Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Classe

der

k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.

Band XXIV. Jahrgang 1894.

München.
Verlag der K. Akademie.
1895.

In Commission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).

Digitized by Google

Ueber den Schatten eines Planeten.

Von H. Seeliger.

(*Eingelaufen 1. December.*)

Für einen leuchtenden Punkt ist die Schattenfläche eines Planeten, der als ein abgeplattetes Rotationsellipsoid angesehen werden darf, ein Kegel zweiter Ordnung. Infolge der Ausdehnung der kugelförmigen Sonne entsteht das Phänomen des Halbschattens. Die Schattenfläche giebt in diesem Falle die Grenze des Kern- bezw. des Halbschattens an und ist die Einhüllende aller gemeinschaftlichen Tangentialebenen an die Kugel und das Ellipsoid. Die Gleichung dieser Fläche, welche vom 8. Grade ist, ist bekannt und u. A. in dem verbreiteten Lehrbuche der analytischen Geometrie von Salmon gegeben, auch besitzt man Modelle, welche ihre wesentlichen Gestaltungsverhältnisse zur Anschauung bringen. Zu Verwendungen auf astronomische Aufgaben, bei denen es sich um wirkliche numerische Ausrechnungen handelt, wird indessen diese Gleichung nicht sehr geeignet sein. Laplace hat in der Méc. cél.[1]) angegeben, wie man die Gleichung der Schattenfläche als das Resultat der Elimination eines Parameters aus 2 Gleichungen erhält und es ist bei vielen Anwendungen bequemer an diesen Gleichungen die erlaubten

1) Livre VIII, Chap. VIII.

Digitized by Google

und erwünschten Vereinfachungen auszuführen. Laplace hat nur einen verhältnissmässig einfachen Fall, der sich bei den Verfinsterungen der Jupitertrabanten darbietet, wirklich im Einzelnen verfolgt. Es blieb hier demnach noch manche Lücke auszufüllen und dies ist zum Theil durch die Arbeiten von Hall[1]), Souillart[2]), Bruns[3]) geschehen. Die folgenden Zeilen verfolgen auf anderer Grundlage dasselbe Ziel, nämlich die Vorschriften für die Berechnung von einigen Phänomenen, die mit der Schattenfläche zusammenhängen, möglichst einfach zu gestalten und die bereits bekannten auf einfachem Wege zu begründen. —

Es werde in den Mittelpunkt der Sonne der Anfang eines rechtwinkligen Coordinatensystemes gelegt. Seine xy-Ebene sei parallel zum Aequator des Planeten, dessen Mittelpunkt in der xz Ebene liegen und die Coordinaten A und C haben möge. Es sei ferner R der Radius der Sonne, R' der äquatoreale und R'_1 der polare Radius des Planeten. Nennt man noch e die Ellipticität $e = \frac{R' - R'_1}{R'_1}$, so wird die Gleichung der Sonnen- bezw. der Planetenoberfläche:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2;$$
$$(x - A)^2 + y^2 + (1 + e)^2 [(z - C)^2 - R_1'^2] = 0 \qquad (1)$$

Eine gemeinsame Tangentialebene an Sonne und Planet wird offenbar ausgedrückt durch

$$x\gamma - y\alpha - z\beta - R = 0$$

wo $\gamma, -\alpha, -\beta$ die Richtungscosinus der Normale der Tangentenebene sind, welche parallel sein muss zur Normalen des Ellipsoides.

1) Astron. Nachr. Band 90 S. 305 ff.

2) Astron. Nachr. Band 91 S. 129.

3) Vergl. J. Hartmann, die Vergrösserung des Erdschattens bei Mondfinsternissen. Abhandlungen der sächs. Gesellsch. d. Wissensch. Leipzig 1891 S. 13. (375).

Digitized by Google

Man hat also

$$\left.\begin{aligned} &\gamma = N(x - A); \quad \alpha = -N.y; \\ &\beta = -N(1+e)^2(z - C) \\ &\frac{1}{N^2} = (x - A)^2 + y^2 + (1+e)^4(z - C)^2 \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Schreibt man die Ebenengleichung so:

$$\gamma(x - A) - \alpha y - \beta(z - C) = R - \gamma A + \beta C,$$

so ergiebt sich mit Hülfe von (2):

$$\frac{1}{N}\left\{\gamma^2 + \alpha^2 + \frac{\beta^2}{(1+e)^2}\right\} = R - \gamma A + \beta C$$

Setzt man andererseits (2) in die Ellipsoidgleichung (1) ein, so wird:

$$\frac{1}{N^2}\left\{\gamma^2 + \alpha^2 + \frac{\beta^2}{(1+e)^2}\right\} = R'^2$$

Man kommt also zu den zwei Gleichungen

$$\gamma^2 + \alpha^2 + \frac{\beta^2}{(1+e)^2} = \frac{(R - \gamma A + \beta C)^2}{R'^2}$$

$$\gamma^2 + \alpha^2 + \beta^2 = 1$$

und man kann demnach α und γ durch β ausdrücken.

Behält man β als einen Parameter bei, so wird die Schattenfläche, d. i. die Einhüllende aller Tangentenebenen, sich ergeben durch Elimination von β aus den Gleichungen:

$$\gamma x - \alpha y - \beta z - R = 0$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial \beta} x - \frac{\partial \alpha}{\partial \beta} y - z = 0$$

oder, was dasselbe ist, durch Elimination von β aus:

$$F = (\gamma x - \beta z - R)^2 - \alpha^2 y^2 = 0 \text{ und } \frac{\partial F}{\partial \beta} = 0 \qquad (3)$$

Digitized by Google

Indem man nun γ und α durch β ausgedrückt in (3) einsetzt, ist es vortheilhaft die Grösse

$$\varepsilon = 1 - \frac{1}{(1+e)^2}$$

einzuführen. Es ist auch ε oder das Quadrat der Excentricität $= 2\alpha_1 - \alpha_1^2$, wo α_1 die Abplattung im gewöhnlichen Sinne bedeutet. Die obigen Gleichungen geben nun:

$$R - A\gamma + \beta C = R'\sqrt{1-\beta^2\varepsilon}$$

$$\alpha^2 = \left[1 - \frac{R^2}{A^2} - \frac{R'^2}{A^2}\right] - 2\beta\frac{RC}{A^2} - \beta^2\left[1 + \frac{C^2}{A^2} - \frac{R'^2}{A^2}\varepsilon\right]$$
$$+ 2\frac{RR'}{A^2}\sqrt{1-\beta^2\varepsilon} + 2\frac{CR'}{A^2}\beta\sqrt{1-\beta^2\varepsilon}$$

Führt man nun die Hülfsgrössen ein:

$$\left.\begin{aligned}
m &= \frac{R^2}{A^2}(x-A)^2 + \frac{R'^2x^2}{A^2} - y^2\left[1 - \frac{R^2+R'^2}{A^2}\right] \\
n &= 2\frac{R}{A}\left\{(x-A)\left(\frac{C}{A}x - z\right) + \frac{C}{A}y^2\right\} \\
p &= \left(\frac{C}{A}x - z\right)^2 + y^2\left(1 + \frac{C^2}{A^2}\right) - \frac{R'^2}{A^2}\varepsilon(x^2+y^2) \\
\mu &= \frac{2RR'}{A^2}[x(x-A) + y^2] \\
\nu &= 2\frac{R'}{A}\left\{x\left(\frac{C}{A}x - z\right) + \frac{C}{A}y^2\right\}
\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

so werden die Gleichungen (3) sich so darstellen:

$$\left.\begin{aligned}
m + n\beta + p\beta^2 &= (\mu + \beta\nu)\sqrt{1-\beta^2\varepsilon} \\
n + 2p\beta &= \frac{d}{d\beta}\left\{(\mu+\beta\nu)\sqrt{1-\beta^2\varepsilon}\right\}
\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Digitized by Google

Die Elimination von β macht nun keine Schwierigkeit und man könnte das Resultat in Form einer Determinante, welche die Gleichung der gesuchten Schattenfläche darstellt, sofort hinschreiben. Diese Gleichung hat aber einen viel zu hohen Grad und die Absonderung der unnöthigen Factoren ist verwickelt. In mathematischer Beziehung ist demnach die Form (5) nicht befriedigend. Für die zur Anwendung kommenden Fälle aber ist sie, wie aus dem Folgenden hervorgehen dürfte, recht geeignet. Wenigstens gelangt man durch verhältnissmässig nicht sehr complicirte Rechnungen zu den Resultaten, welche abgeleitet werden sollen.

Die Schattenfläche wird gebraucht, wenn man die Verfinsterungen der Trabanten in unserem Sonnensystem genauer zu verfolgen hat. Suchen wir die speciellen Erfordernisse auf, welche hier auftreten. Bei der Verfinsterung des Erdmondes ist eine ziemlich weit gehende Genauigkeit in den Angaben über den Verlauf der Schattenfläche erwünscht. Hier ist aber ε rund $\frac{1}{150}$, also eine sehr kleine Grösse und man wird demzufolge mit Vortheil nach Potenzen von ε entwickeln und wie sich leicht ergiebt mit der Mitnahme nur der ersten Potenz ausreichen. Unter diesen Voraussetzungen ist die Aufgabe von den Herren Hall, Souillart und besonders im Anschluss an Herrn Bruns von Herrn Hartmann vollständig gelöst worden. Im Folgenden wird das Resultat des Herrn Hartmann ebenfalls auftreten.

Bei den Jupitertrabanten ist ε nicht so klein, dass man hier ohne Weiteres ε^2 vernachlässigen kann. Hier tritt aber der Fall ein, dass die Trabanten sich sehr nahe in der Aequatorebene bewegen und demzufolge der Verlauf der Schattenfläche nur in der Nähe dieser Ebene gebraucht wird. Die Aufgabe ist von Laplace a. a. O. behandelt worden und die dort gegebene Lösung wird wohl den Anforderungen der Praxis genügen.

Es bleibt noch die Schattenfläche des Saturn zu be-

Digitized by Google

trachten übrig. ε ist hier (rund $\frac{1}{5}$) durchaus nicht klein; eine Entwicklung nach Potenzen von ε ist jedenfalls nicht einwurfsfrei, wenn man schon die zweiten Potenzen fortlassen will. Thut man Letzteres aber nicht, so werden die Entwicklungen äusserst complicirt, wenn sie auch durchführbar sind. Es finden bei den Saturntrabanten aber andere Umstände statt, die sehr weitgehende Vernachlässigungen gestatten, besonders da hier eine grosse Genauigkeit der Formeln für die Praxis ziemlich bedeutungslos sein dürfte.

Nach dem Gesagten werden also die Verfinsterungen des Erdmondes und der Saturntrabanten zu behandeln sein.

Zuerst soll die Entwicklung von (5) nach Potenzen von ε vorgenommen werden.

Setzt man

$$\Phi(\beta) = -(\mu + \nu\beta)\left(\tfrac{1}{2}\beta^2\varepsilon + \tfrac{1}{8}\beta^4\varepsilon^2 + \ldots\right)$$

so wird (5):

$$(m - \mu) + (n - \nu)\beta + p\beta^2 = \Phi(\beta)$$

$$(n - \nu) + 2p\beta = \frac{d\Phi}{d\beta}$$

Wird nun noch gesetzt:

$$\beta_0 = -\frac{n - \nu}{2p}; \quad \beta = \beta_0 + \Delta\beta$$

so ist $\Delta\beta$ eine Grösse vom Range ε. Nimmt man zunächst überall noch ε^2 mit, so erhält man

$$4p(m - \mu) - (n - \nu)^2 = 4p\left\{\Phi(\beta_0) + \Phi'(\beta_0)\Delta\beta - p\Delta\beta^2\right\}$$

und da bis auf Glieder vom Range ε

$$\Delta\beta = \frac{1}{2p}\Phi'(\beta_0)$$

ist, so wird die Gleichung der Schattenfläche

$$4p(m - \mu) - (n - \nu)^2 = 4p\Phi(\beta_0) + [\Phi'(\beta_0)]^2 \qquad (6)$$

Digitized by Google

Wenn man nun die Glieder vom Range ε^2 fortlässt, so ist das zweite Glied rechts zu streichen und zu setzen

$$\Phi = -\tfrac{1}{2}(\mu + \nu\beta_0)\beta_0^2\varepsilon$$

Den Grössen μ und ν kann man auch durchweg das negative Vorzeichen vorsetzen.

Dieses doppelte Vorzeichen bezieht sich, wie leicht zu sehen, auf die beiden Schalen der Schattenfläche, welche den Kern- und Halbschatten begrenzen. Man braucht nur das eine Vorzeichen zu berücksichtigen und dann im Resultat R' mit $-R'$ zu vertauschen. Für die Anwendung auf Mondfinsternisse ist es am zweckmässigsten, wenn man den Durchschnitt der Schattenfläche mit einer Ebene aufsucht, die senkrecht auf der Verbindungslinie Sonne-Erde steht und nicht weit vom Mondmittelpunkte entfernt ist. Nennt man die Entfernung Sonne-Erde D, lässt in diese Richtung die ξ-Axe eines rechtwinkligen Coordinatensystems fallen, dessen Anfang im Erdmittelpunkte sich befindet, dessen y-Axe zu der früheren parallel läuft und dessen ζ-Axe senkrecht darauf nach Norden zeigt, so hat man:

$$x = A + \xi\frac{A}{D} - \zeta\frac{C}{D}$$

$$z = C + \xi\frac{C}{D} + \zeta\frac{A}{D}$$

Wird noch zur Abkürzung gesetzt

$$\sigma = \frac{R - R'}{A};\ \chi = x\sigma - R$$

so wird

$$m - \mu = \chi^2 - y^2(1 - \sigma^2)$$

$$n - \nu = -2\chi\zeta\frac{D}{A} + 2\frac{C}{A}y^2\sigma$$

$$\nu = 2\frac{R'}{A}\left[\frac{C}{A}y^2 - x\zeta\frac{D}{A}\right]$$

$$p = \frac{D^2}{A^2}(y^2 + \zeta^2) - \frac{R'^2}{A^2}\varepsilon(x^2 + y^2)$$

Digitized by Google

Die Gleichung (6) wird jetzt:

$$4p(m-\mu)-(n-\nu)^2 = -4\varepsilon\frac{R'^2}{A^2}(x^2+y^2)(m-\mu)$$
$$+4y^2\left[\left(\chi\frac{D}{A}+\zeta\frac{C}{A}\sigma\right)^2-(y^2+\zeta^2)\left(\frac{D^2}{A^2}-\sigma^2\right)\right]$$
$$=-(\mu+\nu\beta_0)\cdot 2p\beta_0^2\varepsilon$$

In den mit ε multiplicirten Gliedern darf aber angenommen werden:

$$\beta_0^2=\frac{(n-\nu)^2}{4p^2}=\frac{m-\mu}{p}$$

und es wird also, wenn der Ausdruck in der eckigen Klammer für den Augenblick mit I bezeichnet wird,

$$4y^2 I=\varepsilon p\beta_0^2\left\{4\frac{R'^2}{A^2}(x^2+y^2)-2(\mu+\nu\beta_0)\right\},$$

was man nach leichter Zwischenrechnung und mit Vernachlässigung von ε^2 schreiben kann:

$$I=\frac{D^2}{A^2}\cdot\frac{R'}{A}\left\{-\zeta^2\sigma-x^2\sigma+Rx-\frac{A^2}{D^2}y^2\sigma-2x\sigma\frac{C}{D}\zeta\right.$$
$$\left.+R\frac{C}{D}\zeta\right\}\cdot\beta_0^2\varepsilon \tag{7}$$

In dem Ausdrucke I ist aber weiter

$$\chi+\zeta\frac{C}{D}\sigma=\xi\frac{R-R'}{D}-R'=-\varrho_0, \tag{8}$$

wenn man mit ϱ_0 den Radius der Kugel bezeichnet, die mit dem Mittelpunkt in ξ den im Falle $\varepsilon=0$ entstehenden Schattenkegel berührt; ferner ist in (7) einzusetzen:

$$\beta_0^2=\frac{m-\mu}{p}=\frac{\left(\varrho_0+\zeta\frac{C}{D}\sigma\right)^2-y^2(1-\sigma^2)}{\frac{D^2}{A^2}\varrho_0^2}$$

Digitized by Google

Man kann sich nun überaus leicht davon überzeugen, dass man von der Erde gesehen die Schattenfläche in der Entfernung des Mondes nur um einige hundertstel Secunden verschieben kann, wenn man einfach setzt

$$\beta_0^2 = \frac{A^2}{D^2} \cdot \frac{\zeta^2}{\varrho_0^2},$$

ferner in der Klammer der Formel (7) als unmerklich fortstreicht das erste, vierte und sechste Glied, schliesslich σ^2 gegen $\frac{D^2}{A^2}$ im Ausdrucke von I vernachlässigt. Auf diese Weise wird

$$\varrho_0^2 - (y^2 + \zeta^2) = \frac{R'}{A} \cdot \frac{A^2}{D^2} \cdot \frac{\zeta^2}{\varrho_0^2} \varepsilon \left\{ Rx - x^2\sigma - 2x\sigma \frac{C}{D} \zeta \right\}$$

Mit Hülfe der im Vorigen enthaltenen Gleichungen kann man dies auch schreiben

$$\varrho_0^2 - (y^2 + \zeta^2) = \frac{R'}{A} \cdot \frac{A^2}{D^2} \cdot \frac{\zeta^2}{\varrho_0^2} \cdot \varepsilon x \varrho_0 \cdot \left\{ 1 - \frac{\zeta}{\varrho_0} \cdot \frac{C}{D} \cdot \frac{R - R'}{A} \right\}$$

oder auch, ohne Fehler zu begehen, die mehr als wie die Hundertstel der Secunde alteriren können,

$$\varrho_0^2 - (y^2 + \zeta^2) = \frac{R'}{A} \cdot \frac{A^2}{D^2} \frac{\zeta^2}{\varrho_0^2} \varepsilon x \varrho_0 \tag{9}$$

und für x kann man für alle Fälle genügend genau

$$x = A + \xi \frac{A}{D}$$

setzen. Die Gleichungen (8) und (9) geben nunmehr die Schattenfläche bei Mondfinsternissen in der Nähe des Mondes mit fast vollkommener Strenge.

Der Durchschnitt derselben mit der Ebene $\xi =$ const. ist, wie man sofort sieht, eine Ellipse. Die beiden Halbaxen $\mathcal{A}$ und B liegen in der Richtung der y bezw. der ζ. Und es ergiebt sich sofort

Digitized by Google

$$\left.\begin{aligned} A = \varrho_0 = R' - \xi \frac{R - R'}{D} \\ B = \varrho_0 \left\{ 1 - \frac{\varepsilon}{2} \frac{R'}{\varrho_0} \frac{A^2}{D^2} \frac{\xi + D}{D} \right\} \end{aligned}\right\} . \tag{10}$$

Diese Formeln stimmen vollständig überein mit den von Herrn Hartmann gegebenen, die in der That die denkbar grösste Einfachheit bei wirklichen Ausrechnungen darbieten.

Wenn man nun die zweite oben erwähnte Aufgabe, die Schattenfläche des Saturn, wie sie bei den Verfinsterungen seiner Trabanten gebraucht wird, zu entwickeln, dadurch in Angriff nehmen wollte, dass man in der begonnenen nach Potenzen von ε fortschreitenden Entwicklung weiter geht, so wäre dieser Weg durchaus beschreitbar, aber äusserst umständlich; auch ist nur schwer auf diese Weise zu übersehen, welche Vernachlässigungen begangen werden. Dagegen stellt sich eine einfachere Lösung der Aufgabe dar, die den praktischen Erfordernissen genügen dürfte, wenn man berücksichtigt, dass an den Stellen, an welchen die Saturntrabanten in die Schattenfläche des Planeten treten, diese sich nicht weit von dem Tangentialkegel entfernt, den man vom Sonnenmittelpunkt aus an Saturn legen kann.

Man wird demnach von diesem Kegel als erster Näherung ausgehen können und die nöthigen Correctionen aufzusuchen haben. Den genannten Tangentialkegel erhält man, wenn man in den Gleichungen (5) $R = 0$ annimmt. Setzt man:

$$m_0 = \frac{R'^2}{A^2}(x^2 + y^2) - y^2; \quad m_1 = \frac{R^2}{A^2}[(x - A)^2 + y^2]$$

$$\lambda(\beta) = \mu \sqrt{1 - \beta^2 \varepsilon} - m_1 - n\beta$$

so kann man (5) schreiben

$$\left.\begin{aligned} m_0 + p\beta^2 = \beta \nu \sqrt{1 - \beta^2 \varepsilon} + \lambda(\beta) \\ 2p\beta = \frac{\nu(1 - 2\beta^2 \varepsilon)}{\sqrt{1 - \beta^2 \varepsilon}} + \lambda'(\beta) \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Digitized by Google

Wenn $\lambda = \lambda' = 0$ angenommen wird, so ergiebt die Elimination von β aus diesen Gleichungen den erwähnten Tangentialkegel. Setzt man noch zur Abkürzung

$$\Phi = m_0 + p\beta^2 - \beta\nu\sqrt{1-\beta^2}\varepsilon,$$

so wird man leicht die Correctionen bestimmen können, welche an die den Tangentialkegel bestimmenden Coordinaten angebracht werden müssen, um den Bedingungen der Schattenfläche zu genügen. Denkt man sich Polarcoordinaten in einer zur ξ-Axe des oben benutzten Coordinatensystems senkrechten Ebene eingeführt und setzt demgemäss

$$y = \varrho\cos\varphi; \quad \zeta = \varrho\sin\varphi; \quad \xi = \text{const.}$$

so kann Φ als Function von ϱ und φ angesehen werden. Einem bestimmten Werthe von φ entspricht in der Schattenfläche ein Werth $\varrho = \varrho_0 + \Delta\varrho$, wo ϱ_0 das demselben Werthe von φ entsprechende ϱ für den Tangentialkegel ist. Aber zu gleicher Zeit muss auch $\beta = \beta_0 + \Delta\beta$ gesetzt werden, wenn β_0 der Werth von β für $\lambda = 0$ ist. Entwickelt man nun die Gleichungen (11), welche sich so schreiben lassen

$$\Phi(\beta, \varrho) = \lambda(\beta, \varrho)$$
$$\Phi'(\beta) = \lambda'(\beta)$$

und bedenkt man, dass $\Phi(\beta_0, \varrho_0) = 0$, $\frac{\partial\Phi(\beta_0, \varrho_0)}{\partial\beta_0} = 0$, so ergiebt sich

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\Phi}{\partial\varrho_0}\Delta\varrho + \ldots &= \lambda(\beta) \\ \frac{\partial^2\Phi}{\partial\varrho_0\partial\beta_0}\Delta\varrho + \frac{\partial^2\Phi}{\partial\beta_0^2}\Delta\beta + \ldots &= \frac{\partial\lambda(\beta)}{\partial\beta} \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

So wird man durch successive Näherungen zu den richtigen Werthen von $\Delta\varrho$ und $\Delta\beta$ gelangen können. In erster Näherung ist aber

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\varrho_0}\Delta\varrho = \lambda(\beta_0) \tag{13}$$

Digitized by Google

und da man bei den Saturntrabanten hierdurch den Verlauf der Schattenfläche (vom Saturn aus gesehen) auf einige Secunden genau erhält, so wird man, wie noch erörtert werden soll, dabei stehen bleiben können. Es soll nur diese Näherungsformel entwickelt werden.

Die ϱ_0 und β_0 werden aus den beiden Gleichungen bestimmt:

$$m_0 + p\beta_0^2 = \beta_0 \nu \sqrt{1 - \beta_0^2 \varepsilon}$$

$$2p\beta_0 = \frac{\nu(1 - 2\beta_0^2 \varepsilon)}{\sqrt{1 - \beta_0^2 \varepsilon}}$$

Hieraus folgt:

$$\beta_0^2 = \frac{2m_0^2}{\nu^2 - 2m_0 p} = \frac{\nu^2 - 2m_0 p}{2(\nu^2 \varepsilon + p^2)}$$

Die Gleichung des Tangentialkegels ist hiernach

$$\nu^2 = 4m_0(p + m_0 \varepsilon) \tag{14}$$

Für die weiteren Reductionen sind noch von Werth die Relationen:

$$\beta_0^2 = \frac{m_0}{p + 2m_0 \varepsilon}; \quad \sqrt{1 - \beta_0^2 \varepsilon} = \frac{\nu}{2m_0}\beta_0; \quad 1 - \beta_0^2 \varepsilon = \frac{p + m_0 \varepsilon}{p + 2m_0 \varepsilon}$$

Will man (14) vollständig entwickelt hinschreiben, so muss man die Hülfsgrössen m_0, m_1, n etc. nach (4) einführen. Man kann diese aber so schreiben:

$$m_0 = \frac{R'^2}{A^2}(x^2 + y^2) - y^2; \quad m_1 = \frac{R'^2}{A^2}\left\{(x - A)^2 + y^2\right\}$$

$$n = \frac{2R}{A}\left(\frac{C}{A}\varrho^2 - \xi\zeta\right); \quad p = \frac{D^2}{A^2}\varrho^2 - \frac{R'^2}{A^2}\varepsilon(x^2 + y^2)$$

$$\mu = \frac{2RR'}{A^2} \cdot \left\{y^2 + x\xi\frac{A}{D} - x\zeta\frac{C}{D}\right\};$$

$$\nu = \frac{2R'}{A} \cdot \left\{\frac{C}{A}\varrho^2 - \zeta D - \xi\zeta\right\}$$

Digitized by Google

Die Gleichung (14) gestaltet sich jetzt so:

$$\left(1 - \frac{R'^2}{A^2}\right)\frac{D^2}{A^2}\varrho_0^2 - \varepsilon y^2 =$$

$$\frac{R'^2}{A^2}\left\{\left(\frac{D^2}{A^2} - \varepsilon\right)x^2 - \varepsilon y^2 - \frac{C^2}{A^2}y^2 + 2\frac{C}{A}\cdot\frac{D}{A}x\zeta\right\}$$

Wenn man aber bedenkt, dass für Saturn $\frac{R'}{A}$ sehr klein ist ($< \frac{1}{20000}$) und y sowohl als auch ζ gegen x ebenfalls, so wird man mit hinreichender Genauigkeit setzen dürfen

$$\frac{D^2}{A^2}\varrho_0^2 - \varepsilon y^2 = \frac{R'^2}{A^2}\left(\frac{D^2}{A^2} - \varepsilon\right)x^2 \tag{15}$$

Hierdurch ist nun ϱ_0 bestimmt. Um auch (13) vollständig zu entwickeln, wäre jetzt eine etwas umständlichere Rechnung auszuführen. Man vereinfacht aber die Sachlage durch weitere Vernachlässigungen, welche die Schattenfläche in dem betrachteten Falle, wo es sich um die Verfinsterung der Saturntrabanten handelt, ebenfalls höchstens um einige Bogensecunden verschieben können. Diese Vernachlässigungen und deren Berechtigung ergeben sich aus den folgenden Werthen, die man den Hülfsgrössen m_0, m_1 etc. geben kann:

$$\left.\begin{aligned} m_0 &= \frac{R'^2}{A^2}x^2 - y^2; \quad m_1 = 0; \quad n = -2\frac{R}{A}\cdot\xi\zeta \\ p &= \frac{D^2}{A^2}\varrho^2 - \frac{R'^2}{A^2}\varepsilon x^2; \quad \mu = \frac{2RR'}{A^2}x\xi\frac{A}{D}; \\ \nu &= -\frac{2R'}{A}\cdot\frac{D}{A}x\zeta \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Hierdurch wird, weil auch x in den vorstehenden Gleichungen nahezu unabhängig von ϱ_0 ist:

Digitized by Google

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \varrho_0} = \frac{1}{\varrho_0} \cdot \left\{ -2y^2 + 2\frac{D^2}{A^2}\varrho_0^2\beta_0^2 - \nu\beta_0\sqrt{1-\beta_0^2\varepsilon} \right\}$$

Man kann aber die rechte Seite mit Hülfe der oben angegebenen Relationen so darstellen:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \varrho_0} = -\frac{2y^2}{\varrho_0} \cdot \frac{\frac{R'^2}{A^2}\left(\frac{D^2}{A^2} - \varepsilon\right)x^2}{\frac{R'^2}{A^2} \cdot \frac{D^2}{A^2}x^2 - \varepsilon y^2}$$

Für die rechte Seite von (13) ergiebt sich zunächst:

$$\lambda(\beta_0) = \frac{\beta_0}{2m_0} \cdot (\mu\nu - 2nm_0)$$

und wenn man (16) benutzt, so wird schliesslich mit ausreichender Genauigkeit

$$\Delta\varrho = \pm\frac{R}{D}\xi\frac{\varrho_0}{R'}\sqrt{\frac{D^2R'^2 - \varepsilon A^2y^2}{R'^2(D^2 - A^2\varepsilon)}} \tag{17}$$

Diese Formel lässt an Einfachheit nichts zu wünschen übrig. Wollte man auch noch die zweiten Potenzen von ε fortlassen, so ergäbe sich einfach $\Delta\varrho = \pm\frac{R}{D}\xi$, was eigentlich auch schon der Genauigkeit, welche die hier in Frage kommenden Beobachtungen verlangen, voraussichtlich genügen dürfte.

Was den letzteren Punkt betrifft, so ist vor allem zu bemerken, dass die Grenze sowohl des Kernschattens als auch des Halbschattens eine rein mathematische Fiction ist, welche in den Beobachtungen nicht klar hervortreten kann. Wie der Halbschatten in unmerklichen Abstufungen in die volle Helligkeit übergeht, so bedeutet die Grenze des Kernschattens nichts anderes, als den Ort, wo der Halbschatten

Digitized by Google

anfängt, sich in stetiger Weise aufzuhellen. Ich habe die Verhältnisse, wie sie sich in Folge dieser Umstände bei Mondfinsternissen darstellen, an einem anderen Orte[1]) besprochen und gezeigt, dass sich die Grenze des Kernschattens in Folge physiologischer Einwirkungen für das beobachtende Auge in den Halbschatten hinaus scheinbar verschieben muss. Es entsteht so das bekannte Phänomen der scheinbaren Vergrösserung des Erdschattens. Ich habe dort einen Ausdruck abgeleitet für das Verhältniss der Helligkeit J, welche in der scheinbaren Entfernung x (hier gesehen von Saturn aus) von der Grenze des Kernschattens stattfindet, zu der ungeschwächten Helligkeit J_0 und den Ausdruck gefunden:

$$\frac{J}{J_0} = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{5\lambda + 1}{\sqrt{\lambda(\lambda - 1)}} \cdot \left(\frac{Dx}{2R}\right)^{\frac{3}{2}}$$

worin $\lambda = \frac{R'}{R} \cdot \frac{D}{\xi}$. Nimmt man, was in runden Zahlen ungefähr den Verhältnissen entspricht, wie sie bei den Verfinsterungen des Japetus durch Saturn stattfinden, $\frac{\xi}{R'} = 60$, $\frac{R}{D} = \frac{1}{1800}$, so wird $\lambda = 30$ und wenn x'' den Werth von x in Bogensecunden bedeutet:

$$\frac{J}{J_0} = [6 \cdot 672 - 10]\,(x'')^{\frac{3}{2}}$$

Hieraus folgt für $x'' = 5$: $\frac{J}{J_0} = 0.005$ und für $x'' = 10$: $\frac{J}{J_0} = 0.015$.

Mit Hülfe dieser Zahlen wird man leicht ermessen können, dass die Beobachtung des Eintritts nicht sehr sicher sein kann — bei Japetus entspricht einer Zeitminute ein

1) Vierteljahrsschrift der Astronomischen Gesellschaft. Jahrgang 27. S. 197 ff.

Digitized by Google

Bogen von 11″ vom Saturn aus gesehen — und dass es auf die Feststellung der Schattengrenze auf einige Bogensecunden auch dann nicht ankommen kann, wenn sehr grosse Fernrohre zur Verfügung stehen. Wesentlicher Einfluss kommt hierbei auch noch dem Umstande zu, dass die Trabanten keine Punkte, sondern ausgedehnte Massen sind. Doch ist hier nicht der Ort, auf diese Gegenstände näher einzugehen.

Digitized by Google

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der Bayerischen Akademie der Wissenschaften München

Jahr/Year: 1895

Band/Volume: 1894

Autor(en)/Author(s): Seeliger Hugo Johann

Artikel/Article: Ueber den Schatten eines Planeten 423-438