(m)} & \ldots & \varrho_n^{(m)} \end{array}$$

gebildeten Determinanten $m^{\text{ten}}$ Grades keinen gemeinschaftlichen Divisor haben.

Zum Beweise ist zunächst zu bemerken: weil nach Voraussetzung die $m$ inf. Transformationen $C_i(f)$ linear unabhängig sind, so können nicht alle Determinanten $m^{\text{ten}}$ Grades, die aus $m$ Spalten des Systems

$$(R) \qquad \begin{array}{cccc} r_1^{(1)} & r_2^{(1)} & \ldots & r_n^{(1)} \\ r_1^{(2)} & r_2^{(2)} & \ldots & r_n^{(2)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ r_1^{(m)} & r_2^{(m)} & \ldots & r_n^{(m)} \end{array}$$

gebildet sind, verschwinden. Wir können ferner voraussetzen, dass nicht alle $n$ zu einer inf. Transformation $C_i(f)$ gehörigen Grössen

$$r_1^{(i)} \quad r_2^{(i)} \, . \, . \quad r_n^{(i)}$$

einen gemeinschaftlichen Divisor haben. Wären nämlich diese $n$ Zahlen durch die Zahl $a$ theilbar, so hätte man nur die inf. Transformation $C_i(f)$ durch $\frac{1}{a} C_i(f)$ zu ersetzen.

Um nun unsere Behauptung zu beweisen, gehen wir von der Annahme aus, dass nicht alle Unterdeterminanten $h-1^{\text{ten}}$ Grades, deren Elemente den $h-1$ ersten Zeilen des Systems $(R)$ angehören, einen von 1 verschiedenen gemeinschaftlichen Divisor besitzen. Diese Voraussetzung ist, wenn nicht für grössere $h$, so doch sicher für $h=2$ erfüllt. Es sei sodann $a$ der grösste gemeinschaftliche Divisor aller der Unterdeterminanten $h^{\text{ten}}$ Grades, deren Elemente den $h$ ersten Zeilen von $(R)$ angehören. Unter den Unterdeterminanten $h-1^{\text{ten}}$ Grades, deren Elemente den $h-1$ ersten Zeilen von $(R)$ angehören, ist mindestens eine nicht durch $a$ theilbar. Es sei dies die aus den Elementen der $h-1$ ersten Spalten gebildete Determinante $D_{h-1}$. Unter den Unterdeterminanten $h^{\text{ten}}$ Grades, deren Elemente den $h$ ersten Zeilen von $(R)$ angehören und die alle Elemente von $D_{h-1}$ enthalten, hat mindestens eine einen von Null verschiedenen Werth. Es sei dies die aus den Elementen der $h$ ersten Spalten gebildete Determinante $D_h$. Es sei ferner $b$ der grösste gemeinschaftliche Divisor von $D_{h-1}$ und $a$, so dass jedenfalls $b < a$ ist. Endlich sei $t$ eine Wurzel der Congruenz $t\, R_{h-1} \equiv b \mod a$.

Wir lassen nun an Stelle der inf. Transformation $C_h(f)$ die Transformation

$$K(f) = \frac{1}{a}\Big(t \frac{\partial R_h}{\partial r_h^{(1)}} C_1(f) + t \frac{\partial R_h}{\partial r_h^{(2)}} C_2(f) \, . \, . \\ + t \frac{\partial R_h}{\partial r_h^{(h-1)}} C_{h-1}(f) + b\, C_h(f)\Big)$$

treten. Dementsprechend tritt an Stelle des Zahlensystems $(R)$ ein Zahlensystem $(R')$, das sich von $(R)$ nur in den

Elementen der $h^{\text{ten}}$ Zeile unterscheidet, indem die Zahlen $r_\sigma^{(h)}$ durch die Zahlen

$$\varrho_\sigma = \frac{1}{a}\left(t\frac{\partial R_h}{\partial r_h^{(1)}}r_\sigma^{(1)} + t\frac{\partial R_h}{\partial r_h^{(2)}}r_\sigma^{(2)}\ldots\right.$$
$$\left. + t\frac{\partial R_h}{\partial r_h^{(h-1)}}r_\sigma^{(h-1)} + b\,r_\sigma^{(h)}\right)$$
$$(\sigma = 1, 2, \ldots n)$$

ersetzt sind. Die Grössen $\varrho_\sigma$ sind ganze Zahlen, denn der Zähler von $\varrho_\sigma$ ist nach dem Modul $a$ dem $t$-fachen einer der Unterdeterminanten $h^{\text{ten}}$ Grades congruent, die aus den Elementen der $h$ ersten Zeilen des Systems $(R)$ gebildet sind, er ist also durch $a$ theilbar.

Man überzeugt sich nun leicht, dass $b$ der grösste gemeinschaftliche Divisor der Unterdeterminanten $h^{\text{ten}}$ Grades ist, die aus den Elementen der $h$ ersten Zeilen des Systems $(R')$ gebildet sind. An Stelle des gemeinschaftlichen Divisors $a$ ist somit ein kleinerer gemeinschaftlicher Divisor $b$ getreten.

Es ist nun klar, dass bei wiederholter Anwendung des eben durchgeführten Verfahrens an Stelle des Systems $(R)$ ein System $(R_1)$ von der Beschaffenheit tritt, dass die Unterdeterminanten $h^{\text{ten}}$ Grades, die aus den Elementen der $h$ ersten Zeilen gebildet sind, keinen gemeinschaftlichen Divisor mehr besitzen. Aus diesem System $(R_1)$ leitet man dann in analoger Weise ein System $(R_2)$ von der Beschaffenheit ab, dass auch die Unterdeterminanten $h+1^{\text{ten}}$ Grades keinen gemeinschaftlichen Divisor mehr besitzen u. s. w.

Wir wollen nunmehr voraussetzen, die inf. Transformation $C_1(f)\ C_2(f)\ldots C_m(f)$ seien von Anfang an so gewählt, dass die aus $m$ Spalten des Systems $(R)$ gebildeten Determinanten $m^{\text{ten}}$ Grades keinen gemeinschaftlichen Divisor besitzen.

Unter dieser Voraussetzung bezeichne ich die genannten inf. Transformationen als ein kanonisches System inf. Transformationen.

Die Coefficienten $a_{\lambda\mu}$ der allgemeinen Substitution unserer $m$-gliedrigen Gruppe $A$ sind — wie in der Einleitung bemerkt worden ist — durch Differentialgleichungen der Form

$$\frac{\partial a_{\lambda\mu}}{\partial u_i} = \sum_{j=1}^{m} \sum_{\nu=1}^{n} a_{\lambda\nu}\, c_{\nu\mu}^{(j)}\, P_j^{(i)} \qquad \begin{matrix} \lambda, \mu = 1, 2, \ldots n \\ i = 1, 2, \ldots m \end{matrix}$$

und die Anfangsbedingungen $a_{\lambda\mu} = \binom{\lambda}{\mu}$ für

$$u_1 = 1 \quad u_2 = 1 \ldots \quad u_m = 1$$

bestimmt. Ich setze nun $P_j^{(i)} = 0$, wenn $i$ und $j$ ungleich sind und $P_i^{(i)} = \frac{1}{u_i}$. Dass diese Festsetzung nicht gegen die Integrabilitätsbedingung verstösst, wird sich im Folgenden von selbst ergeben.

Die vorstehenden Differentialgleichungen kann man wegen der Gleichungen ($T$) durch die folgenden ersetzen:

$$\frac{\partial}{\partial u_i} \sum_{\mu=1}^{n} a_{\lambda\mu}\, d_\mu^{(\sigma)} = \frac{1}{u_i}\, r_\sigma^{(i)} \sum_{\mu=1}^{n} a_{\lambda\mu}\, d_\mu^{(\sigma)}$$
$$(\sigma, \lambda = 1, 2, \ldots n; \;\; i = 1, 2, \ldots m)$$

und aus diesen ergibt sich bei Berücksichtigung der Anfangsbedingungen

$$\sum_{\mu=1}^{n} a_{\lambda\mu}\, d_\mu^{(\sigma)} = u_1^{\,r_\sigma^{(1)}}\, u_2^{\,r_\sigma^{(2)}} \ldots u_m^{\,r_\sigma^{(m)}}\, d_\lambda^{(\sigma)}$$
$$(\sigma, \lambda = 1, 2, \ldots n)$$

Durch diese $n^2$ Gleichungen sind die Substitutionscoefficienten als rationale Funktionen der Parameter bestimmt. Um zu beweisen, dass auch umgekehrt die Parameter rationale Funktionen der Substitutionscoefficienten sind, nehmen wir an, den beiden Werthsystemen der Parameter

$$u_1 \; u_2 \ldots u_m \text{ und } v_1 \; v_2 \ldots v_m$$

entspreche dasselbe Werthsystem der Grössen $a_{\lambda\mu}$, und wir beweisen, dass dann nothwendig

$$v_1 = u_1 \quad v_2 = u_2 \,.\,. \quad v_m = u_m$$

Aus unserer Voraussetzung ergibt sich

$$\left(\frac{v_1}{u_1}\right)^{r_\sigma^{(1)}} \left(\frac{v_2}{u_2}\right)^{r_\sigma^{(2)}} \,.\,. \left(\frac{v_m}{u_m}\right)^{r_\sigma^{(m)}} = 1 \qquad \sigma = 1, 2, \,.\,. \, n$$

und hieraus folgt, dass eine jede von den $n$ Summen

$$\frac{1}{2\pi i} \sum_{h=1}^{m} r_\sigma^{(h)} \log \frac{v_h}{u_h}$$

eine ganze Zahl ist.

Wir setzen nun, unter $N_\sigma$ eine ganze Zahl verstehend, die $n$ Gleichungen

$$\frac{1}{2\pi i} \sum_{h=1}^{m} r_\sigma^{(h)} \log \frac{v_h}{u_h} = N_\sigma \qquad (\sigma = 1, 2, \,.\,. \, n)$$

an und bilden von denselben alle die Combinationen zu $m$, die $m$ von einander unabhängige Gleichungen umfassen. Die Auflösung eines dieser Gleichungssysteme ergibt die $m$ Grössen $\frac{1}{2\pi i} \log \frac{v_h}{u_h}$ als Quotienten, deren Zähler von den Zahlen $N_\sigma$ abhängige, nicht näher bestimmte ganze Zahlen sind, und deren gemeinschaftlicher Nenner — die Auflösungsdeterminante — eine von den Determinanten $m^{\text{ten}}$ Grades ist, die aus $m$ Spalten des Systems $(R)$ gebildet sind, und es ist klar, dass jede derartige Determinante, die nicht verschwindet, als Auflösungsdeterminante zu einem unserer Systeme von $m$ Gleichungen gehört. Der kleinste gemeinschaftliche Nenner der $m$ Brüche $\frac{1}{2\pi i} \log \frac{v_h}{u_h}$ muss daher gemeinschaftlicher Divisor aller der genannten Determinanten sein: er ist also $= 1$.

Demnach sind die Logarithmen der Quotienten $\frac{v_h}{u_h}$ Multipla von $2\pi i$ und es ist folglich $v_1 = u_1 \;\; v_2 = u_2 \,..\, v_m = u_m$ w. z. b. w.

## IV.

Die beiden Theile unseres Beweises, die sich auf Gruppen der ersten und der dritten Classe (s. Einleitung) beziehen, beruhen auf einem gemeinschaftlichen Grundgedanken. Ich beginne mit der Darlegung dieses Beweisprincips.

Es seien $m$ reguläre, linear unabhängige, inf. Transformationen

$$C_1(f) \;\; C_2(f) \,..\, C_m(f)$$

vorgelegt, die eine $m$-gliedrige Gruppe erzeugen. Wir bestimmen die zu einer jeden inf. Transformation $C_i(f)$ gehörige eingliedrige Gruppe $B_i(u_i)$ (s. Einleitung) und setzen dann diese $m$ eingliedrigen Gruppen zu der $m$-gliedrigen Gruppe

$$A(u_1\, u_2\, ., u_m) = B_1(u_1)\, B_2(u_2) \,..\, B_m(u_m)$$

zusammen.

Bezüglich der inf. Transformationen $C_i(f)$ machen wir nun die Voraussetzungen:

1. es sollen die $q$ ersten von denselben für sich eine Gruppe bestimmen und ebenso sollen die $m-q$ letzten für sich eine Gruppe bestimmen.

Alsdann werden die $q$ ersten unter den eingliedrigen Gruppen $B_i(u_i)$ sich zu einer $q$-gliedrigen Gruppe

$$A'(u_1\, u_2 \,..\, u_q) = B_1(u_1)\, B_2(u_2) \,..\, B_q(u_q)$$

zusammensetzen und ebenso werden sich die $m-q$ letzten zu einer $m-q$-gliedrigen Gruppe

$$A''(u_{q+1}\, u_{q+2} \,..\, u_m) = B_{q+1}(u_{q+1})\, B_{q+2}(u_{q+2}) \,..\, B_m(u_m)$$

zusammensetzen.

Wir nehmen nun an, es sei bereits bewiesen:

2. Die Parameter $u_1\, u_2 \,.\,.\, u_q$, von denen die Coefficienten $a'_{\lambda\mu}$ der allgemeinen Substitution der Gruppe $A'$ abhängen, lassen sich als rationale Funktionen der Coefficienten $a'_{\lambda\mu}$ darstellen und ebenso sind die Parameter $u_{q+1}\, u_{q+2} \,.\,.\, u_m$, von denen die Coefficienten $a''_{\lambda\mu}$ der allgemeinen Substitution der Gruppe $A''$ abhängen, rationale Funktionen der Coefficienten $a''_{\lambda\mu}$.

Bezüglich der Gruppe $A''$ machen wir noch die weitere Voraussetzung:

3. Unter den Potenzen einer beliebigen Substitution $S$ der Gruppe $A''$ soll die identische Substitution nur dann vorkommen, wenn $S$ selbst die identische Substitution ist, wenn also die der Substitution entsprechenden Parameter die Werthe haben, die in der Einleitung als Anfangswerthe der Parameter bezeichnet worden sind.

Aus dieser Voraussetzung ergibt sich in bekannter Weise, dass alle Potenzen einer Substitution $S$ der Gruppe $A''$ unter einander verschieden sind.

Geht also die Substitution $S^h$ aus der allgemeinen Substitution der Gruppe dadurch hervor, dass man den verfügbaren Parametern $u_{q+1}\, u_{q+2} \,.\,.\, u_m$ die Werthe $w^{(h)}_{q+1}\, w^{(h)}_{q+2} \,.\,.\, w^{(h)}_m$ ertheilt, so sind diese Werthsysteme $w^{(h)}_{q+1}\, w^{(h)}_{q+2} \,.\,.$, die den verschiedenen Potenzen von $S$ entsprechen, alle unter einander verschieden.

Ich behaupte nun, die eingeführten Voraussetzungen reichen für den Beweis hin, dass sich die Parameter $u_1\, u_2 \,.\,.\, u_m$ rational durch die Coefficienten $a_{\lambda\mu}$ der allgemeinen Substitution der Gruppe $A$ darstellen lassen.

Zum Beweis ist zunächst zu bemerken:

Weil die Substitutionscoefficienten $a_{\lambda\mu}$ rationale Funktionen der Parameter $u_1\, u_2 \,.\,.\, u_m$ sind, so hängen umgekehrt die Parameter algebraisch von den Substitutionscoefficienten ab und weil die Gruppe $A$ $m$-gliedrig ist, also über $m$ der Substitutionscoefficienten durch geeignete Wahl der Parameter verfügt werden kann, so kann einem Werthsystem der Substitutionscoefficienten nur eine endliche Anzahl von Werthsystemen der Parameter entsprechen. Um die eben aufgestellte Behauptung zu beweisen, genügt es also zu zeigen:

Wenn einem Werthsysteme der Substitutionscoefficienten zwei verschiedene Werthsysteme der Parameter entsprechen, so entsprechen ihm unendlich viele Werthsysteme der Parameter.

Nehmen wir, um diesen Nachweis zu führen, an, den beiden Parametersystemen

$$u_1\, u_2 \,..\, u_m \text{ und } v_1\, v_2 \,..\, v_m$$

entspreche dieselbe Substitution der Gruppe $A$. Es sei also

$$(G) \quad A\,(u_1\, u_2 \,..\, u_m) = A\,(v_1\, v_2 \,..\, v_m)$$

ohne dass gleichzeitig die $m$ Gleichungen $v_1 = u_1$ $v_2 = u_2 \,..$ bestehen. Da allgemein $A = A'\,A''$ so kann man die symbolische Gleichung $(G)$ durch die folgende ersetzen:

$$(G') \quad \begin{aligned} &A'\,(u_1\, u_2 \,..\, u_q)\, A''\,(u_{q+1}\, u_{q+2} \,..\, u_m) \\ &= A'\,(v_1\, v_2 \,..\, v_q)\, A''\,(v_{q+1}\, v_{q+2} \,..\, v_m) \end{aligned}$$

und hieraus folgt:

$$(H) \quad \begin{aligned} &[A'\,(v_1\, v_2 \,..\, v_q)]^{-1}\, A'\,(u_1\, u_2 \,..\, u_q)\, A''\,(u_{q+1}\, u_{q+2} \,..\, u_m) \\ &\qquad [A''\,(v_{q+1}\, v_{q+2} \,..\, v_m)]^{-1} = 1 \end{aligned}$$

wo in üblicher Weise die identische Substitution mit 1 bezeichnet ist.

Wegen des Gruppencharakters der Substitutionen $A'$ und $A''$ kann man Funktionen $w_1\, w_2 \,..\, w_q$ von $u_1\, u_2 \,..\, u_q$ und $v_1\, v_2 \,..\, v_q$ und Funktionen $w_{q+1}\, w_{q+2} \,..\, w_m$ von $u_{q+1}$ $u_{q+2} \,..\, u_m$ und $v_{q+1}\, v_{q+2} \,..\, v_m$ derart bestimmen, dass

$$(J) \quad [A'\,(v_1\, v_2 \,..\, v_q)]^{-1}\, A'\,(u_1\, u_2 \,..\, u_q) = A'\,(w_1\, w_2 \,..\, w_q)$$

$$\text{und} \quad \begin{aligned} &A''\,(u_{q+1}\, u_{q+2} \,..\, u_m)\,[A''\,(v_{q+1}\, v_{q+2} \,..\, v_m)]^{-1} \\ &= A''\,(w_{q+1}\, w_{q+2} \,..\, w_m) \end{aligned}$$

Nach unserer zweiten Voraussetzung hängen diese Funktionen $w$ rational von ihren Argumenten ab.

Setzen wir sodann für beliebige positive und negative Exponenten $h$

$$(K) \qquad \begin{aligned} [A'(w_1\, w_2\, .\,.\, w_q)]^h &= A'(w_1^{(h)}\, w_2^{(h)}\, .\,.\, w_q^{(h)}) \\ [A''(w_{q+1}\, w_{q+2}\, .\,.\, w_m)]^h &= A''(w_{q+1}^{(h)}\, w_{q+2}^{(h)}\, .\,.\, w_m^{(h)}) \end{aligned}$$

so sind auch die Grössen $w_1^{(h)}\, w_2^{(h)}\, .\,.\, w_q^{(h)}$ rationale Funktionen von $u_1\, u_2\, .\,.\, u_q$ und $v_1\, v_2 .\,.\, v_q$ und die Grössen $w_{q+1}^{(h)}\, w_{q+2}^{(h)}\, .\,.\, w_m^{(h)}$ rationale Funktionen von $u_{q+1}\, u_{q+2}\, .\,.\, u_m$ und $v_{q+1}\, v_{q+2}\, .\,.\, v_m$.

Die Substitution

$$A''(w_{q+1}\, w_{q+2}\, .\,.\, w_m)$$

ist von der identischen Substitution verschieden.

Denn andernfalls wäre

$$A''(u_{q+1}\, u_{q+2}\, .\,.\, u_m) = A''(v_{q+1}\, v_{q+2}\, .\,.\, v_m)$$

und nach unserer zweiten Voraussetzung folgt hieraus $v_{q+1} = u_{q+1}$ $v_{q+2} = u_{q+2}\, .\,.\; v_m = u_m$.

Wegen $(G')$ wäre nun auch

$$A'(u_1\, u_2\, .\,.\, u_q) = A'(v_1\, v_2\, .\,.\, v_q)$$

also auf Grund der zweiten Voraussetzung auch

$$v_1 = u_1 \quad v_2 = u_2\, .\,.\; v_q = u_q$$

im Widerspruch mit der Annahme, von der wir ausgegangen sind.

Aus unserer dritten Voraussetzung ergibt sich nunmehr, dass die Werthsysteme

$$w_{q+1}^{(h)}\, w_{q+2}^{(h)}\, .\,.\, w_m^{(h)}$$

alle untereinander verschieden sind.

Nun folgt aus $(H)$ bei Berücksichtigung von $(J)$ und $(K)$

$$A'(w_1\, w_2\, .\,.\, w_q)\; A''(w_{q+1}\, w_{q+2}\, .\,.\, w_m) = 1$$

$$\begin{aligned} &[A'(w_1\, w_2\, .\,.\, w_q)^h\, [A''(w_{q+1}\, w_{q+2}\, .\,.\, w_m)]^h \\ &= A'(w_1^{(h)}\, w_2^{(h)}\, .\,.\, w_q^{(h)})\; A''(w_{q+1}^{(h)}\, w_{q+2}^{(h)}\, .\,.\, w_m^{(h)}) \\ &= A(w_1^{(h)}\, w_2^{(h)}\, .\,.\, w_m^{(h)}) = 1 \end{aligned}$$

für beliebige positive und negative Exponenten $h$.

Es entsprechen also der identischen Substitution unendlich viele verschiedene Werthsysteme der Parameter und hieraus schliesst man leicht, dass einem jeden System der Substitutionscoefficienten $a_{\lambda\mu}$ unendlich viele Werthsysteme der Parameter entsprechen.

Damit ist bewiesen, dass die Annahme, die Parameter seien **nicht** rationale Funktionen der Substitutionscoefficienten zu einem Widerspruch führt.

Durch ganz analoge Betrachtungen beweist man:

Unter den Potenzen der Substitution

$$A(u_1 u_2 . \, u_m) = A'(u_1 u_2 \, . \, . \, u_q) \, A''(u_{q+1} \, u_{q+2} \, . \, . \, u_m)$$

kann nur dann die identische Substitution auftreten, wenn sich die Substitution

$$A''(u_{q+1} \, u_{q+2} \, . \, . \, u_m)$$

auf die identische Substitution reducirt.

## V.

Der Theil des Beweises, der sich auf Gruppen der ersten Classe bezieht, bietet nun keine Schwierigkeit mehr.

Ich nehme zunächst an, es sei nur **eine** reguläre inf. Transformation erster Art $C(f)$ vorgelegt. Die zu dieser inf. Transformation gehörige eingliedrige Gruppe $B(u)$ ist in meiner früheren Abhandlung (S. 122) in expliciter Form dargestellt werden. Aus den daselbst gegebenen Formeln ergibt sich

1. Der Parameter $u$ lässt sich rational durch die Coefficienten $b_{\lambda\mu}$ der allgemeinen Substitution der Gruppe $B$ darstellen.

Ferner: Setzt man zwei Substitutionen der Gruppe $B(u)$ und $B(v)$ zusammen, so ergibt sich

$$B(u) \, B(v) = \mathrm{B}(u+v)$$

Es ist somit

$$[B(u)]^h = B(h\,u)$$

Die identische Substitution entspricht dem Parameterwerth $u = 0$. Daraus folgt

2. In der Reihe der Potenzen der Substitution $B(u)$ kann die identische Substitution nur dann auftreten, wenn $u = 0$, also schon die Substitution $B(u)$ selbst die identische Substitution ist.

Es sei nun eine $m$-gliedrige Gruppe der ersten Classe vorgelegt.

$$C_1(f)\ \ C_2(f)\ldots C_m(f)$$

seien untereinander linear unabhängig, im Uebrigen aber beliebige inf. Transformationen derselben. Sie sind alle regulär von der ersten Art, weil die Gruppe nach ihrer Definition keine anderen inf. Transformationen enthält.

Zwischen diesen $m$ inf. Transformationen bestehen Relationen der Form

$$C_i\,C_k(f) - C_k\,C_i(f) = \sum_{j=1}^{m} \varepsilon_j^{ik}\,C_j(f) \qquad i, k = 1, 2, \ldots m$$

Ich behaupte, die charakteristische Determinante

$$\left|\, \varepsilon_j^{ik} - \binom{k}{j} r \,\right| \qquad k, j = 1, 2, \ldots m$$

kann für keinen von Null verschiedenen Werth von $r$ verschwinden.

Nehmen wir nämlich an, diese Determinante verschwinde für den von Null verschiedenen Werth $r = \omega$, dann kann man eine lineare Combination $K(f)$ der inf. Transformationen $C_1(f)\ C_2(f)\ldots C_m(f)$ derart bestimmen, dass

$$C_i\,K(f) - K\,C_i(f) = \omega\,C_i(f)$$

Aber dies ist nach dem ersten Hülfssatz des Art. II unmöglich, weil $C_i(f)$ regulär von der ersten Art ist.

Daraus folgt, dass die Gruppen erster Classe zu denjenigen Gruppen gehören, die H. Killing als Gruppen vom Rang Null bezeichnet hat.

Für diese Gruppen gilt der Satz:[1])

Man kann die inf. Transformationen $C_i(f)$ so wählen, dass sie den Relationen

$$(J) \quad C_i\, C_k\,(f) - C_k\, C_i\,(f) = \sum_{j=1}^{k-1} \varepsilon_j^{ik}\, C_j(f)$$
$$(k = 1, 2, \ldots i - 1;\ \ i = 2, 3, \ldots m)$$

genügen.

Das charakteristische an den Relationen $(J)$ ist: sie haben zur Folge, dass die $i$ inf. Transformationen

$$C_1(f)\ C_2(f) \ldots C_i(f)$$

für sich eine $i$-gliedrige Gruppe bestimmen, und zwar gilt dies für $i = 1, 2, \ldots m$.

Ein System von $m$ unter einander linear unabhängigen Transformationen, das den Relationen $(J)$ genügt, bezeichne ich als kanonisches System.

Um nun die $m$-gliedrige Gruppe $A$ zu bestimmen, die von den $m$ inf. Transformationen $C_i(f)$ erzeugt ist, bestimmen wir zunächst die zu einer jeden inf. Transformation $C_i(f)$ gehörige eingliedrige Gruppe $B_i(u_i)$ und setzen dann diese $m$ eingliedrigen Gruppen zu der $m$-gliedrigen Gruppe

$$A\,(u_1\, u_2 \ldots u_m) = B_1\,(u_1)\, B_2\,(u_2) \ldots B_m\,(u_m)$$

zusammen. Da die inf. Transformationen

$$C_1(f)\ C_2(f) \ldots C_{m-1}(f)$$

für sich eine Gruppe bestimmen, so setzen sich die $m-1$ eingliedrigen Gruppen

$$B_1\,(u_1)\, B_2\,(u_2) \ldots B_{m-1}\,(u_{m-1})$$

1) Dissertation von Umlauf: Ueber die Zusammensetzung der Gruppen vom Rang Null. Leipzig 1891. Vergl. auch Engel, Leipziger Berichte 1887 S. 95.

zu einer $m-1$-gliedrigen Gruppe

$$A'(u_1 u_2 \,.\,.\, u_{m-1}) = B_1(u_1) B_2(u_2) \,.\,.\, B_{m-1}(u_{m-1})$$

zusammen und $A(u_1 u_2 \,.\,.\, u_m)$ entsteht durch Zusammensetzung von $A'(u_1 u_2 \,.\,.\, u_{m-1})$ und $B_m(u_m)$.

Um zu beweisen, dass sich die Parameter rational durch die Coefficienten der allgemeinen Substitution der Gruppe darstellen lassen, nehmen wir an, die Behauptung gelte für Gruppen, deren Gliederzahl kleiner als $m$ ist, und beweisen, dass sie dann auch für $m$-gliedrige gilt. Da sie für eingliedrige Gruppen gilt, gilt sie dann allgemein.

Für die Gruppe $A'$ gelten auf Grund unserer Annahme die Voraussetzungen, die im vorigen Artikel bezüglich der dort mit $A'$ bezeichneten Gruppe gemacht worden sind; für die eingliedrige Gruppe gelten die im vorigen Artikel bezüglich der Gruppe $A''$ gemachten Voraussetzungen. Somit ergibt sich der Beweis unserer Behauptung aus den Betrachtungen des vorigen Artikels.

Die Gruppen erster Classe haben die bemerkenswerthe Eigenschaft, dass unter den Potenzen einer Substitution $A(u_1 u_2 \,.\,.\, u_m)$, die der Gruppe angehört, nur dann die identische Substitution auftreten kann, wenn sich die Substitution $A(u_1 u_2 \,.\,.\, u_m)$ selbst auf die identische Substitution reducirt. Der Beweis ergiebt sich aus der Schlussbemerkung des vorigen Art. Darnach muss nämlich, damit unter den Potenzen der Substitution

$$A(u_1 u_2 \,.\,.\, u_m) = A'(u_1 u_2 \,.\,.\, u_{m-1}) B_m(u_m)$$

die identische Substitution vorkommt, $B_m(u_m)$ die identische Substitution sein, woraus $u_m = 0$ folgt. Man schliesst dann in derselben Weise weiter, dass sich jede der Substitutionen $B_{m-1}(u_{m-1}) B_{m-2}(u_{m-2}) \,.\,.\, B_1(u_1)$ auf die identische Substitution reducirt, dass also $u_1 = u_2 = u_3 \,.\,.\, = u_m = 0$ ist.

Aus der Definition der Gruppen erster Classe hat sich ergeben: man kann $m$ untereinander linear unabhängige inf. Transformationen der Gruppe so wählen, dass 1) jede derselben regulär von der ersten Art ist, und dass 2) die Zusammensetzung der Gruppe durch Gleichungen der Form ($J$) bestimmt ist.

Es ist nicht schwer zu beweisen, dass umgekehrt diese beiden Eigenschaften eine Gruppe erster Classe — d. h. eine Gruppe, die nur reguläre inf. Transformationen erster Art enthält — charakterisiren. Ich unterlasse diesen Nachweis, weil er für das Folgende nicht nothwendig ist, und beschränke mich auf die Bemerkung, dass die beiden eben angeführten Eigenschaften für den Beweis hinreichen, dass sich die Parameter rational durch die Coefficienten der allgemeinen Substitution der Gruppe darstellen lassen, und dass keine Potenz einer von der identischen verschiedenen Substitution der Gruppe, die identische Substitution ergeben kann. Es ergibt sich dies unmittelbar aus dem Gang des gegebenen Beweises.

Im Folgenden wenden wir die Bezeichnung „Gruppe erster Classe“ auf alle die Gruppen an, die die beiden eben genannten charakteristischen Eigenschaften besitzen.

## VI.

Wir gehen nunmehr zu den Gruppen der dritten Classe über, die reguläre inf. Transformationen sowohl von der ersten als von der zweiten Art enthalten.

Es sei $C_1(f)$ eine beliebige in der Gruppe enthaltene reguläre inf. Transformation zweiter Art.

Unter den in der Gruppe enthaltenen inf. Transformationen $K(f)$, die mit $C_1(f)$ vertauschbar sind, d. h. der Relation $C_1 K(f) - K C_1(f) = 0$ genügen, wählen wir, — wenn es solche gibt — eine reguläre Transformation zweiter Art aus und bezeichnen sie mit $C_2(f)$. Gibt es weitere reguläre Transformationen zweiter Art, die mit $C_1(f)$ und

$C_2(f)$ vertauschbar und von diesen linear unabhängig sind, so bezeichnen wir eine derselben mit $C_3(f)$ u. s. w.

Nehmen wir an, es finden sich genau $m_0$ reguläre Transformationen zweiter Art

$$C_1(f)\ C_2(f)\ldots C_{m_0}(f)$$

die untereinander linear unabhängig und paarweise vertauschbar sind. Diese bestimmen eine $m_0$-gliedrige Gruppe $A_0$, die der zweiten Classe angehört.[1]) Daran wird selbstredend nichts geändert, wenn wir an Stelle der inf. Transformationen

$$C_1(f)\ C_2(f)\ldots C_{m_0}(f)$$

lineare Combinationen derselben treten lassen. Wir können desshalb voraussetzen, diese $m_0$ inf. Transformationen seien so gewählt, dass sie ein kanonisches System für die Gruppe $A_0$ bilden (Art. III).

Mit $$C_{m_0+1}(f)\ C_{m_0+2}(f)\ldots C_m(f)$$

bezeichnen wir irgend welche untereinander und von $C_1(f)$ $C_2(f)\ldots C_{m_0}(f)$ linear unabhängige inf. Transformationen der vorgelegten $m$-gliedrigen Gruppe $A$.

Die $m$ inf. Transformationen $C_i(f)$ genügen Relationen der Form

$$(J)\quad C_i\,C_k(f) - C_k\,C_i(f) = \sum_{j=1}^{m} \varepsilon_j^{ik}\,C_j(f) \qquad i,k = 1,2,\ldots m$$

Aus der Art, wie die $m_0$ ersten inf. Transformationen gewählt worden sind, folgt, dass

$$\varepsilon_j^{ik} = 0 \quad \text{für } i,k = 1,2,\ldots m_0 \text{ und } j = 1,2,\ldots m$$

Zwischen drei inf. Transformationen besteht die Jacobi'sche Identität[2])

1) Diese Zahl $m_0$ stimmt mit der Zahl überein, die H. Killing als Rang der Gruppe bezeichnet. Math. Annalen Bd. 33.

5) Lie, Transformationsgruppen I S. 94.

$$C_h (C_i C_k - C_k C_i) - (C_i C_k - C_k C_i) C_h + C_i (C_k C_h - C_h C_k)$$
$$- (C_k C_h - C_h C_k) C_i + C_k (C_h C_i - C_i C_h) - (C_h C_i - C_i C_h) C_k = 0$$

Sind $i$ und $k$ Zahlen aus der Reihe $1, 2, .. m_0$, so ist $C_i C_k - C_k C_i = 0$ und es folgt mit Rücksicht auf $(J)$

$$\sum_{j=1}^{m} \varepsilon_j^{kh} (C_i C_j - C\ C_i) + \sum_{j=1}^{m} \varepsilon_j^{hi} (C_k C_j - C_j C_k) = 0$$

und hieraus weiter

$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{l=1}^{m} (\varepsilon_j^{kh} \varepsilon_l^{ij} + \varepsilon_j^{hi} \varepsilon_l^{kj}) C_l = 0$$

Die $m$ inf. Transformationen $C_l(f)$ sind untereinander linear unabhängig, ferner ist $\varepsilon_j^{hi} = - \varepsilon_j^{ih}$ folglich ist

$$\sum_{j=1}^{m} (\varepsilon_j^{ih} \varepsilon_l^{kj} - \varepsilon_j^{kh} \varepsilon_l^{ij}) = 0 \qquad \begin{array}{l} i, k = 1, 2, .. m_0 \\ h, l = 1, 2, .. m \end{array}$$

Repräsentiren wir das System der $m^2$ Constanten $\varepsilon_j^{hi}$ $(h, j = 1, 2, .. m)$ durch das Symbol $E_i$, so lassen sich die vorstehenden Gleichungen durch die symbolischen Gleichungen

$$E_i E_k - E_k E_i = 0 \qquad i, k = 1, 2, .. m_0$$

repräsentiren. Die zu einem der $m_0$ Systeme $E_i$ gehörige charakteristische Determinante kann nur Elementartheiler erster Ordnung besitzen. Denn andernfalls könnte man zwei nicht identisch verschwindende inf. Transformationen der Gruppe $K(f)$ und $K'(f)$ so bestimmen, dass

$$C_i K(f) - K C_i(f) = \omega K(f)$$
$$C_i K'(f) - K' C_i(f) = \omega K'(f) + K(f)$$

Aber dies ist wegen des dritten Hülfssatzes des Art. II nicht möglich.

Demnach genügen die $m_0$ Systeme $E_i$ den Voraussetzungen, auf denen der vierte Hülfssatz des Art. II beruht. Man kann also ein System von $m^2$ Constanten $\gamma_k^{(h)}$ mit nicht verschwindender Determinante so bestimmen, dass

$$\sum_{k=1}^{m} \varepsilon_j^{ik} \gamma_k^{(h)} = \omega_h^{(i)} \gamma_j^{(h)} \qquad \begin{array}{r} i = 1, 2, \ldots m_0 \\ h, j = 1, 2, \ldots m. \end{array}$$

Von den Gleichungen $(J)$ benützen wir nun diejenigen, die einem der Indiceswerthe $i = 1, 2, \ldots m_0$ entsprechen, und setzen zur Abkürzung

$$\sum_{j=1}^{m} \gamma_j^{(h)} C_j(f) = K_h(f) \qquad h = 1, 2, \ldots m$$

Es ergibt sich

$$(\Omega) \quad C_i K_h(f) - K_h C_i(f) = \omega_h^{(i)} K_h(f) \qquad \begin{array}{r} i = 1, 2, \ldots m_0 \\ h = 1, 2, \ldots m \end{array}$$

Weil $\varepsilon_j^{ik} = 0$ für $i, k = 1, 2, \ldots m_0$; $j = 1, 2, \ldots m$, so kann man die Grössen $\gamma_k^{(h)}$ so wählen, dass

$$\gamma_k^{(i)} = \binom{k}{i} \text{ für } i = 1, 2, \ldots m_0; \; k = 1, 2, \ldots m$$

Es ist dann $K_i(f) = C_i(f)$ für $i = 1, 2, \ldots m_0$ und $\omega_h^{(i)} = 0$ für $h, i = 1, 2, \ldots m_0$.

In dem aus $m_0$ Zeilen und $m$ Spalten bestehenden System

$$\begin{array}{cccc} \omega_1^{(1)} & \omega_2^{(1)} & \ldots & \omega_m^{(1)} \\ \omega_1^{(2)} & \omega_2^{(2)} & \ldots & \omega_m^{(2)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \omega_1^{(m_0)} & \omega_2^{(m_0)} & \ldots & \omega_m^{(m_0)} \end{array}$$

haben also alle Elemente, die den ersten $m_0$ Spalten angehören, den Werth Null.

Es kann der Fall eintreten, dass noch weitere Spalten dieses Systems kein von Null verschiedenes Element enthalten. Es seien dies etwa die auf die ersten $m_0$ Spalten folgenden $m_0'$ Spalten, dagegen möge in jeder weiteren Spalte wenigstens ein von Null verschiedenes Element vorkommen.

Jede inf. Transformation, deren Index $h > m_0 + m_0'$ ist, genügt somit einer Relation

$$C_i K_h(f) - K_h C_i(f) = \omega_h^{(i)} K_h(f) \qquad (i \leq m_0)$$

wo $\omega_h^{(i)}$ von Null verschieden ist. Daraus folgt: jede inf. Transformation $K_h(f)$ $(h > m_0 + m_0')$ ist regulär von der ersten Art (Art. II Hülfssatz 2) und es folgt überdies: die Grössen $\omega_h^{(i)}$ sind ganze Zahlen. Denn $\omega_h^{(i)}$ muss gleich der Differenz von zweien der Werthe $r$ sein, für welche die zu $C_i(f)$ gehörige charakteristische Determinante $\Delta_i(r)$ verschwindet (Art II Anfang). Diese Determinante verschwindet aber nur für ganzzahlige Werthe von $r$, weil $C_i(f)$ regulär von der zweiten Art ist.

Bezüglich $m - m_0'$ von den inf. Transformationen

$$K_1(f)\ K_2(f) \ldots K_m(f)$$

steht nunmehr fest, dass sie regulär sind, nämlich von den $m_0$ ersten und von dem $m - m_0 - m_0'$ letzten. Die ersteren sind von der zweiten, die letzteren von der ersten Art. Es bleiben nur noch die $m_0'$ inf. Transformationen übrig, die den Indices $m_0 + 1, m_0 + 2, \ldots m_0 + m_0'$ entsprechen. Diese bedürfen einer besonderen Untersuchung, die im nächsten Art. durchgeführt wird.

Auf Grund der Formeln $(\Omega)$ kann nun die vorgelegte Gruppe in bemerkenswerther Weise in Untergruppen zerfällt werden. Zu diesem Zweck bilden wir zunächst — unter $\alpha_1\ \alpha_2 \ldots \alpha_{m_0}$ ganze Zahlen verstehend — eine lineare Combination der inf. Transformationen zweiter Art

$$L(f) = \alpha_1 K_1(f) + \alpha_2 K_2(f) \ldots + \alpha_{m_0} K_{m_0}(f)$$

Aus den Gleichungen $(\Omega)$ folgt

$$L K_h(f) - K_h L(f) = \varrho_h K_h(f) \qquad h = 1, 2, \ldots m$$

wo zur Abkürzung

$$\alpha_1 \omega_h^{(1)} + \alpha_2 \omega_h^{(2)} \ldots + \alpha_{m_0} \omega_h^{(m_0)} = \varrho_h$$

gesetzt ist.

Die zur Verfügung stehenden Zahlen $\alpha$ denken wir so gewählt, dass

1) $\varrho_h$ nur dann $= 0$ ist, wenn gleichzeitig

$$\omega_h^{(1)} = 0 \;\; \omega_h^{(2)} = 0 \, . \, . \;\; \omega_h^{(m_0)} = 0$$

also wenn $h \leq m_0 + m_0'$, und dass

2) zwei verschiedene Zahlen $\varrho_h$ und $\varrho_i$ nur dann einander gleich sind, wenn gleichzeitig

$$\omega_h^{(1)} = \omega_i^{(1)} \;\; \omega_h^{(2)} = \omega_i^{(2)} \, . \, . \;\; \omega_h^{(m_0)} = \omega_i^{(m_0)}$$

Die Indicesbezeichnung denken wir uns so gewählt, dass in der Reihe der Zahlen

$$\varrho_{m_0+m_0'+1} \quad \varrho_{m_0+m_0'+2} \cdots \varrho_m$$

die positiven den negativen und, unter Zahlen gleichen Vorzeichens, die dem absoluten Werthe nach grösseren den kleineren vorangehen. $m_+$ sei die Anzahl der positiven, $m_-$ die Anzahl der negativen $\varrho$.

Bilden wir nun die Jacobi'sche Relation für die inf. Transformationen $K_h(f)$ $K_j(f)$ $L(f)$. Sie lautet:

$$L(K_h K_j - K_j K_h) - (K_h K_j - K_j K_h) L + K_h (K_j L - L K_j)$$
$$- (K_j L - L K_j) K_h + K_j (L K_h - K_h L)$$
$$- (L K_h - K_h L) K_j = 0.$$

Die 4 letzten Glieder ergeben

$$-(\varrho_j + \varrho_h)(K_h K_j - K_j K_h)$$

Sei nun $K_h K_j - K_j K_h = \delta_1 K_1 + \delta_2 K_2 \, . \, . + \delta_m K_m$ wo $\delta_1 \delta_2 \, . \, . \, \delta_m$ Constante bedeuten, die in leicht zu übersehender Weise von den Constanten $\varepsilon_j^{ik}$, die in den Gleichungen $(J)$ vorkommen, abhängen.

Nun erhält die Jacobi'sche Relation die Form

$$\sum_{i=1}^{m} \delta_i (L K_i - K_i L) - (\varrho_j + \varrho_h) \sum_{i=1}^{m} \delta_i K_i = 0$$

oder auch

$$\sum_{i=1}^{m} (\varrho_i - \varrho_j - \varrho_h) \, \delta_i K_i = 0$$

Weil die inf. Transformationen $K_i$ untereinander linear unabhängig sind, so folgt hieraus

$$\delta_i = 0, \text{ wenn nicht } \varrho_i = \varrho_j + \varrho_h \text{ ist.}$$

Nehmen wir zunächst an, $j$ und $h$ seien Zahlen aus der Reihe $1, 2, \ldots m_0 + m_0'$. Dann ist $\varrho_j = 0$ $\varrho_h = 0$ also $\delta_i = 0$ wenn nicht auch $\varrho_i = 0$.

In dem Ausdruck $K_h K_j - K_j K_h$ kommen in diesem Fall nur die inf. Transformationen

$$K_1(f)\ K_2(f) \ldots K_{m_0+m_0'}(f)$$

vor. Diese $m_0 + m_0'$ inf. Transformationen bestimmen also für sich eine Gruppe $\Gamma$, die die $m_0$-gliedrige Gruppe $A_0$ als Untergruppe enthält.

Nehmen wir zweitens an, $j$ und $h$ seien Zahlen aus der Reihe $m_0 + m_0' + 1, m_0 + m_0' + 2, \ldots m_0 + m_0' + m_+$, dann sind $\varrho_j$ und $\varrho_h$ positiv, also ist $\delta_i = 0$, wenn nicht auch $\varrho_i$ positiv ist. Da ferner die positiven $\varrho$ nach absteigender Grösse geordnet sind, so kann die Gleichung $\varrho_i = \varrho_j + \varrho_h$ nur dann bestehen, also nur dann $\delta_i$ von Null verschieden sein, wenn der Index $i$ grösser als der grössere der beiden Indices $j$, $h$ ist. In dem Ausdruck $K_h K_j - K_j K_h$ kommen also nur solche inf. Transformationen $K_i$ vor, die positiven Werthen $\varrho_i$ entsprechen und deren Index grösser als der grössere der beiden Indices $j$, $h$ ist. Demnach bestimmen die $m_+$ inf. Transformationen, die zu positiven Werthen $\varrho$ gehören, für sich eine Gruppe erster Classe $A_+$ (vergl. Art. V Schluss) und sie bilden ein kanonisches System inf. Transformationen derselben.

Ebenso bestimmen die $m_-$ inf. Transformationen, die zu negativen Werthen von $\varrho$ gehören, für sich eine Gruppe $A_-$ und bilden für dieselbe ein kanonisches System.

Nehmen wir endlich drittens für $h$ eine Zahl aus der Reihe $1, 2, \ldots m_0 + m_0'$, für $j$ eine Zahl aus der Reihe

$m_0 + m_0' + 1$, $m_0 + m_0' + 2, \ldots m_0 + m_0' + m_+$, so ist $\varrho_h = 0$ $\varrho_j$ positiv und aus $\varrho_i = \varrho_h + \varrho_j$ folgt $\varrho_i = \varrho_j$ also auch $\varrho_i$ positiv.

Man schliesst hieraus: die inf. Transformationen, die zu verschwindenden, und diejenigen, die zu positiven Werthen $\varrho$ gehören, bestimmen zusammengenommen eine Gruppe. Mit anderen Worten: die $m_0 + m_0'$-gliedrige Gruppe $\Gamma$ und die $m_+$-gliedrige Gruppe $A_+$ setzen sich zu einer Gruppe $H$ zusammen, deren Gliederzahl $m_0 + m_0' + m_+ = m - m_-$ ist.

## VII.

Die Untergruppe $\Gamma$ bedarf einer eingehenderen Untersuchung.

Von den zu dieser Untergruppe gehörigen inf. Transformationen

$$K_i(f) = \sum_{\lambda=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{n} k_{\lambda\mu}^{(i)} \frac{\partial f}{\partial x_\lambda} x_\mu \qquad i = 1, 2, \ldots m_0 + m_0'$$

wissen wir:

1) Die ersten $m_0$ derselben

$$K_1(f) \;\; K_2(f) \ldots K_{m_0}(f)$$

sind regulär von der zweiten Art und sie bestimmen für sich eine Untergruppe $A_0$.

2) Diese $m_0$ inf. Transformationen sind mit allen inf. Transformationen der Untergruppe $\Gamma$ vertauschbar, es ist also

$$K_i K_h(f) - K_h K_i(f) = 0$$

$$\text{für} \quad i = 1, 2, \ldots m_0; \quad h = 1, 2, \ldots m_0 + m_0'.$$

In nicht symbolischer Form geschrieben heisst das:

$$\sum_{\nu=1}^{n} \left(k_{\lambda\nu}^{(i)} k_{\nu\mu}^{(h)} - k_{\lambda\nu}^{(h)} k_{\nu\mu}^{(i)}\right) = 0$$

für $\lambda, \mu = 1, 2, \ldots n$ und die eben angegebenen Werthe der Indices $i, h$.

Da die $m_0 + m_0'$ inf. Transformationen eine Gruppe bestimmen, so bestehen weitere Relationen der Form

$$3)\quad \sum_{\nu=1}^{n}\left(k_{\lambda\nu}^{(h)}\,k_{\nu\mu}^{(l)} - k_{\lambda\nu}^{(l)}\,k_{\nu\mu}^{(h)}\right) = \sum_{j=1}^{m_0+m_0'} \delta_j^{lh}\,k_{\lambda\mu}^{(j)}$$

$$\lambda, \mu = 1, 2, \ldots n;\ \ h, l = m_0 + 1,\ m_0 + 2, \ldots m_0 + m_0'.$$

Wir werden nun beweisen: die $m_0'$ inf. Transformationen $K_{m_0+1}(f)\ K_{m_0+2}(f) \ldots K_{m_0+m_0'}(f)$ können so gewählt werden, dass sie für sich eine $m_0'$-gliedrige Gruppe $A_0'$ bestimmen, die der ersten Classe angehört. Ist dies erwiesen, so ist klar, dass die genannten inf. Transformationen so gewählt werden können, dass sie ein kanonisches System bilden.

Zum Beweise bemerken wir zunächst:

Die Coefficienten der $m_0$ inf. Transformationen

$$K_1(f)\ K_2(f) \ldots K_{m_0}(f)$$

genügen den Voraussetzungen des vierten Hülfssatzes des Art. II. Man kann also ein System von $n^2$ Grössen $d_\lambda^{(\sigma)}$ mit nicht verschwindender Determinante derart bestimmen, dass

$$\sum_{\mu=1}^{n} k_{\lambda\mu}^{(i)}\,d_\mu^{(\sigma)} = r_\sigma^{(i)}\,d_\lambda^{(\sigma)} \qquad \lambda = 1, 2, \ldots n;\ i = 1, 2, \ldots m_0$$

Wir führen nun neue Variable durch die Substitution

$$(S)\quad x_\lambda = \sum_{\sigma=1}^{n} d_\lambda^{(\sigma)}\,y_\sigma \qquad \lambda = 1, 2, \ldots n$$

ein, wodurch die inf. Transformation $K_h(f)$ in

$$\overline{K}_h(f) = \sum_{\lambda=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{n} \overline{k}_{\lambda\mu}^{(h)}\,\frac{\partial f}{\partial y_\lambda}\,y_\mu$$

übergehen möge. Auf Grund des Weierstrass'schen Theorems stimmen die zu $K_h(f)$ und $\overline{K}_h(f)$ gehörigen charakteristischen Determinanten in ihren Elementartheilern überein. Diese beiden inf. Transformationen sind also gleichzeitig regulär oder irregulär. Es ist ferner klar, dass zwischen den inf. Transformationen $\bar{K}_h(f)$ genau dieselben Relationen (2) und (3) bestehen, wie zwischen den inf. Transformationen $K_h(f)$.

Nun ist für $i = 1, 2, \ldots m_0$

$$\sum_{\lambda=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{n} k_{\lambda\mu}^{(i)} \frac{\partial f}{\partial x_\lambda} x_\mu = \sum_{\lambda=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\sigma=1}^{n} k_{\lambda\mu}^{(i)} d_\mu^{(\sigma)} \frac{\partial f}{\partial x_\lambda} y_\sigma = \sum_{\sigma=1}^{n} r_\sigma^{(i)} \frac{\partial f}{\partial y_\sigma} y_\sigma$$

$$\text{also } \bar{k}_{\lambda\mu}^{(i)} = \binom{\lambda}{\mu} r_\lambda^{(i)}$$

und aus (2)

$$\sum_{\nu=1}^{n}\left(\bar{k}_{\lambda\nu}^{(i)}\bar{k}_{\nu\mu}^{(h)} - \bar{k}_{\lambda\nu}^{(h)}\bar{k}_{\nu\mu}^{(i)}\right) = 0 \qquad \begin{array}{l} i = 1, 2, \ldots m_0 \\ h = m_0 + 1, m_0 + 2 \ldots m_0 + m_0' \end{array}$$

folgt: $\bar{k}_{\lambda\mu}^{(h)} = 0$ wenn nicht $r_\lambda^{(i)} = r_\mu^{(i)}$ für $i = 1, 2, \ldots m_0$.

Ist also etwa

$$r_1^{(i)} = r_2^{(i)} \ldots = r_\varkappa^{(i)} \quad \text{für } i = 1, 2, \ldots m_0$$

aber für keinen Index $\nu > \varkappa$ gleichzeitig

$$r_\nu^{(i)} = r_1^{(i)} \qquad \text{für } i = 1, 2, \ldots m_0$$

so hängen die Coefficienten der Differentialquotienten $\frac{\partial f}{\partial y_1}$ $\frac{\partial f}{\partial y_2} \ldots \frac{\partial f}{\partial y_\varkappa}$ in $\bar{K}_h(f)$ nur von $y_1\, y_2 \ldots y_\varkappa$ ab, und diese Variabeln kommen in den Coefficienten der übrigen Differentialquotienten nicht vor.

Die Variabeln $y_1\, y_2 \ldots y_\varkappa$ lassen sich also derart in eine Reihe von Systemen vertheilen, dass die Coefficienten der Differentialquotienten nach den Variabeln eines Systems nur von den Variabeln dieses Systems abhängen. Die Anzahl dieser Systeme sei $q$ und die Anzahl der Variabeln, die dem $\sigma^{\text{ten}}$ System angehören, sei $n_\sigma$. Dieselben mögen — unter Abänderung der bisher gebrauchten Bezeichnung — mit

$$y_1^{(\sigma)}\; y_2^{(\sigma)} \ldots y_{n_\sigma}^{(\sigma)}$$

bezeichnet werden.

Es ergeben sich nun für unsere $m_0 + m_0'$ inf. Transformationen Ausdrücke folgender Gestalt:

$$\bar{K}_i(f) = \sum_{\sigma=1}^{q} \sum_{\lambda=1}^{n_\sigma} R_\sigma^{(i)} y_\lambda^{(\sigma)} \frac{\partial f}{\partial y_\lambda^{(\sigma)}} \qquad i = 1, 2, .. m_0$$

$$\bar{K}_h(f) = \sum_{\sigma=1}^{q} \sum_{\lambda=1}^{n_\sigma} \sum_{\mu=1}^{n_\sigma} k_{\lambda\mu}^{(h\sigma)} \frac{\partial f}{\partial y_\lambda^{(\sigma)}} y_\mu^{(\sigma)}$$

$$h = m_0 + 1,\ m_0 + 2 .. m_0 + m_0'$$

Wir beweisen nun zunächst: die $m_0'$ inf. Transformationen $\bar{K}_{m_0+1}(f)\ \bar{K}_{m_0+2}(f) .. \bar{K}_{m_0+m_0'}(f)$ können so gewählt werden, dass eine jede derselben regulär von der ersten Art ist.

Zu dem Zweck bemerken wir, dass unter den genannten Transformationen keine vorkommen kann, die regulär von der zweiten Art ist. Denn eine solche müsste von $\bar{K}_1(f)\ \bar{K}_2(f) .. \bar{K}_{m_0}(f)$ linear unabhängig und mit jeder dieser inf. Transformationen vertauschbar sein. Es gäbe also entgegen unserer Voraussetzung (Art. VI Anfang) in der Gruppe $A$ mehr als $m_0$ linear unabhängige inf. Transformationen zweiter Art, die paarweise vertauschbar sind. Eine jede der $m_0'$ Transformationen $\bar{K}_h(f)$ ist also entweder regulär von der ersten Art oder irregulär.

Nehmen wir an, die inf. Transformation $\bar{K}_h(f)$ sei irregulär. Man kann dann (s. Einleitung) eine reguläre Transformation erster Art $L(f)$ und eine gewisse Anzahl regulärer Transformationen zweiter Art $L_1(f)\ L_2(f) ..$ so bestimmen, dass

$$\bar{K}_h(f) = L(f) + \varrho_1 L_1(f) + \varrho_2 L_2(f) .. + \varrho_\beta L_\beta(f).$$

In den inf. Transformationen $L(f)\ L_1(f)\ L_2(f) ..$ sind — wie man sich leicht überzeugt[1]) — die Variabeln in genau derselben Weise getrennt, wie in $\bar{K}_h(f)$, und daraus

1) Vergl. die Inv. S. 123 gegebenen Formeln.

folgt, dass eine jede der inf. Transformationen $L(f)$ $L_1(f)$ $L_2(f)$ .. mit den inf. Transformationen $\overline{K}_1(f)$ $\overline{K}_2(f)$ .. $\overline{K}_{m_0}(f)$ vertauschbar ist. Weil unsere Gesammtgruppe $A$ regulär ist, so gehört ihr eine jede der regulären Transformationen an (s. Einleitung), in die die irreguläre Transformation $\overline{K}_h(f)$ zerlegt worden ist, und weil eine jede der regulären Transformationen zweiter Art $L_1(f)$ $L_2(f)$ .. mit $\overline{K}_1(f)$ $\overline{K}_2(f)$ .. $\overline{K}_{m_0}(f)$ vertauschbar ist, so kann keine der Transformationen $L_1(f)$ $L_2(f)$ .. von $\overline{K}_1(f)$ $\overline{K}_2(f)$ .. $\overline{K}_{m_0}(f)$ linear unabhängig sein. Denn sonst gehörten gegen unsere Voraussetzung der Gruppe $A$ mehr als $m_0$ untereinander linear unabhängige reguläre Transformationen zweiter Art an, die paarweise vertauschbar sind. Man kann nun offenbar die der Gruppe $\Gamma$ angehörige irreguläre Transformation $\overline{K}_h(f)$ durch die ebenfalls der Gruppe $\Gamma$ angehörige reguläre Transformation erster Art $L(f)$ ersetzen.

Nachdem die Zulässigkeit dieser Annahme bewiesen ist, setzen wir nunmehr jede der inf. Transformationen $\overline{K}_{m_0+1}(f)$ $\overline{K}_{m_0+2}(f)$ .. $\overline{K}_{m_0+m_0'}(f)$ als regulär von der ersten Art voraus.

Damit die inf. Transformation

$$\overline{K}_h(f) = \sum_{\sigma=1}^{q} \left( \sum_{\lambda=1}^{n_\sigma} \sum_{\mu=1}^{n_\sigma} k_{\lambda\mu}^{(h\sigma)} \frac{\partial f}{\partial y_\lambda^{(\sigma)}} y_\mu^{(\sigma)} \right)$$

regulär von der ersten Art ist, muss jedes der $q$ Coefficientensysteme $k_{\lambda\mu}^{(h\sigma)}$ $(\lambda, \mu = 1, 2, .. n_\sigma)$ regulär von der ersten Art sein. In der Entwicklung der charakteristischen Determinante

$$\left| k_{\lambda\mu}^{(h\sigma)} - \binom{\lambda}{\mu} r \right| \qquad \lambda, \mu = 1, 2, .. n_\sigma$$

nach Potenzen von $r$ verschwinden also die Coefficienten aller Potenzen von $r$, abgesehen von $r^{n_\sigma}$, und es ist insbesondere

$$\sum_{\lambda=1}^{n_\sigma} k_{\lambda\lambda}^{(h\sigma)} = 0 \qquad \sigma = 1, 2, .. q; \; h = m_0 + 1, \; m_0 + 2 .. \; m_0 + m_0'$$

Die unter (3) angegebenen Relationen

$$\sum_{\nu=1}^{n} \left(k_{\lambda\nu}^{(h)} k_{\nu\mu}^{(l)} - k_{\lambda\nu}^{(l)} k_{\nu\mu}^{(h)}\right) = \sum_{j=1}^{m_0+m_0'} \delta_j^{hl} k_{\lambda\mu}^{(j)}$$

$$\lambda, \mu = 1, 2, .. n; \; h, l = m_0 + 1, \; m_0 + 2, .. \; m_0 + m_0'$$

gelten, wie bereits oben bemerkt worden ist, unverändert für die Coefficienten der transformirten inf. Transformationen.

Es ist also

$$\sum_{\nu=1}^{n_\sigma} \left(k_{\lambda\nu}^{(h\sigma)} k_{\nu\mu}^{(l\sigma)} - k_{\lambda\nu}^{(l\sigma)} k_{\nu\mu}^{(h\sigma)}\right) = \sum_{j=1}^{m_0+m_0'} \delta_j^{hl} k_{\nu\mu}^{(j\sigma)}$$

$$\lambda, \mu = 1, 2, .. n_\sigma; \; \sigma = 1, 2, .. q; \; h, l = m_0 + 1, \; m_0 + 2, .. m_0 + m_0'$$

und hieraus folgen für $\lambda = \mu$, wegen

$$\sum_{\lambda=1}^{n_\sigma} k_{\lambda\lambda}^{(h\sigma)} = 0 \qquad \text{für } h = m_0 + 1, \; m_0 + 2, .. \; m_0 + m_0'$$

$$\text{und} \quad \sum_{\lambda=1}^{n_\sigma} k_{\lambda\lambda}^{(h\sigma)} = n_\sigma R_\sigma^{(h)} \qquad \text{für } h = 1, 2, .. \; m_0$$

die Gleichungen

$$\sum_{j=1}^{m_0} \delta_j^{hl} R_\sigma^{(j)} = 0 \qquad \sigma = 1, 2, .. q; \; h, l = m_0 + 1, m_0 + 2, .. m_0 + m_0'$$

Weil die inf. Transformationen

$$\overline{K}_1(f) \; \overline{K}_2(f) \, .. \, \overline{K}_{m_0}(f)$$

linear unabhängig sind, folgt hieraus

$$\delta_j^{hl} = 0 \;\; \text{für} \;\; h, l = m_0 + 1, \; m_0 + 2, .. \; m_0 + m_0'; \quad \text{und} \;\; j = 1, 2 \, .. \, m_0$$

In dem Ausdruck $\overline{K}_h \overline{K}_l(f) - \overline{K}_l \overline{K}_h(f)$ kommen demnach nur die inf. Transformationen

$$\overline{K}_{m_0+1}(f) \; \overline{K}_{m_0+2}(f) \, .. \, \overline{K}_{m_0+m_0'}(f)$$

vor. Diese $m_0'$ inf. Transformationen bestimmen demnach für sich eine Gruppe $A_0'$ und diese Gruppe gehört nothwendig der ersten Classe an. Denn die $m_0'$-gliedrige Gruppe $A_0'$ ist regulär, weil sie $m_0'$ linear unabhängige reguläre Transformationen enthält, und sie kann keine reguläre Transformation zweiter Art enthalten.

## VIII.

Damit ist auch für die regulären Gruppen der dritten Classe ein kanonisches System inf. Transformationen nachgewiesen. Die $m$ inf. Transformationen dieses Systems vertheilen sich auf vier Untergruppen $A_0\, A_0'\, A_+\, A_-$. Jede dieser Untergruppen ist regulär, und zwar gehört die erste $A_0$ der zweiten Classe an, die drei übrigen gehören zur ersten Classe. Die inf. Transformationen, die einer dieser Untergruppen angehören, sind so gewählt, dass sie ein kanonisches System für die betreffende Untergruppe bilden.

Für alle vier Untergruppen gilt nun der Satz:

Die Parameter der Gruppe lassen sich rational durch die Coefficienten der allgemeinen Substitution der Gruppe darstellen.

Für die drei Gruppen erster Classe gilt überdies der Satz: Unter den Potenzen einer von der identischen verschiedenen Substitution der Gruppe kommt die identische Substitution nicht vor.

Wir haben nun weiter bewiesen:

Die Untergruppen $A_0$ und $A_0'$ setzen sich zu einer Untergruppe $\Gamma$ zusammen.

Die Untergruppen $\Gamma$ und $A_+$ setzen sich zu einer Untergruppe $H$ zusammen.

Endlich entsteht die $m$-gliedrige Gruppe $A$ selbst durch Zusammensetzung von $H$ und $A_-$. Durch Anwendung der Principien des Art. IV beweist man nun erst für die Untergruppe $\Gamma$, dann für die Untergruppe $H$, endlich für die Gruppe $A$ selbst den zu beweisenden Satz, dass sich die Parameter der Gruppe rational durch die Coefficienten der allgemeinen Substitution der Gruppe darstellen lassen.

Dass eine Gruppe $A$ im Allgemeinen aus drei Untergruppen $\Gamma\, A_+\, A_-$ zusammengesetzt werden kann, ergibt sich unmittelbar aus den sehr interessanten Sätzen des H. Killing über die Zusammensetzung von Gruppen.[1]) Für die hier verfolgten Zwecke konnten aber diese Sätze nicht benützt werden. Denn H. Killing beschränkt sich darauf, die Zusammensetzung der Gruppe zu untersuchen, und geht auf die Natur der einzelnen inf. Transformationen nicht weiter ein, während gerade diese für die vorliegende Untersuchung von wesentlicher Bedeutung ist. So gehören — solange man nur die Zusammensetzung der Gruppen in Betracht zieht — die Gruppen, die hier als Gruppen erster und zweiter Classe unterschieden worden sind, in dieselbe Kategorie: sie sind beide Gruppen vom Rang Null.

Sobald man aber die Substitutionen der Gruppe und die zugehörigen Invariantensysteme genauer untersucht, zeigen sie die allergrösste Verschiedenheit.

---

1) Math. Annalen, Bd. 31, 33, 34, 36.