Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Classe

der

k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.

Band XXIV. Jahrgang 1894.

München.
Verlag der K. Akademie.
1895.

In Commission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).

Ueber die conforme Abbildung der Halbebene auf ein einfach zusammenhängendes Flächenstück, das von einer algebraischen Curve begrenzt wird.

Von F. Lindemann.

(*Eingelaufen 1. Dezember.*)

Schon 1869 hatte Schwarz gelehrt, wie man das Innere einer Parabel und das Innere einer Ellipse auf das Innere eines Kreises (oder auf die Halbebene) conform abbilden kann; bald darauf fügte er die Abbildung des Aeusseren einer Parabel oder Ellipse hinzu.[2]) Auch für ein Flächenstück, das durch eine endliche Anzahl von geradlinigen Strecken oder Kreisbögen begrenzt wird, kann man die Abbildung nach Schwarz leisten,[3]) d. h. auf die Lösung einer gewissen Differentialgleichung (dritter Ordnung) zurückführen. Sanio hat dann in seiner Dissertation[4]) einen Ansatz zur Lösung für den Fall gegeben, dass es sich um ein Polygon

1) Borchardt's Journal Bd. 70 und Annali di matematica II. Serie t. 3. Vgl. Gesammelte Abhandlungen Bd. II, p. 77 und 102.

2) Vierteljahrsschrift der naturforschenden Gesellschaft in Zürich, 15. Jahrg. 1870. Gesammelte Abhandlungen Bd. II, p. 141.

3) Borchardt's Journal Bd. 70 und 75; vgl. für geradlinig begrenzte Flächen Christoffel, Annali di matematica, II. Serie Bd. 1, 1867, und Bd. 4.

4) Die Abbildung des Aeusseren eines Kreisbogenpolygons auf eine Kreisfläche. Königsberg, 1885.

handelt, das von gleichseitigen Hyperbeln mit gemeinsamem Mittelpunkte begrenzt wird; doch lässt dieser Ansatz nicht die Richtung erkennen, in welcher eine Verallgemeinerung zu erwarten sei.

Andere Beispiele, in denen die Fläche durch einen stetig gekrümmten Curvenzug begrenzt wird, waren nicht bekannt. Kürzlich habe ich nun eine Methode angegeben,[1]) nach der das fragliche Problem gelöst werden kann, wenn sich eine rationale Function von x und y mit reellen Coëfficienten derartig bestimmen lässt, dass eine passende Potenz des Quotienten (wo Φ eine rationale Function bezeichnet)

$$\frac{\Phi(z, z_1)}{\frac{\partial f}{\partial z_1}}$$

eine rationale Function von z wird, vorausgesetzt, dass die Gleichung der begrenzenden Curve in der Form

$$(1) \qquad f(z, z_1) = 0$$

gegeben ward, und dass $z = x + iy$, $z_1 = x - iy$ gesetzt wird, wobei x und y rechtwinklige Coordinaten bedeuten. Dieser Fall liegt in den von Schwarz behandelten Beispielen (Ellipse und Parabel) vor, ferner bei der Hyperbel, bei jeder Curve dritter Ordnung, welche durch die imaginären Kreispunkte hindurchgeht, bei jeder Curve vierter Ordnung, welche in jedem der imaginären Kreispunkte einen Doppelpunkt hat, und bei vielen Curven $n$ter Ordnung, z. B. allen, deren Gleichung in der Form

$$a z^n z_1^n + b z^n + b_1 z_1^n + c = 0$$ [2])

---

1) Sitzungsberichte der physikalisch-ökonomischen Gesellschaft zu Königsberg i. Pr., 7. Juni 1894.

2) Früher hatte ich nur den Fall $a = 0$ erwähnt; Herr A. Löwy machte mich darauf aufmerksam, dass man das Beispiel in der jetzt gegebenen Weise verallgemeinern kann.

geschrieben werden kann, wo a und c reell, b und b_1 zu einander conjugirt sind.

Wird dagegen der Rand des abzubildenden Flächenstückes durch eine beliebige algebraische Curve gebildet, so soll durch die folgenden Ueberlegungen ein Ansatz für das betreffende Problem gegeben werden.

1. Wir setzen $z = x + iy$, $z_1 = x - iy$, wo x und y die orthogonalen Coordinaten eines Punktes des Randes seien, und schreiben die Gleichung der begrenzenden Curve $n$ter Ordnung wieder in der Form (1); dieselbe möge keine singulären Punkte besitzen.

Wir benutzen im Folgenden vielfach diejenige Function φ, durch welche sich die Coordinaten eines Punktes der Curve nach Schottky, Poincaré und Klein als eindeutige Functionen darstellen lassen. Es werde allgemein

$$(2) \qquad \{\varphi, z\} = \frac{d^2 \log \varphi'}{d z^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{d \log \varphi'}{d z}\right)^2$$

gesetzt, wo $\varphi' = \frac{d\varphi}{dz}$; dann ist bekanntlich nach Schottky und Cayley[1]), wenn z als Function von Z gedacht wird:

$$(3) \qquad \{\varphi, Z\} = \{z, Z\} + \{\varphi, z\}\left(\frac{dz}{dZ}\right)^2.$$

Ersetzt man hierin φ und z durch z_1, so wird

$$(4) \qquad \{z, z_1\}\left(\frac{dz_1}{dX}\right)^2 = -\{z_1, z\}\left(\frac{dz}{dX}\right)^2.$$

Durch die complexe Variable $Z = X + iY$ werde ein Punkt der Halbebene $Y > 0$ dargestellt, auf welche das von der Curve (1) umschlossene Oval abgebildet werden soll. Auf dem Rande ist dann $Z = X$ reell, während $z = x + iy$

1) Vgl. z. B. Schwarz, Gesammelte math. Abhandlungen, Bd. II, p. 362.

und $z_1 = x - iy$ einander conjugirt sind. Man erkennt demnach aus (4), dass die linke Seite nur ihr Zeichen wechselt, wenn man i mit $-i$ vertauscht; diese linke Seite ist also auf dem Rande rein imaginär.[1])

2. Vermöge der Gleichung (1) fassen wir z_1 als Function von z auf. Ueber der z-Ebene haben wir dann eine Riemann'sche Fläche, deren Verzweigungspunkte mit den Brennpunkten der Curve $f = 0$ zusammenfallen.[2]) Die Ausdehnung der Abbildungs-Aufgabe auf diese ganze Fläche führte mich in den eben bezeichneten einfachen Fällen zur Lösung und wird uns auch jetzt zum Ziele führen.

Das auf die Halbebene abzubildende Flächenstück wird durch ein Oval der Curve $f = 0$ begrenzt. Das Blatt der Fläche, in welchem das Oval liegt, bezeichnen wir als erstes Blatt. Dasselbe ist in der Regel durch mindestens zwei Brennpunkte, die im Innern des Ovals liegen, mit einem zweiten Blatte verbunden (wie man durch Grenzübergang erkennt, wenn man einen Doppelpunkt auflöst). Ausserdem hängt das erste oder zweite Blatt vielleicht durch andere Brennpunkte mit noch weiteren Blättern der Fläche zusammen. Alle Brennpunkte, zu denen man von einem im

1) Man zeigt leicht, dass sie gleich $4i \frac{dk}{dX} \cdot \frac{ds}{dX}$ ist, wenn k das Krümmungsmaass, und ds das Bogenelement der Curve bezeichnen.

2) Bei Construction dieser Fläche ist es nützlich, sich derjenigen Vorstellungen zu bedienen, welche ich in den „Vorlesungen über Geometrie" (Bd. II, Theil 1, p. 621 ff., 1891) über die Interpretation der complexen Zahl z entwickelt habe, und welche den Zusammenhang mit den imaginären Kreispunkten und sonach mit den Brennpunkten sofort erkennen lassen. Klein erwähnt neuerdings in einem Berichte über seine Vorlesungen (1891—92), dass er sich derselben Art Riemann'scher Flächen bedient habe (Math. Annalen Bd. 45, p. 143); es sei bemerkt, dass ich die oben erwähnten Beispiele der Abbildungsaufgabe schon 1892 vorgetragen habe, vgl. auch Sitzungsbericht der phys.-ökon. Ges. zu Königsberg i. Pr. vom 6. Oktober 1892.

ersten Blatte und innerhalb des Ovals gewählten Punkte gelangen kann, ohne das Oval oder eine in anderen Blättern über dem Oval liegende Curve zu überschreiten, bezeichnen wir als innere Brennpunkte, alle anderen als äussere Brennpunkte. Ein Verzweigungspunkt, der zwar im Innern des Ovals liegt, aber nicht in einem Blatte, in das man ohne das Oval zu überschreiten aus dem Innern des Ovals (im ersten Blatte genommen) gelangen könnte, ist also auch ein äusserer Brennpunkt.

Betrachten wir eine Function, welche von dem Punkte z, z_1 innerhalb dieser untereinander verzweigten Blätter eindeutig abhängt (wobei z, z_1 weder den Rand des Ovals noch eine darüber liegende Curve überschreitet), als Function von $Z = X + iY$ (wo $Y > 0$ die als Bild dienende Halbebene definirt), so erhalten wir über der Z-Ebene eine Riemann'sche Fläche, in welcher jedem „inneren" Brennpunkte der Curve $f = 0$ ein Verzweigungspunkt der oberen Halbebene entspricht, und bei der vermöge dieser Verzweigungspunkte ebenso viele Blätter zusammenhängen als bei der gegebenen Fläche im Innern des Ovals. Es fragt sich nun, wie ist diese Riemann'sche Fläche über die reelle X-Axe hinaus in jedem der fraglichen Blätter fortzusetzen, wenn der Punkt z, z_1 den Rand des Ovals in einem der über der z-Ebene liegenden Blätter überschreitet?

Geschieht dies im ersten Blatte, so ist klar (da die betrachtete Function für reelle Werthe von X im ersten Blatte reell sein muss, um für das Abbildungsproblem verwandt werden zu können), dass sich über die untere Halbebene eine symmetrische Riemann'sche Fläche als Fortsetzung des zuerst betrachteten Theiles ausbreiten wird; dieselbe besteht aus einer gleichen Anzahl von Blättern, und in ihnen nimmt die betrachtete Function Werthe an, welche denjenigen conjugirt sind, die ihr in den entsprechenden Punkten der

Blätter über der oberen Halbebene zukommen. Wie sich aber die so über der unteren Halbebene ausgebreiteten Blätter nun wieder in die obere Halbebene fortsetzen, bleibt zu erörtern.[1])

3. Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass die Curve $f=0$ aus $p+1$ reellen Zügen besteht, wenn p das Geschlecht der Curve bezeichnet. Nach Schottky[2]) kann man die vom Punkte z, z_1 gebildete Riemann'sche Fläche auf einen durch $2p$ Kreise (von denen etwa einer die übrigen umschliesst) begrenzten Theil der Ebene conform und eindeutig abbilden. Ist ein Punkt der letzteren durch die complexe Zahl η bestimmt, so geschieht die Abbildung durch Lösung einer Differentialgleichung der Form

$$\{\eta. z\} = \varphi(z, z_1), \tag{5}$$

wo φ eine gewisse rationale Function von z und z_1 bezeichnet; es wird η als Quotient der beiden particulären Lösungen einer linearen homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit algebraischen Coëfficienten gefunden.

Die $2p$ Kreise sind einander paarweise zugeordnet, so dass der Punkt η von dem einen Kreise eines Paares zu dem zugeordneten springt, wenn der Punkt z, z_1 einen bestimmten von den $p+1$ reellen Zügen der Curve überschreitet. Jedem reellen Zuge (einen zunächst ausgenommen) entspricht so ein Paar von Kreisen; jedes Paar besteht aus

1) Bei den früher von mir behandelten Beispielen geschah dies einfach, indem die über $Y>0$ liegenden Halbblätter sich sämmtlich direct in die über $Y<0$ liegenden Halbblätter fortsetzten. Im Allgemeinen geschieht dies indessen nur im ersten Blatte.

2) Vgl. Borchardt's Journal Bd. 83, 1877 (und die 1875 erschienene Dissertation). Schottky und Klein machen darauf aufmerksam (Math. Annalen Bd. 20, p. 300 und Bd. 21, p. 143), dass sich in dem 1876 veröffentlichten Riemann'schen Nachlasse (Ges. Werke, p. 413) bereits ähnliche Untersuchungen finden.

zwei Kreisen, die einander in Bezug auf einen und denselben $(2p+1)$ten Kreis zugeordnet sind und durch eine solche lineare Transformation von η (eigentlich durch eine „Spiegelung") aus einander entstehen, welche diesen $(2p+1)$ten Kreis ungeändert lässt. Der letztere geht aus dem $(p+1)$ten reellen Zuge der Curve bei der Abbildung hervor. Die Function η kann über jeden Kreis hinaus durch den bekannten Process der „Spiegelung" fortgesetzt werden; dadurch wird die Unsymmetrie beseitigt, welche in Bezug auf den $(p+1)$ten reellen Zug nach der soeben gegebenen Darlegung zu bestehen scheinen würde. Auf jedem Kreise, also auch auf jedem reellen Zuge der Curve $f=0$, nimmt eine gewisse lineare Function von η reelle Werthe an.

4. Denjenigen Kreis, welcher dem Rande des gegebenen Ovals entspricht, denken wir uns als reelle Axe einer H-Ebene, auf welche wir die η-Ebene mittelst einer linearen Transformation abbilden. Die anderen $2p$ Kreise liegen dann paarweise symmetrisch zu dieser Axe.

Die Function $\{H, Z\}$ ist hiernach reell auf dem Rande des Ovals; für sie denken wir uns über der Z-Ebene die in Nr. 2 erwähnte mehrblättrige Fläche construirt.

Die reellen Coordinaten x, y eines reellen Punktes der Curve lassen sich nach Schottky als eindeutige automorphe Functionen von H darstellen:

$$x = \varphi(H), \quad y = \psi(H),$$

welche für reelle Werthe von H reell sind, also für conjugirte Werthe von H auch einander conjugirte Werthe annehmen. In den Veränderlichen z und z_1 haben wir die Parameter-Darstellung

$$(6) \qquad z = \varphi(H) + i\psi(H), \quad z_1 = \varphi(H) - i\psi(H).$$

Es sei nun $u_r + i v_r = \varphi(H_r)$, $w_r + i\omega_r = \psi(H_r)$; und es mögen H_1, H_2, $\ldots H_\mu$ (wo $\mu \leqq n$ bei einer n-blättrigen Fläche) einen und denselben Werth von z (also über einander liegende Punkte der Fläche) ergeben, so dass:

$$u_1 - \omega_1 = u_2 - \omega_2 = \ldots . = u_\mu - \omega_\mu,$$
$$v_1 + w_1 = v_2 + w_2 = \ldots . = v_\mu + w_\mu.$$

Wir behaupten, dass dann die den conjugirten Werthen von $H_1, \ldots H_\mu$ zugeordneten Punkte der Fläche nicht ebenfalls über einander liegen können, falls $\mu > 2$ ist. In der That, sollte dieses der Fall sein, so hätten wir für zwei verschiedene Werthe der Indices r und s

$$u_r - i\, v_r + i\,(w_r - i\, \omega_r) = u_s - i\, v_s + i\,(w_s - i\, \omega_s),$$

also:

$$u_1 + \omega_1 = u_2 + \omega_2 = \ldots . = u_n + \omega_\mu,$$
$$v_1 - w_1 = v_2 - w_2 = \ldots . = v_n - w_\mu;$$

und es würde sich ergeben

$$u_1 = u_2 = \ldots . = u_\mu, \;\; v_1 = v_2 = \ldots . = v_\mu,$$
$$w_1 = w_2 = \ldots . = w_\mu, \;\; \omega_1 = \omega_2 = \ldots . = \omega_\mu.$$

Es würden also auch die zugehörigen Werthe von z_1 (nemlich $u_r - \omega_r + i\,(v_r + w_r)$) sämmtlich einander gleich, und der fragliche Punkt wäre ein $(\mu - 1)$-facher Verzweigungspunkt der Curve $f = 0$; das Auftreten eines solchen aber können wir, falls $\mu > 2$, vorläufig ausschliessen. Der Fall $\mu = n = 2$ ist durch die früher von mir behandelten Beispiele schon vollständig erledigt.

5. Kehren wir jetzt zu dem Probleme der Fortsetzung unserer über der Z-Ebene ausgebreiteten Fläche zurück. Mit dem ersten Blatte der ursprünglichen Fläche (in dem das gegebene Oval liegt) mögen μ Blätter in der geschilderten Weise zusammenhängen; wir denken sie uns durch Ränder r_1, r_2, $\ldots r_\mu$ begrenzt, die über dem Ovale liegen, während

r_1 mit dem Ovale zusammenfällt. Letzteren entsprechen μ geradlinige Ränder über der reellen X-Axe: R_1, R_2, ... R_μ, welche ebenso viele Halbebenen ($Y > 0$) begrenzen. Die conjugirten Halbebenen ($Y < 0$) werden durch die Ränder R_1', R_2', ... R_μ' begrenzt, die ebenfalls über der X-Axe liegen, und von denen R_1 mit R_1' identisch ist. Diesen neuen Randcurven entsprechen wieder in der ursprünglichen Fläche geschlossene Curven r_2', r_3', ... r_μ', die zu den Curven r_2, r_3, ... r_μ conjugirt sind, deren Bilder in der H-Ebene daher leicht zu bestimmen sind; sie können, wie soeben in Nr. 4 gezeigt wurde, nicht übereinander liegen. Wir wählen diejenige Curve r' aus, welche am weitesten über die anderen Curven r' hinübergreift;[1]) in dem ganzen durch sie begrenzten Gebiete ist dann z als Function von Z definirt, also auch jede algebraische Function von z, und zwar letztere zugleich in allen darüber oder darunter liegenden Theilen von Blättern der ursprünglichen Riemann'schen Fläche. Diese Curve r' und die $\mu - 1$ über oder unter ihr in den anderen Blättern der Fläche liegenden Curven geben neue Ränder, welche das ursprünglich für die Variable z gegebene Gebiet wesentlich erweitern. In entsprechender Weise ist damit auch über der Z-Ebene das Gebiet der Variabeln Z und der zur Darstellung von $\{H, Z\}$ dienenden Fläche bis an neue Ränder R_2'', R_3'', ... R_μ'' über die Ränder R_2', R_3', ... R_μ' hinaus fortgesetzt. Dasselbe gilt von den conjugirt imaginären Gebieten der Fläche; sie sind über die Ränder R_2, R_3, ... R_μ hinaus in die untere Halbebene bis an neue Ränder P_2, P_3, ... P_μ fortgesetzt; vielleicht haben einige dieser Ränder dabei bereits die ganze untere Halbebene überstrichen und befinden sich in neuen Blättern über der oberen Halbebene, in welchem Falle die entsprechenden (conjugirten) Ränder R'' in

1) Statt dessen könnte man eine neue Curve construiren, welche sich aus möglichst günstig gewählten Theilen der verschiedenen Curven r_2', r_3', ... zusammensetzt.

der unteren Halbebene verlaufen. Den Rändern P_2, P_3, $\ldots P_\mu$ entsprechen über der z-Ebene in der ursprünglichen Fläche Curven ϱ_2, ϱ_3, $\ldots \varrho_\mu$, welche der Curve r' und den direct über oder unter ihr liegenden Curven conjugirt sind (immer in dem Sinne, dass einander entsprechende Punkte durch conjugirte Werthe von H gemäss (6) dargestellt werden), und welche daher selbst nach Nr. 4 nicht übereinander liegen können. Mit ihnen kann man in gleicher Weise die gemachten Schlüsse fortsetzen. Jedem von z beschriebenen Wege entspricht gemäss diesen Ueberlegungen ein angebbarer Weg der Variabeln Z und umgekehrt.

6. Es fragt sich zunächst, ob die Variable z sich vielleicht einer Grenzcurve nähern kann, über die hinaus eine Fortsetzung nicht mehr möglich ist. Sollte dies geschehen, so müsste der zum conjugirten Werthe von H gehörige Punkt z' sich ebenfalls einer natürlichen Grenze nähern; und dasselbe müsste für alle zugehörigen $\mu - 1$ Punkte in der zur Darstellung von $\{\eta, z\}$ dienenden Fläche der Fall sein. In jedem Blatte hätte man eine solche Grenzcurve über derjenigen, welche in einem Blatte als natürliche Grenze von z auftritt; die conjugirten Punkte müssten dann in den verschiedenen Blättern die conjugirten Grenzcurven bilden, also alle übereinander liegen, was nach Nr. 4 nicht möglich ist.

Das Gebiet der Variabeln z ist also, wenn z als Function von Z betrachtet wird, in keiner Weise durch eine natürliche Grenze beschränkt.

7. In analoger Weise zeigt man, dass z als Function von Z keinen wesentlich singulären Punkt haben kann, wenn die Variable η auf das in Nr. 3 geschilderte, von $2p$ Kreisen begrenzte Gebiet beschränkt bleibt.

Sollte nemlich an irgend einer Stelle z die Function Z

wesentlich singulär sein, so müsste auch $\{\eta, Z\}$ dort eine wesentliche Singularität haben, und es müsste dasselbe für alle über z gelegenen Stellen der zur Darstellung von $\{\eta, z\}$ dienenden Fläche gelten, ebenso für alle conjugirten Stellen. Die letzteren aber liegen nicht übereinander, jede von ihnen gibt also zu weiteren Punkten der zuletzt erwähnten Riemann'schen Fläche Veranlassung, die ebenfalls wesentlich singulär sind, u. s. f. Einer der so erhaltenen singulären Punkte müsste dann in das Innere des ursprünglichen Ovals fallen, wie folgende Schlussweise lehrt.

Nehmen wir z. B. an, ein solcher Punkt Z_0 läge im Innern eines durch die in Nr. 5 benutzten Ränder P_1, P_2, $\ldots P_\mu$ und R_1, R_2, $\ldots R_\mu$ begrenzten Gebietes; der entsprechende Punkt z_0 liegt dann innerhalb des durch die Curve r' begrenzten Gebietes, und zwar als wesentlich singulär in allen übereinanderliegenden Blättern; die gleiche Singularität muss dann in den conjugirten Gebieten, d. h. auch innerhalb des ursprünglichen Ovals vorkommen, was nicht möglich ist. Liegt der Punkt Z_0 ausserhalb der Ränder P, so hat man die frühere Schlussweise in gleicher Weise rückwärts fortzusetzen. Wesentliche Singularitäten sind also bei der Abhängigkeit der Grössen Z und z von einander ausgeschlossen, soweit solche nicht schon bei der Abhängigkeit der Function η von z vorkommen, d. h. so lange η (oder H) keinen der früher besprochenen $2p$ Kreise überschreitet.

8. Wir untersuchen noch, wie sich die reellen Züge der gegebenen Curve über der Z-Ebene abbilden, d. h. wie sich Z ändert, wenn H einen der $2p$ Kreise überschreitet.

Geht H von einem Punkte der reellen Axe aus in der oberen Halbebene zu einem Punkte des Kreises K, so läuft gleichzeitig der conjugirte Punkt H_1 in der unteren Halbebene dem entsprechenden Punkte des conjugirten Kreises K_1 zu. Diesen beiden Wegen entsprechen zwei Wege in der ursprünglichen (über der z-Ebene ausgebreiteten) Riemann'schen Fläche, welche vom Punkte z, z_1 der Randcurve des ersten Ovals zum Punkte z', z_1' eines zweiten reellen Zuges hinführen, und ebenso zwei Wege in der über der Z-Ebene ausgebreiteten Fläche, welche vom ursprünglichen Punkte der reellen X-Axe aus zu einem (in einem anderen Blatte gelegenen) Punkte Z' bezw. zu dem Punkte Z_1' im conjugirten Blatte führen. Dabei ist Z' eine Function von z', und umgekehrt; ebenso ist z_1' eine Function von Z_1', also auch (da z_1' eine Function von z' ist) von Z', und nach Gleichung (3) haben wir identisch:

$$[\{z', Z'\} - \{z_1', Z'\}] \left(\frac{d\,Z'}{d\,t}\right)^2 = \{z', z_1'\} \left(\frac{d\,z_1'}{d\,t}\right)^2.$$

Bedeutet t einen reellen Parameter, so ist die rechte Seite rein imaginär (vgl. oben Nr. 1); es ist folglich $\{z', Z'\}\,(d\,Z')^2$ conjugirt zu $\{z_1', Z'\}\,(d\,Z')^2$; andererseits ist derselbe Ausdruck conjugirt zu $\{z_1', Z_1'\}\,(d\,Z_1')^2$; es folgt also

$$\{z_1', Z'\}\,(d\,Z')^2 - \{z_1', Z_1'\}\,(d\,Z_1')^2 = 0.$$

Ferner ist nach (3) die linke Seite der letzten Gleichung identisch gleich $-\{Z', Z_1'\}\,(d\,Z_1')^2$; es ist somit $\{Z', Z_1'\} = 0$, d. h. es besteht eine Relation der Form

$$\alpha\, Z'\, Z_1' + \beta\, Z' + \gamma\, Z_1' + \delta = 0. \tag{7}$$

Dieses aber ist die Gleichung eines Kreises. Auf der über der Z-Ebene ausgebreiteten Riemann'schen Fläche entspricht daher jedem reellen Zuge der Curve $f = 0$ ein Paar von einander zugeordneten Kreisen. Entweder muss das Innere oder das Aeussere eines solchen Kreises als durch ihn begrenzt betrachtet werden.

Ueber diese Kreise hinaus kann man den Verlauf der

Function Z durch den Process der „Spiegelung" verfolgen, genau wie es mit der Function H durch Spiegelung an den $2p$ Kreisen der H-Ebene geschieht. Bei wiederholter Anwendung des Processes wird man schliesslich eine Fläche mit unendlich vielen Blättern und unendlich vielen Verzweigungen construiren. Nähert sich der Punkt Z einer Stelle, wo sich diese Verzweigungen unendlich häufen, so wird der Punkt z unendlich oft die reellen Züge der Curve $f = 0$ überschreiten, also einen unendlich langen Weg beschreiben. Durch dieses Verhalten ist die Abhängigkeit der Grössen z und Z von einander als eine im Allgemeinen transscendente charakterisirt.

9. Es erübrigt noch, die Verzweigungspunkte der für $\{H, Z\}$ construirten Fläche näher zu untersuchen. Als solche treten, wie wir bereits wissen (Nr. 2), die den inneren Brennpunkten von $f = 0$ entsprechenden Punkte und die ihnen conjugirten Punkte auf. Um die Frage allgemein in Angriff zu nehmen, setzen wir wie in Nr. 4

$$\begin{aligned} z\; &= u + i\,v + i\,(w + i\,\omega) = u - \omega + i\,(v + w), \\ z_1 &= u + i\,v - i\,(w + i\,\omega) = u + \omega + i\,(v - w). \end{aligned}$$

Der conjugirte Punkt hat dann die Coordinaten

$$\begin{aligned} z' \; &= u - i\,v + i\,(w - i\,\omega) = u + \omega - i\,(v - w), \\ z_1' &= u - i\,v - i\,(w - i\,\omega) = u - \omega - i\,(v + w). \end{aligned}$$

Seien nun $z = a$, $z_1 = a_1$ die Coordinaten eines Punktes der ursprünglichen Fläche und

$$(8) \qquad z = a + (Z - A)^{\lambda}\,\mathfrak{P}, \quad z_1 = a_1 + (Z - A)^{\mu}\,\mathfrak{P}^0,$$

wo $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}^0$ Potenzreihen bedeuten. Dann wird, da z_1' zu z, z' zu z_1 conjugirt imaginär ist

$$(9) \quad z' = a_1' + (Z_1 - A_1)^{\mu}\,\mathfrak{P}_1^0, \; z_1' = a' + (Z_1 - A_1)^{\lambda}\,\mathfrak{P}_1,$$

wenn a', a_1', $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_1^0$ bezw. zu a, a_1, $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}^0$ conjugirt imaginär sind.

Für einen Punkt, dem derselbe Werth von z, aber ein anderer von z_1 zukommt, sei

$$\zeta = u' - \omega' + i(v' + w') = z = u - \omega + i(v + w)$$
$$\zeta_1 = u' + \omega' + i(v' + w').$$

Ihm ist dann der Punkt

$$\zeta' = u' + \omega' - i(v' - w'),\quad \zeta_1' = u' - \omega' - i(v' + w')$$

conjugirt; es ist also, da $u' - \omega' = u - \omega$ und $v' + w' = v + w$ war, ζ_1' identisch mit z_1'. Werde $\zeta' = a$ für $Z_1 = A_1$, so haben wir

$$(10)\quad \zeta' = a + (Z_1 - A_1)^{\nu}\,\mathfrak{P}_2,\quad \zeta_1' = a' + (Z_1 - A_1)^{\lambda}\,\mathfrak{P}_1.$$

Sei nun erstens der Punkt a, a_1 kein ausgezeichneter Punkt der Fläche $f = 0$, so ist $\lambda = \mu$. Ist der Punkt ζ', ζ_1' ebenfalls nicht ausgezeichnet, so ist auch $\nu = \lambda = \mu$. Sei λ von 1 verschieden, so haben wir nach (8) und (9) sowohl in A als in A_1 einen Verzweigungspunkt, nach (10) aber auch in jedem Punkte, welcher in der ursprünglichen Fläche über einem zu a, a_1 conjugirten Punkte liegt; das aber ist unmöglich, wie die in Nr. 7 angewandte Schlussweise sofort erkennen lässt. Wäre der Punkt a, a' zufällig ein Brennpunkt, so ist in der folgenden Betrachtung nur ζ, ζ_1 durch a, a_1 zu ersetzen.

Sei zweitens a, a_1 ein Brennpunkt von $f = 0$. Dann haben wir $\lambda = 2\mu$. Ist auch $\nu = \lambda = 2\mu$, so ergibt sich für $\lambda \gtrless 1$ dieselbe Unmöglichkeit, wie vorhin. Für $\lambda = 1$ folgt aus (9)

$$z_1' - a' = (z' - a_1')^2\,\mathfrak{P}_3;$$

diese Gleichung sagt aus, dass der zum Brennpunkte conjugirte Punkt der Gleichung $\frac{\partial f}{\partial z} = 0$ genügt, wie es auch direct einleuchtet. Aus (10) ergibt sich kein Widerspruch;

$\lambda = 1$ ist also die einzig mögliche Annahme. Wäre ν von λ verschieden, so wäre der Punkt α, α' zufällig selbst auch ein Brennpunkt oder ein Nullpunkt der Function $\frac{\partial f}{\partial z}$; dann wird man einen anderen über z, z_1 liegenden Punkt benutzen können, dessen conjugirter kein Brennpunkt ist, und analoge Schlüsse wiederholen.

Nicht nur die „inneren“, sondern auch die „äusseren“ Brennpunkte der Curve $f = 0$ gehen also bei unserer Abbildung in Verzweigungspunkte der für $\{H, Z\}$ construirten Fläche über. Letztere hat ausserdem nur in den conjugirten Punkten Verzweigungspunkte.

10. Wir haben jetzt alle Mittel bereit, um die Lösung unseres Abbildungsproblems auszuführen. Die Function $\{H, Z\}$ ist in der ursprünglichen Riemann'schen Fläche überall holomorph, so lange der Punkt z, z_1 keinen der $p+1$ reellen Curvenzüge überschreitet.

Beim Uebergange über einen solchen Zug aber springt H auf den conjugirten Werth H_1, gleichzeitig Z auf den conjugirten Werth Z_1 über; dabei ist nach (7)

$$Z_1 = \frac{a\,Z + b}{c\,Z + d} \text{ und ebenso } H_1 = \frac{a'\,Z + b'}{c'\,Z + d'}$$

also nach (3) in bekannter Weise

$$\{H_1, Z_1\} = \{H, Z_1\} = \{H, Z\}\left(\frac{d\,Z}{d\,Z_1}\right)^2.$$

Die Function $\{H, Z\}$ ist ferner reell auf dem Rande des abzubildenden Ovals. Auf demselben Rande ist die Function

$$i\,\frac{dz}{d\,Z}\,\frac{1}{\frac{\partial f}{\partial z_1}} = -\,i\,\frac{dz_1}{d\,Z}\cdot\frac{1}{\frac{\partial f}{\partial z}}$$

reell. Das Quadrat der letzteren Function, dividirt durch

$\{H, Z\}$, gibt daher einen Quotienten, der ungeändert bleibt, wenn der Punkt z, z_1 einen reellen Zug von $f = 0$ auf der Riemann'schen Fläche überschreitet, und welcher auf dem Rande des abzubildenden Ovals reell ist. Auch $\left(\frac{dz}{dZ}\right)^2$ ist überall holomorph, so lange die reellen Züge nicht überschritten werden. Es besteht daher eine Gleichung der Form

$$\{H, Z\} = \Phi(z, z_1) \frac{1}{\left(\frac{\partial f}{\partial z_1}\right)^2} \left(\frac{dz}{dZ}\right)^2 \tag{11}$$

wo Φ eine rationale Function von z und z_1 bedeutet, die auf dem Rande des abzubildenden Ovals reelle Werthe annimmt, sich also als rationale Function von x und y mit reellen Coëfficenten darstellt.

Die nähere Bestimmung der Function Φ wird von transscendenten Bedingungen abhängen, deren Aufstellung in explicirter Form grosse Schwierigkeiten bereitet, wie dies ja auch für die entsprechende Function φ in der Differentialgleichung (5) eintritt[1]). Wir können aber das Verhalten der Function Φ an den singulären Stellen angeben.

Für einen Brennpunkt a, a_1 ist nach Nr. 9

$$z_1 - a_1 = \sqrt{z-a}\,\mathfrak{P}, \qquad z - a = (Z - A)\,\mathfrak{P}_1,$$
$$H - H_0 = \sqrt{z-a}\,\mathfrak{P}_2,$$

also

$$\{H, Z\} = \frac{3}{8}\frac{1}{(Z-A)^2} + \cdots = \frac{C}{(z-a)^2} + \cdots,$$

wenn C eine Constante bedeutet. Ferner ist

$$\frac{\partial f}{\partial z_1} = C'(z_1 - a_1) + \cdots;$$

1) Vgl. Poincaré, Acta matematica Bd. 4, p. 292 ff. und (für das Verhalten von φ an den singulären Stellen) Bd. 1, p. 278.

die Function Φ muss daher der Bedingung genügen:

(12) $$\lim_{z=a} \Phi \cdot (z - a) = \text{Const.}$$

Handelt es sich um einen Punkt α, α_1, welcher zu einem Brennpunkte conjugirt ist (d. h. einen Nullpunkt der Function $\frac{\partial f}{\partial z}$), so haben wir nach Nr. 9:

$$z_1 - \alpha_1 = (z - \alpha)^2 \mathfrak{P}_3, \qquad z - \alpha = \sqrt{Z - A_1}\, \mathfrak{P}_4,$$
$$H - H_0' = (z - \alpha) \mathfrak{P}_5,$$

also

$$\{H, Z\} = \frac{3}{8} \frac{1}{(Z - A_1)^2} + \cdots = \frac{\text{Const.}}{(z - \alpha)^4} + \cdots;$$

ferner $\frac{\partial f}{\partial z_1} = \text{Const.}$; für Φ ergibt sich also die Bedingung:

$$\lim_{z=\alpha} \Phi \cdot (z_1 - \alpha_1) = \text{Const.}$$

Dieselbe entspricht genau der Bedingung (12); in der That hätte sie auch aus der Realität der Function Φ direct geschlossen werden können.

Die Gleichung (11) können wir noch in bemerkenswerther Weise umformen. Ersetzen wir nemlich in (3) φ durch H, so ergibt sich mit Hülfe von (11) unter Benutzung von (4):

(13) $$\{Z, z\} = \varphi(z, z_1) - \frac{\Phi(z, z_1)}{\left(\frac{\partial f}{\partial z_1}\right)^2}.$$

Auf diese Differentialgleichung dritter Ordnung, in der φ und Φ die in (5) und (11) vorkommenden rationalen Functionen von z und z_1 bedeuten, ist hiernach das Problem zurückgeführt, ein durch ein Oval einer algebraischen Curve $f = 0$ (die keine Doppelpunkte hat) begrenztes einfach zusammenhängendes Flächenstück auf die Halbebene abzubilden.

11. Insbesondere kann es vorkommen, dass die Kreise, welche nach Nr. 8 in der Z-Ebene den reellen Zügen der Curve $f=0$ entsprechen, paarweise mit einander und mit der reellen Axe zusammenfallen. Dann schliesst sich die für $\{H, Z\}$ construirte mehrblättrige Fläche, und $\{H, Z\}$ wird eine algebraische Function von Z. Die Gleichung (13) wird dann von der Form

$$\psi\left(\frac{dz}{dZ}\right)^2 = \Psi,$$

wo ψ eine algebraische Function von z, Ψ eine algebraische Function von Z bedeutet.

Von dieser Form war die Lösung in den früher von mir behandelten Fällen. Bei denselben tritt noch die weitere Besonderheit ein, dass die Riemann'sche Fläche über der z-Ebene mehrfach von dem Bilde der über der Z-Ebene construirten Fläche überdeckt wird. Es liegt dies daran, dass die ursprüngliche Riemann'sche Fläche in jenen Beispielen nicht nur in Bezug auf den reellen, gegebenen Curvenzug, sondern auch in Bezug auf die über demselben in den anderen Blättern gelegenen Curvenzüge, gewisse Symmetrie-Verhältnisse zeigt. Aehnliche Besonderheiten werden immer auftreten, wenn die zu der Curve $f=0$ gehörige Fläche solche besondere Symmetrieverhältnisse aufweist.

In dem einfachsten Falle, der Abbildung des Innern einer Ellipse auf die Halbebene, gestalten sich die Verhältnisse z. B. folgendermassen: Ueber der z-Ebene haben wir eine zweiblättrige Fläche vom Geschlechte Null, deren beide Verzweigungspunkte mit den Brennpunkten der Ellipse zusammenfallen, über der Z-Ebene eine ebenfalls zweiblättrige Fläche mit vier Verzweigungen (also vom Geschlechte Eins).

Zwei von diesen liegen in der Halbebene $Y > 0$, die beiden anderen sind die conjugirten Punkte der Halbebene $Y < 0$. Den beiden Blättern der oberen Halbebene entsprechen die beiden Blätter des Innern der Ellipse, begrenzt durch die Ellipse selbst und durch die darüber liegende Curve. Den conjugirten Blättern der unteren Halbebene ($Y < 0$) entspricht über der z-Ebene ein Streifen, der von der gegebenen Ellipse und einer zu ihr confocalen Ellipse E_1 begrenzt wird; überschreitet man die letztere, so kommt man wieder in die beiden über der Halbebene $Y > 0$ gelegenen Blätter, denen nun in der z-Ebene ein weiterer, von der Ellipse E_1 und einer zu ihr confocalen Ellipse E_2 begrenzter Streifen entspricht; u. s. f. Sowohl im oberen, als im unteren Blatte erhält man so unendlich viele, von confocalen Ellipsen begrenzte, ringförmige Streifen, deren jeder auf zwei über einander liegende Halbblätter derjenigen Fläche abgebildet wird, welche über der Z-Ebene construirt wurde.

Auf diese und andere Einzelheiten werde ich bei anderer Gelegenheit näher eingehen. Es mögen hier nur noch folgende Bemerkungen Platz finden.

12. Wir setzten bei unserer Ableitung voraus, dass die Curve $f = 0$ das Maximum von reellen Zügen besitze. Hat sie weniger als $p + 1$ reelle Züge, so hat man statt der Schottky'schen Untersuchungen diejenigen allgemeineren Hülfsmittel anzuwenden, die wir Poincaré verdanken;[1]) man wird dann ganz analoge Schlüsse durchführen können.

Ist das Geschlecht $p = 1$, so hat man statt $\{\eta, Z\}$ die Function $\dfrac{d \log \eta'}{d Z}$ zu untersuchen, wo η das zugehörige elliptische Integral erster Gattung bezeichnet. Die in Nr. 8 auftretenden Kreise sind dann durch gerade Linien zu ersetzen.

1) Vgl. Acta Matematica, a. a. O.

Das Auftreten von Doppelpunkten muss vorläufig ausgeschlossen bleiben; es scheint, dass man es nicht einfach durch Grenzübergang (d. h. durch Zusammenfallen von Brennpunkten) erledigen kann. Man würde dann weiter zum Zerfallen der Curve $f = 0$ fortschreiten können und dadurch zu Abbildungsfunctionen mit sehr bemerkenswerthen Eigenschaften geführt werden. Ich hoffe, hierauf bald zurückkommen zu können. Erledigt habe ich zunächst nur den Fall, wo der Rand des abzubildenden Flächenstückes durch eine endliche Anzahl von Kegelschnitten gebildet wird, denen die Brennpunkte gemeinsam sind. Auf diese Aufgaben soll hier nicht mehr eingegangen werden.

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der Bayerischen Akademie der Wissenschaften München

Jahr/Year: 1895

Band/Volume: 1894

Autor(en)/Author(s): Lindemann Ferdinand

Artikel/Article: Ueber die conforme Abbildung der Halbebene auf ein einfach zusammenhängendes Flächenstück, das von einer algebraischen Curve begrenzt wird 403-422