Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Classe

der

k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.

Band XXV. Jahrgang 1895.

München.

Verlag der K. Akademie.

1896.

In Commission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).

Ueber den Cauchy'schen Integralsatz.

Von **Alfred Pringsheim.**

(Eingelaufen 7. Januar.)

Der Satz, dass ein über eine complexe Werthenreihe ausgedehntes Integral von der Form $\int_{z_0}^{z} f(z) \cdot dz$ unter gewissen Bedingungen von der Wahl der zwischen z_0 und z gelegenen Zwischenwerthe, dem „Integrationswege“, unabhängig ist, oder, was im Wesentlichen dasselbe besagt, dass unter analogen Bedingungen das Integral $\int f(z) \cdot dz$, erstreckt über einen geschlossenen Integrationsweg, verschwindet, wird wohl ziemlich allgemein schlechthin als der Cauchy'sche Integralsatz bezeichnet und zwar wohl nicht lediglich darum, weil er von Cauchy zuerst ausgesprochen und bewiesen wurde[1] (denn so verstanden gibt es eine ganze Anzahl Cauchy'scher Integralsätze), sondern weil er als die eigentliche Grundlage der modernen

[1] Soviel mir bekannt ist, in dieser Form zum ersten Male in dem 1825 als besonderes Heft herausgegebenen „Mémoire sur les intégrales définies prises entre des limites imaginaires“, § 3. — In Laurent's Traité d'Analyse (T. III, p. 257) und Kronecker's Vorlesungen über Integrale (p. 52) wird das Jahr 1814 als Publicationsjahr angegeben. Obschon dieser Bemerkung eine nähere Quellenangabe nicht beigefügt ist, so lässt sich doch mit ziemlicher Sicherheit annehmen, dass dieselbe auf das im Jahre 1814 der Pariser Akademie vorgelegten „Mémoire sur les intégrales définies“ (Oeuvres complètes, T. I, p. 399—506) zurückzuführen sein dürfte. Sollte dies aber wirklich der Fall sein, so muss jene Angabe als

Functionentheorie im Cauchy-Riemann'schen Sinne ohne jeden Vorbehalt eine der bewunderungswürdigsten und frucht-

---

unrichtig oder vielmehr als nur theilweise richtig bezeichnet werden. In der eben erwähnten Abhandlung finden sich nämlich in Bezug auf den fraglichen Gegenstand nur die folgenden Gleichungen (mit unerheblichen, zum Zwecke leichteren Verständnisses hier vorgenommenen Aenderungen der dort angewandten Bezeichnung):

$$\int_0^x S(\xi, y) \cdot d\xi - \int_0^x S(\xi, 0) \cdot d\xi = \int_0^y U(x, \eta) \cdot d\eta - \int_0^y U(0, \eta) \cdot d\eta$$

wo S, U Funktionen von ξ, η bezeichnen, welche der Differentialgleichung $\frac{\partial S}{\partial \eta} = \frac{\partial U}{\partial \xi}$ genügen (a. a. O. p. 334, Gl. 4), und ferner:

$$\int_0^x f(\xi + y\,i) \cdot d\xi - \int_0^x f(\xi) \cdot d\xi = i\int_0^y f(x + \eta\,i) \cdot d\eta - i\int_0^y f(\eta\,i) \cdot d\eta$$

(p. 340, Fussnote, Gl. B). Diese Gleichungen enthalten allerdings den betreffenden Satz, aber nur für den speciellen Fall eines Rechtecks als Integrationsweg. Die wesentliche Bedeutung des Cauchy'schen Satzes für die Functionentheorie liegt aber gerade in seiner Anwendbarkeit auf einen beliebigen Integrationsweg. Und wenn es auch keine besondere Schwierigkeit hat, aus der Gültigkeit des Satzes für ein Rechteck durch einen geeigneten Grenzübergang jene allgemeinere Form abzuleiten (wie dies z. B. auch in dem hier weiter unten abzuleitenden Beweise geschieht: cf. § 4), so kann doch von einer derartigen Verallgemeinerung überhaupt erst dann die Rede sein, wenn der Begriff eines Integrals von der Form $\int(S \cdot dx + U \cdot dy)$ oder $\int f(z) \cdot dz$, genommen über einen beliebigen Integrationsweg, wirklich definirt ist. Eine solche Definition findet sich aber wohl zum ersten Male in der genannten Abhandlung von 1825 (§ 2 und § 9), wenigstens ist in dem „Résumé des leçons sur le calcul infinitésimal" vom Jahre 1823 hiervon noch keine Rede, und Cauchy bemerkt auch in der Einleitung zu jener Abhandlung ganz ausdrücklich, dass keine einzige aller bisher erschienenen Arbeiten „den Grad von Allgemeinheit genügend fixirt habe, dessen ein solches Integral fähig ist". Durch die Veröffentlichung des Briefwechsels zwischen Gauss und Bessel (1880) ist die merkwürdige Thatsache bekannt geworden, dass Gauss den fraglichen Satz in seiner allgemeinen Fassung schon im Jahre 1811 kannte. (Brief an Bessel vom 18. December 1811.) Er ist indessen niemals barsten Entdeckungen des grossen Mathematikers genannt werden darf.

Cauchy bewies den fraglichen Satz mit Hülfe von Continuitätsbetrachtungen: er zeigte, dass bei einer unendlich kleinen Verschiebung der Integrationscurve mit Festhaltung der Endpunkte das obige Integral nur um eine unendlich kleine Grösse zweiter Ordnung geändert wird, oder anders ausgesprochen,[1]) dass die Variation des Integrals den Werth Null hat. Die Beweise, die sich in der Mehrzahl französischer Lehrbücher für jenen Satz finden, sind im Wesentlichen einfache Reproductionen oder Modificationen dieses Cauchy'schen Beweises. Meiner Ansicht nach haftet allen diesen Beweisen, nach dem Maassstabe moderner analytischer Anschauungen gemessen, ein mehr oder weniger erhebliches Manco von überzeugender Strenge an. Entweder sie wenden die Principien der Variationsrechnung, deren strenge Begründung zu den schwierigsten Problemen der Infinitesimalrechnung gehört, mit einer Unbedenklichkeit an, die durch das Maass der gemachten Voraussetzungen kaum gerechtfertigt ist.[2]) Oder sie suchen mit Umgehung der Variations-

---

wieder darauf zurückgekommen, und es scheint, dass sich auch in seinem Nachlasse keinerlei Aufzeichnungen hierüber vorgefunden haben. Man wird daher wohl Kronecker nur Recht geben können, wenn er hieran anknüpfend a. a. O. folgendes bemerkt: „Es ist doch ein grosser Unterschied, ob Jemand eine mathematische Wahrheit mit vollem Beweise und der Darlegung ihrer ganzen Tragweite veröffentlicht oder ob ein Anderer sie nur so nebenher einem Freunde unter Discretion mittheilt. Desshalb können wir den Satz mit Recht als das Cauchy'sche Theorem bezeichnen."

[1]) a. a. O. p. 6: „Ainsi la démonstration du principe ci-dessus énoncé repose sur cette seule observation, que la variation de l'intégrale est nulle."

[2]) Man sehe z. B. Briot et Bouquet, Fonctions doublement périodiques (1859) p. 20. — Bertrand, Calcul intégral (1870) p. 295. — Laurent, Fonctions elliptiques (1880) p. 6; desgl. Traité d'Analyse (1888) T. III, p. 210. — Picard, Traité d'Analyse (1891/93) T. I, p. 77; T. II, p. 4.

rechnung deren Princip durch eine directe Infinitesimalbetrachtung zu ersetzen, imputiren aber dabei der Function $f(z)$ eine für alle diese Beweise unentbehrliche Eigenschaft ziemlich complicirter Natur, welche entweder ganz direct in die Voraussetzung aufgenommen oder zuvor auf Eigenschaften einfacherer Art zurückgeführt werden müsste. Es ist dies die Annahme, dass der Differenzenquotient $\frac{f(z+h)-f(z)}{h}$ für alle in Betracht kommenden Werthe von z gleichmässig nach $f'(z)$ convergirt, d. h. dass nach Vorgabe einer beliebig kleinen positiven Grösse ε sich eine positive Grösse ϱ angeben lässt, sodass:

$$\left|\frac{f(z+h)-f(z)}{h}-f'(z)\right|<\varepsilon \quad \text{wenn nur:} \ |h|<\varrho$$

für alle in Betracht kommenden Werthe von z.[1]) Nimmt man diese Eigenschaft ohne weiteres in die Voraussetzung des Satzes auf, so verliert derselbe vollständig seinen einfachen und elementaren Charakter. Man müsste also vor

---

[1]) Ohne diese Annahme fällt z. B. der überhaupt wenig streng gehaltene Beweis bei Camille Jordan, Cours d'Analyse, T. II (1888) p. 275; aber auch der sorgfältiger durchgeführte Beweis von Briot et Bouquet, Théorie des fonctions elliptiques (1875), p. 128—132, und ein mit dem eben genannten nahe verwandter von Mittag-Leffler: Göttinger Nachrichten 1875, p. 65—73. (Ein in dem letztgenannten Aufsatze angeführter, angeblich vollkommen strenger Beweis von Malmsten war mir leider bisher nicht zugänglich, da er nur in schwedischer Sprache erschienen ist (1865)).

Der gleiche Vorwurf trifft auch den anscheinend sehr einfachen Beweis, den Herr Goursat im 4. Bande der Acta mathematica (1884) veröffentlicht hat. Uebrigens wird die scheinbare Kürze dieses Beweises auch noch dadurch ziemlich illusorisch, dass die von vornherein als erwiesen angenommene Gültigkeit des Cauchy'schen Satzes für $\int dz$, $\int z\,dz$ in Wahrheit eine Grenzbetrachtung erfordert, die nicht wesentlich einfacher ausfällt, als die in § 2 dieses Aufsatzes allgemeiner durchgeführte.

Allem versuchen, dieselbe etwa aus der vorauszusetzenden Stetigkeit[1]) von $f'(z)$ abzuleiten, ein Unternehmen, das, wenn überhaupt durchführbar, zweifellos auf ziemlich schwierige und umständliche Betrachtungen führt, da es sich bei dem obigen Differenzenquotienten in Wahrheit um eine Function von 4 Veränderlichen (nämlich: $z = x + yi$, $h = \xi + \eta i$) handelt.

Eine völlig andere Methode schlug bekanntlich Riemann beim Beweise des in Rede stehenden Satzes ein, indem er denselben auf einen Specialfall des Green'schen Satzes gründete, nämlich auf die Reduction eines über ein gewisses Ebenenstück zu erstreckenden Doppelintegrals von der Form $\int\int\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \cdot dy$ auf ein einfaches Integral $\int(P \cdot dx + Q \cdot dy)$ erstreckt über die Begrenzung.[2]) Dieser Beweis ist ziemlich unverändert in fast alle einschlägigen deutschen Lehrbücher,[3]) aber auch in viele ausländische[4]) übergegangen und wird ganz allgemein ausdrücklich als der „Riemann'sche" Beweis des Cauchy'schen Satzes bezeichnet: wie mir scheint, mit einigem Unrecht. Denn wenn auch

---

[1]) Bei der grossen Mehrzahl der angeführten Beweise wird sogar nur die Endlichkeit, nicht die Stetigkeit von $f'(z)$ vorausgesetzt, wodurch deren Grundlagen noch problematischer werden.

[2]) Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen etc. (Inauguraldissertation, 1851).

[3]) Man vgl. z. B. die Lehrbücher über Functionentheorie oder elliptische bezw. Abel'sche Functionen von Durège, Thomae, Königsberger, Neumann, sowie die Compendien der Analysis von Schlömilch, Lipschitz, Harnack.

[4]) Man sehe z. B. Houël, Théorie élémentaire des quantités complexes; desgl. Calcul infinitésimal, T. III. — Hermite, Cours d'Analyse (réd. par Andoyer). — Casorati, Teorica delle funzione. — Auch mehrere der schon oben genannten Compendien (Bertrand, Laurent), welche den Beweis neben dem Cauchy'schen ausdrücklich als den Riemann'schen anführen.

derselbe erst durch Riemann's Darstellung allgemeine Verbreitung gefunden hat, so lässt sich doch mit unbestreitbarer Sicherheit nachweisen, dass Cauchy bereits fünf Jahre vor dem Erscheinen der Riemann'schen Dissertation ihn nicht nur gekannt, sondern in der Hauptsache auch publicirt hat. Da ich nach dem Gesagten wohl annehmen darf, dass diese Thatsache bisher völlig unbemerkt geblieben ist, so möchte ich an dieser Stelle folgendes darüber mittheilen:

Im 23. Bande der Comptes Rendus findet sich auf S. 251 eine Note von Cauchy mit dem Titel: „Sur les intégrales qui s'étendent à tous les points d'une courbe fermée." In dieser Note wird zunächst das Integral $(S) = \int k \cdot ds$ erstreckt über die Begrenzung einer Fläche S bei beliebiger Anzahl von Variablen bezw. Dimensionen definirt, alsdann aber heisst es wörtlich folgendermassen (S. 254):

„Lorsque, la surface S étant plane, x, y se réduisent à deux coordonnées rectilignes, ou polaires, ou de toute autre nature, propre à déterminer la position d'un point dans le plan de la surface S, alors, en désignant par X, Y deux fonctions continues des variables x, y et supposant

$$k = X \cdot D_s x + Y \cdot D_s y$$

on a

$$(S) = \pm \iint (D_y X - D_x Y)\, dx\, dy$$

l'intégrale double s'étendant à tous les points de la surface S."

Nun folgt eine Bemerkung über die Bestimmung des zweifelhaften Vorzeichens, worauf Cauchy folgendermassen fortfährt:

„Dans le cas particulier où la somme

$$X\,dx + Y\,dy$$

est une différentielle exacte, on a

$$D_y X = D_x Y$$

et la formule qui détermine la valeur de (S) se réduit à l'équation déjà trouvée

$$(S) = 0."$$

Das ist aber in der That ganz genau der fragliche „Riemann'sche" Beweis mit dem einzigen Unterschiede, dass die Rechnung, welche zur Reduction des doppelten Integrals auf das einfache dient, an dieser Stelle nicht mitgetheilt wird.[1]) Cauchy setzt eben diese Reductionsformel einfach als bekannt voraus, und das war sie ja auch damals schon seit längerer Zeit.[2]) Wirklich neu ist nur ihre äusserst sinnreiche Anwendung auf den vorliegenden Fall, deren Priorität man bisher fälschlich Riemann zugeschrieben hat. Riemann selbst hat wohl niemals jenen Beweis als sein specielles Eigenthum in Anspruch genommen, und es erscheint auch relativ bedeutungslos, darüber Vermuthungen anstellen zu wollen, ob er die citirte Note gekannt haben möge oder nicht. Hingegen halte ich es für nicht unwichtig, an dieser Stelle einmal die Frage aufzuwerfen, ob denn

---

[1]) Im Eingange der betreffenden Note theilt Cauchy der Akademie mit, dass er sich an dieser Stelle auf einen kurzen Auszug beschränke, da er die eigentliche Abhandlung demnächst in seinen Exercices d'Analyse et de Physique mathématique publiciren wolle. Dies ist indessen aus mir unbekannten Gründen unterblieben, und, soviel ich feststellen konnte, ist die angekündigte Abhandlung auch an keiner anderen Stelle gedruckt worden. Hierüber bezw. ob sich dieselbe vielleicht in Cauchy's Nachlasse vorgefunden hat, werden vielleicht die noch im Erscheinen begriffenen Oeuvres complètes Aufklärung bringen.

[2]) Die Abhandlung von Green: „An essay on the application of mathematical analysis to the theories of electricity and magnetism", auf welche man ja bekanntlich die fragliche Formel zurückzuführen pflegt, ist schon im Jahre 1828 erschienen.

zwischen den Arbeiten Cauchy's und Riemann's berühmter Dissertation überhaupt kein nachweisbarer Zusammenhang besteht? Es muss doch sicherlich sehr merkwürdig erscheinen, dass der Name Cauchy's in jener Schrift mit keiner Silbe erwähnt wird, wenn man bedenkt, dass zu jener Zeit nicht nur Cauchy nächst Gauss wohl unbestritten als der bedeutendste unter den lebenden Mathematikern galt, sondern dass auch gerade er von seinem ersten Auftreten an einen grossen Theil seiner gesammten literarischen Production ganz speciell der consequenten Einführung der complexen Grössen in die Analysis gewidmet und auf diesem Gebiete damals eine ganze Reihe von Resultaten bereits publicirt hatte, die für die Entwickelung der Functionentheorie in der von Riemann verfolgten Richtung als fundamental anzusehen sind; ich nenne ausser dem hier in Rede stehenden Satze nur die Einführung des Begriffes der monogenen d. h. mit einem von der Differentiationsrichtung unabhängigen Differentialquotienten versehenen Function,[1]) ihre Entwickelbarkeit in Potenzreihen,[2]) die Definition der Periodicitätsmoduln („indices de périodicité") eines Integrals und die hieraus resultirende Periodicität der Umkehrungsfunctionen.[3]) Obschon die Priorität Cauchy's in diesen und einer Reihe daran anknüpfender Fragen wohl niemals ernstlich bestritten worden ist, so erschien es mir

[1]) Nouv. Exerc. T. IV p. 346 (1847). Hier findet sich wohl zum ersten Male der Ausdruck „monogen" und dessen Definition durch die Bedingung:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{i} \cdot \frac{\partial f}{\partial y}.$$

[2]) Zuerst in einem 1832 zu Turin herausgegebenen lithographirten Mémoire (wieder abgedruckt 1841 im 2. Bande der Nouv. Exerc. p. 50). In anderer Form: Nouv. Exerc. T. I p. 269 (1840).

[3]) C. R., T. 23 p. 689 (1846). Diese Abhandlung enthält thatsächlich die vollständige Grundlage für die moderne Theorie der elliptischen und Abel'schen Functionen.

dennoch angemessen, bei dieser Gelegenheit einmal ausdrücklich hierauf hinzuweisen, da sich neuerdings eine gewisse Tendenz bemerkbar gemacht hat, die mit Recht ausserordentlich hohe Schätzung der Verdienste Riemann's um die Entwickelung der Functionentheorie bis zur Ueberschätzung auf Kosten nicht minder verdienstvoller Mathematiker auszudehnen.

Lässt sich nun auch gegen die Stichhaltigkeit des zuletzt besprochenen Beweises keine Einwendung machen (falls man noch die Stetigkeit oder wenigstens Integrabilität von $\frac{\partial Y}{\partial x}, \frac{\partial X}{\partial y}$ in die Voraussetzung aufnimmt), so scheint mir derselbe in Bezug auf Einfachheit und Natürlichkeit der Methode noch keineswegs denjenigen Anforderungen zu genügen, welche man an den Beweis eines so grundlegenden, gleichsam im Anfange einer ausgedehnten Disciplin stehenden Satzes stellen möchte. Die Herbeiziehung des Doppelintegrals wird, rein methodisch betrachtet, immer als ein nicht hinlänglich zu motivirender Umweg erscheinen und wirkt erfahrungsgemäss bei der Einführung in das Studium der Functionentheorie für den Anfänger äusserst erschwerend.[1])

Ich habe daher versucht, einen neuen und, wie ich glaube, sowohl hinlänglich einfachen, als strengen Beweis abzuleiten,[2]) dessen Mittheilung den Hauptzweck des vorliegenden Aufsatzes bildet. Ich benütze diese Gelegenheit,

---

[1]) Die Schwierigkeit, welche die Ableitung der Green'schen Reductionsformel dem Anfänger zu bereiten pflegt, hat Kronecker (cf. Berliner Sitzungsberichte von 1885 p. 785 und Vorlesungen über Integrale p. 37—41) dadurch zu vermindern gesucht, dass er die fragliche Formel zunächst für ein Dreieck oder ein Rechteck beweist und sodann das allgemeine Resultat mit Hülfe eines Grenzüberganges daraus zusammensetzt.

[2]) Derselbe berührt sich in mancher Beziehung mit den Betrachtungen, welche Herr Thomae über die Integration zweigliedriger Differentialien angestellt hat (s. Einleitung in die

um etwas genauer auf die Definition eines Integrals der Form $\int P \cdot dx + Q \cdot dy$, erstreckt über eine Curve, einzugehen und dabei gewisse Punkte zur Sprache zu bringen, die vielleicht vielfach bekannt, aber meines Wissens noch niemals scharf präcisirt worden sind.

Schliesslich will ich nur noch bemerken, dass die im Folgenden benützten Methoden auch eine Verallgemeinerung für die Betrachtung ein- und mehrfacher Integrale mit mehr als zwei Variablen gestatten, worauf ich vielleicht bei späterer Gelegenheit zurückzukommen gedenke.

§ 1. Definition und allgemeine Eigenschaften eines Curven-Integrals.

Es sei:

$$\eta = \varphi(\xi) \tag{1}$$

für das Intervall $x_0 \leqq \xi \leqq x$ eine eindeutige und stetige Function von ξ und zwar insbesondere:

$$\varphi(x_0) = y_0 \qquad \varphi(x) = y,$$

ferner $P(\xi, \eta)$ eine gleichfalls eindeutige und stetige Function von (ξ, η) für alle Werthe ξ des genannten Intervalles und die durch Gl. (1) zugeordneten Werthe von η. Alsdann hat das bestimmte Integral:

$$\int_{x_0, y_0}^{x, y} P(\xi, \eta) \cdot d\xi = \int_{x_0}^{x} P(\xi, \varphi(\xi)) \cdot d\xi$$

einen festen endlichen Werth und soll bezeichnet werden als das Integral von $P(\xi, \eta) \cdot d\xi$, genommen über den Integrationsweg C in der Richtung $x_0 \ldots x$, in Zeichen:

Theorie der bestimmten Integrale p. 36 ff.). Doch wird daselbst von einer Definition des unbestimmten Integrals von $(P \cdot dx + Q \cdot dy)$ ausgegangen, wodurch die ganze Beweisführung sehr wesentlich an Einfachheit und Durchsichtigkeit verliert.

$$\int_{(+C)} P(\xi, \eta) \cdot d\xi = \int_{x_0}^{x} P(\xi, \varphi(\xi)) \cdot d\xi$$

wenn C diejenige Punktreihe bedeutet, welche der Gleichung $\eta = \varphi(\xi)$ bezogen auf irgend ein Coordinatensystem — etwa, wie wir der Einfachheit halber annehmen wollen, ein gewöhnliches rechtwinkeliges — entspricht, während die Bezeichnung $(+C)$ andeuten soll, dass diese Punktreihe bei der Integration in der Richtung der wachsenden x durchlaufen werden soll. Wir pflegen diese Punktreihe schlechthin als Integrations-Curve und das betreffende Integral als ein Curven-Integral zu bezeichnen, obschon hierbei keineswegs stets an eine „eigentliche" Curve d. h. eine im allgemeinen mit einer bestimmten Tangente versehene stetige Linie zu denken ist: denn thatsächlich genügt für die Existenz des obigen Integrals die blosse Stetigkeit von $\varphi(\xi)$, ohne dass man genöthigt wäre, über das Vorhandensein eines im Allgemeinen bestimmten, endlichen Differentialquotienten irgendwelche Voraussetzung zu machen.[1])

Bezeichnet man mit $(-C)$ die nämliche Curve, falls die Integration in der entgegengesetzten Richtung vorge-

---

[1]) Gerade aus diesem Grunde gebe ich dem hier eingeschlagenen Wege den Vorzug vor dem fast allgemein üblichen, wobei das Integral zunächst als Grenzwerth einer Summe definirt und sodann dessen Existenz mit Hülfe einer Parameterdarstellung von der Form:

$$\xi = \varphi(t) \qquad \eta = \psi(t)$$

nachgewiesen wird. Bei diesem Verfahren ist die Voraussetzung eines integrablen Differentialquotienten $\varphi'(t)$ und ebenso für das sogleich noch einzuführende Integral $\int_{(c)} Q(\xi, \eta) \cdot d\eta$ die analoge Voraussetzung bezüglich $\psi'(t)$ unerlässlich, was mir aus dem Grunde wenig wünschenswerth erscheint, weil hierdurch die Vorstellung von dem Zustandekommen eines solchen Integrals nicht nur eine zu eng begrenzte, sondern in gewissem Sinne geradezu eine principiell unrichtige wird, wie später noch des näheren erörtert werden soll.

nommen wird, so folgt ohne Weiteres aus der obigen Definition, dass:

$$\int\limits_{(-C)} P(\xi, \eta) \cdot d = -\int\limits_{(+C)} P(\xi, \eta)\, d\,\xi \tag{3}$$

und ferner, wenn man die Curve C in eine beliebige Anzahl, in dem gleichen Sinne wie C zu durchlaufender Theilcurven c_ν $(\nu = 1, 2, \cdots n)$ zerlegt denkt:

$$\int\limits_{(C)} P(\xi, \eta) \cdot d\,\xi = \sum_{1}^{n}{}_{\nu} \int\limits_{(c_\nu)} P(\xi, \eta) \cdot d\,\xi. \tag{4}$$

Schliesslich erkennt man auch, dass das Integral (2) einer ganz analogen Mittelwerthrelation genügt, wie die gewöhnlichen bestimmten Integrale e i n e r Veränderlichen, nämlich:

$$\int\limits_{(C)} P(\xi, \eta) \cdot d\,\xi = P(\xi', \eta') \cdot (x - x_0) \tag{5}$$

wo (ξ', η') ein passendes Werthepaar aus dem Gebiete:

$$x_0 \leqq \xi \leqq x \qquad \eta = \varphi(\xi),$$

also einen gewissen Punkt der Curve C bedeutet. Diese Beziehung lehrt insbesondere, dass der Integralwerth gleichzeitig mit $(x - x_0)$ gegen Null convergirt (d. h. zunächst immer unter der Voraussetzung, dass $\eta = \varphi(\xi)$ eine e i n d e u t i g e Function).

Hat die Gleichung $\eta = \varphi(\xi)$ die specielle Form $\eta = y_0$, wo y_0 eine Constante bedeutet, d. h. reducirt sich die Curve C auf eine zur X-Axe parallele Gerade, so folgt ohne Weiteres aus der Definition, dass:

$$\int\limits_{(C)} P(\xi, \eta) \cdot d\,\xi = \int\limits_{x_0}^{x} P(\xi, y_0) \cdot d\,\xi \tag{6}$$

wird. Dagegen ist der Fall, dass C sich auf eine Parallele zur Y-Axe reducirt, in der oben gegebenen Definition n i c h t enthalten. Denkt man sich jedoch als Integrationscurve C

zunächst eine beliebige andere Gerade $\overline{x_0\, x}$, so lehrt der Mittelwerthsatz (5), dass der betreffende Integralwerth beliebig klein wird, sobald die Neigung der Geraden gegen die Y-Axe der Null zustrebt, und man wird daher der bisher gegebenen Definition noch die Gleichung:

$$(7) \qquad \int_{(C)} P(\xi, \eta) \cdot d\,\xi = 0$$

als consequente Erweiterung hinzuzufügen haben, für den Fall, dass die Curve C in die fragliche Verticale übergeht.

Die Gl. (4) kann sodann dazu dienen, um den vorliegenden Integralbegriff auf solche Fälle auszudehnen, in denen $\eta = \varphi(\xi)$ eine mehrdeutige stetige Function von ξ darstellt, sofern dieselbe nur der Beschränkung unterworfen wird, dass sich das Intervall $(x_0\, x)$ in eine endliche Anzahl theilweise oder gänzlich sich überdeckender Intervalle $(x_0 x_1) \cdots (x_{\lambda-1}\, x_\lambda) \cdots (x_{n-1}\, x_n)$[1]) umformen lässt, für welche dann die Gl. $\eta = \varphi(\xi)$ ersetzt werden kann durch ein Gleichungssystem von der Form:

$$(8\,\mathrm{a}) \qquad \left\{\begin{array}{lll} \eta = \varphi_1(\xi) & \text{für:} & x_0 \leqq \xi \leqq x_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \eta = \varphi_\lambda(\xi) & & x_{\lambda-1} \leqq \xi \leqq x_\lambda \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \eta = \varphi_n(\xi) & & x_{n-1} \leqq \xi \leqq x, \end{array}\right.$$

wo jetzt $\varphi_1(\xi)$ durchweg eindeutige Functionen bedeuten. Hierbei ist noch zulässig, dass für eine endliche Anzahl von Werthen x_μ die Variable η in der Weise unendlich vieldeutig wird, dass sie bei constantem $\xi = x_\mu$ eine continuirliche Werthenreihe $y_\mu \cdots y'_\mu$ durchläuft (geometrisch gesprochen, dass einzelne Stücke der Integrationscurve C aus

1) Dabei kann also insbesondere $x_{\lambda-1}$ beliebig oft mit x_0, desgl. x_λ mit x zusammenfallen.

aus verticalen Geraden bestehen), sodass also zu den Gleichungen (8a) noch eine endliche Anzahl von Beziehungen der Form:

$$(8\text{b}) \qquad y_\mu \leqq \eta \leqq y'_\mu \qquad \text{für:} \quad \xi = x_\mu$$

hinzutreten würde.

Eine Function $\eta = \varphi(\xi)$, welche den ebengenannten Bedingungen genügt, soll in Zukunft nach bekannten Analogien als abtheilungsweise eindeutig bezeichnet werden.

Bedeutet dann wiederum C diejenige Curve, welche der Gleichung $\eta = \varphi(\xi)$ zugehört, c_ν diejenigen Theilcurven, welche den Beziehungen (8a) und (8b) entsprechen, so soll die Definitionsgleichung gelten:

$$(9) \qquad \int_{(C)} P(\xi, \eta) \cdot d\,\xi = \sum_1^n {}_\nu \int_{(c_\nu)} P(\xi, \eta) \cdot d\,\xi$$

sofern als Integrationsrichtung für die einzelnen Curven c_ν diejenige festgehalten wird, welche sich bei stetiger Durchlaufung der Gesammtcurve C in dem einmal vorgeschriebenen Sinne ergibt.

Die Gl. (9) kann ferner auch zur Definition des fraglichen Integrals dienen, falls die bisher auf (C) als durchweg stetig angenommene Function $P(\xi, \eta)$ in $x_1, x_2, \cdots x_n$ endliche Unstetigkeiten besitzt, und es hat keine Schwierigkeit diese Definition, nach genau denselben Principien, wie für Integrale der Form $\int_{x_0}^{x} f(\xi) \cdot d\xi$, auf den Fall auszudehnen, dass jene Stellen $x_1, x_2, \cdots$ gewisse unendliche (sog. unausgedehnte) Punktmengen bilden: hierauf soll indessen nicht näher eingegangen werden, da eine derartige Betrachtung mir keinerlei besonderes Interesse zu bieten scheint.[1])

[1]) Auch übergehe ich hier den Fall, dass $P(\xi, \eta)$ an einzelnen Stellen unendlich gross wird, und verweise in dieser Hinsicht auf die allgemein übliche Behandlungsweise.

Es bedeute nun ferner $\xi = \psi(\eta)$ eine für das Intervall $y_0 \leqq \eta \leqq y$ stetige und schlechthin oder abtheilungsweise eindeutige Function von η, $Q(\xi, \eta)$ eine für die eben genannten Werthe (ξ, η) eindeutige und schlechthin oder abtheilungsweise stetige Function von (ξ, η), so ist aus dem zuvor gesagten vollständig klar, was unter einem Integral von der Form:

$$\int_{(C')} Q(\xi, \eta) \cdot d\eta$$

zu verstehen ist, falls C' die der Gl. $\xi = \psi(\eta)$ zugehörige Curve bedeutet, und man erkennt ohne Weiteres, dass dieses Integral ganz analogen Gesetzen gehorcht, wie das unmittelbar zuvor betrachtete. Insbesondere wird:

$$(10) \qquad \int_{(C')} Q(\xi, \eta) \cdot d\eta = \int_{y_0}^{y} Q(x_0, \eta) \cdot d\eta$$

$$\text{bezw.} \quad \int_{(C')} Q(\xi, \eta) \cdot d\eta = 0,$$

falls sich die Integrationscurve C' auf die zur Y-Axe parallele Gerade $\xi = x_0$, bezw. auf irgend eine Parallele zur X-Axe reducirt.

Man habe nun schliesslich gleichzeitig:

$$(11) \qquad \begin{cases} \eta = \varphi(\xi) & \text{für: } x_0 \leqq \xi \leqq x \\ \xi = \psi(\eta) & \text{für: } y_0 \leqq \eta \leqq y \end{cases}$$

(sodass also ψ die inverse Function von φ — vice versa), wo $\varphi(\xi)$, $\psi(\eta)$ in dem bezeichneten Umfange durchweg stetige und schlechthin oder abtheilungsweise eindeutige Functionen ihrer Argumente bedeuten. Ferner seien $P(\xi, \eta)$, $Q(\xi, \eta)$ zwei für sämmtliche durch die Bedingungen (11) definirten Werthepaare (ξ, η) eindeutige und schlechthin oder abtheilungsweise stetige Functionen von (ξ, η). Alsdann definiren wir:

$$\int\limits_{(C)} (P(\xi, \eta) \cdot d\xi + Q(\xi, \eta) \cdot d\eta) = \int\limits_{(C)} P(\xi, \eta) \cdot d\xi + \int\limits_{(C)} Q(\xi, \eta) \cdot d\eta, \tag{12}$$

falls C die durch jede der beiden Gleichungen (11) dargestellte, jedesmal in demselben Richtungssinne zu nehmende Curve bedeutet. Dabei lässt sich die auf die Stetigkeit und Eindeutigkeit der beiden Functionen $\varphi(\xi)$ und $\psi(\eta)$ bezügliche Voraussetzung leicht so umformen, dass schliesslich nur von irgend einer dieser beiden Functionen darin die Rede ist. Damit nämlich die im Intervalle $x_{\nu-1} \leq \xi \leq x_\nu$ eindeutige und stetige Function $\eta = \varphi_\nu(\xi)$ eine im Intervalle $y_{\nu-1} = \varphi(x_{\nu-1})$ bis $y_\nu = \varphi(x_\nu)$ eindeutige und stetige Umkehrung $\xi = \psi_\nu(\xi)$ besitze, ist offenbar nothwendig und hinreichend, dass $\eta = \varphi_\nu(\xi)$ mit wachsenden Werthen von ξ monoton zu- oder abnehme — vice versa. Hiernach lässt sich aber die oben ausgesprochene Bedingung einfacher folgendermassen formuliren: Es muss eine der beiden Functionen $\varphi(\xi)$, $\psi(\eta)$ stetig, endlichvieldeutig und abtheilungsweise monoton sein — wobei nach dem früher Gesagten η oder ξ für eine endliche Anzahl endlicher Intervalle auch constant sein darf.

Wenn in Zukunft von einem „beliebigen" Integrationswege die Rede ist, so soll immer ein solcher darunter verstanden werden, welcher die eben näher bezeichneten Eigenschaften besitzt. Dabei sei aber auch hier wieder ganz ausdrücklich hervorgehoben, dass die obigen Bedingungen wiederum noch keinerlei Voraussetzung bezüglich der Existenz von $\varphi'(\xi)$ bezw. $\psi'(\eta)$ involviren. Denn es gibt thatsächlich stetige und beständig monoton zu- oder abnehmende Functionen (also auch ohne sog. Invariabilitätszüge), die nichtsdestoweniger für unendlich viele Stellen jedes Intervalles (z. B. alle rationalen) entweder unendlich grosse oder überhaupt keine bestimmten Differentialquotienten besitzen.[1]) Mir scheint dies insofern von Interesse, als von der Existenz eines zum Mindesten integrablen Differentialquotienten $\varphi'(\xi)$, oder genauer gesagt von der Integrabilität des Ausdruckes $\sqrt{1+\varphi'^2(\xi)}\cdot d\xi$, die Existenz einer bestimmten Bogenlänge der Curve in dem gewöhnlich acceptirten Sinne[2]) abhängt, und sich hiernach die, wie ich glaube, ziemlich vielfach verbreitete, auf der üblichen Parameterdarstellung der Integrationscurve beruhende Annahme als irrig erweist, dass die Existenz eines bestimmten Werthes für ein Curvenintegral wesentlich mit derjenigen einer bestimmten Bogenlänge (Rectificirbarkeit) der Integrationscurve zusammenhänge. Wie die hier angestellte Betrachtung zeigt, ist die Existenz einer bestimmten Bogenlänge für das Integral völlig belanglos. Weiterhin wird sich aber auch noch ergeben, dass in Fällen, wo eine solche Bogenlänge existirt, ihr Werth auf denjenigen des Integrals $\int\limits_{(C)} P\cdot d\xi + Q\cdot d\eta$ überhaupt keinen merklichen Einfluss ausübt, genauer gesagt, dass Curven mit angebbarer, endlicher Längedifferenz Integrale liefern können, deren Werthe einander beliebig nahe kommen (NB. ohne dass über $P(\xi,\eta)$, $Q(\xi,\eta)$ irgendwelche weitere Voraussetzung gemacht wird).

---

1) s. z. B. Cantor, Condensation der Singularitäten. Math. Ann. Bd. 19, p. 591. Ferner: Dini, Theorie der Functionen etc., übers. von Lüroth-Schepp, § 112*. Ein anderer Typus von derartigen Functionen: ebendaselbst § 132.

2) cf. Du Bois-Reymond, Erläuterungen zu den Anfangsgründen der Var.-Rechnung. Math. Ann. Bd. 15, p. 285. Bekanntlich hat Scheeffer (Acta math. Bd. 5, p. 50) für den Fall der Nichtexistenz von $\int\limits_{x_0}^{x}\sqrt{d\xi^2+d\eta^2}$ eine erweiterte Definition der Bogenlänge gegeben. Doch lassen sich dagegen Einwendungen erheben (cf. Du Bois-Reymond, Acta math. Bd. 6, p. 167), welche bisher nicht widerlegt worden sind.

§ 2. Angenäherte Darstellung eines beliebigen Curvenintegrals durch ein sogenanntes Treppenintegral.

Eine gebrochene, beliebig auf- und absteigende Linie, deren Stücke den Coordinatenaxen wechselsweise parallel laufen, soll im Folgenden schlechthin als eine Treppe und, falls der Endpunkt mit dem Anfangspunkte zusammenfällt, als eine geschlossene Treppe oder als ein Treppenpolygon bezeichnet werden. Ein Integral, dessen Integrationsweg eine solche Treppe ist, soll dann kurz ein Treppenintegral heissen.

Es sei nun S diejenige Treppe, welche durch die Eckpunkte:

$$(x_0, y_0),\ (x_1, y_0),\ (x_1, y_1), \cdots (x_{n-1}, y_{n-1}),\ (x_n, y_{n-1}),\ (x_n, y_n)$$

bestimmt wird, so hat man mit Benützung der Gleichungen (6), (7), (10) offenbar:

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} \int_{(S)} P(\xi, \eta) \cdot d\,\xi &= \sum_1^n{}_\nu \int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} P(\xi, y_{\nu-1}) \cdot d\,\xi \\ \int_{(S)} Q(\xi, \eta) \cdot d\,\eta &= \sum_1^n{}_\nu \int_{y_{\nu-1}}^{y_\nu} Q(x_\nu, \eta) \cdot d\,\eta. \end{aligned}\right.$$

Es soll nun gezeigt werden, dass sich jedes Curvenintegral mit beliebig vorzuschreibender Annäherung durch ein solches Treppenintegral ersetzen lässt, sobald sich die Stetigkeit von $P(\xi, \eta)$, $Q(\xi, \eta)$ noch auf eine gewisse Nachbarschaft der Integrationscurve erstreckt.

Ich nehme als Integrationscurve C zunächst eine von x_0 bis x monoton verlaufende, etwa, um die Anschauung zu fixiren, beständig aufsteigende Curve. Ferner sei $P(\xi, \eta)$ eine eindeutige und stetige Function von (ξ, η) nicht nur auf der Curve C, sondern noch für ein gewisses benachbartes Gebiet zum Mindesten auf einer Seite der

Curve z. B. der **rechten**: dieses Gebiet mag bei x_0 bezw. x durch ein gerades Linienstück parallel zur X- bezw. Y-Axe, im Uebrigen seitlich durch eine beliebige Curve begrenzt sein, und zwar sollen diese Grenzen mit zum Stetigkeitsbereiche von $P(\xi, \eta)$ gehören. Alsdann ist nach einem bekannten Satze $P(\xi, \eta)$ für das definirte Gebiet **gleichmässig** stetig, d. h. nach Vorgabe einer beliebig kleinen positiven Grösse σ lässt sich eine positive Grösse δ so bestimmen, dass:

$$(14) \quad |P(\xi', \eta') - P(\xi, \eta)| < \sigma \quad \text{für:} \left\{ \begin{matrix} |\xi' - \xi| \\ |\eta' - \eta| \end{matrix} \right\} < \delta,$$

sofern (ξ, η), (ξ', η') dem fraglichen Gebiete einschliesslich seiner Grenzen angehören.

Man theile nun das Intervall $(x_0\, x)$ durch Einschaltung der Theilpunkte $x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots x^{(m-1)}$ in irgendwelche Theilintervalle, deren Länge durchweg $< \delta$ sein soll. Es seien ferner $y^{(1)}, y^{(2)}, \cdots y^{(m-1)}$ die zugehörigen, auf der Y-Axe verzeichneten Curvenordinaten. Sind dann unter den Intervallen $(y^{(k-1)}\, y_k^{(k)})$ solche vorhanden, deren Länge $y^{(k)} - y^{(k-1)} \leqq \delta$, so kann man durch weitere Theilung erzielen, dass schliesslich nur Intervalle $< \delta$ vorhanden sind. Die auf diese Weise zum Vorschein kommenden y-Werthe (d. h. die früheren $y^{(k)}$ und die etwa noch eingeschalteten) mögen, der Grösse nach geordnet, bezeichnet werden mit:

$$y_1, \; y_2, \cdots y_{n-1},$$

und die zugehörigen Curvenabscissen (unter denen also die ursprünglichen $x^{(k)}$ mit enthalten sind) seien:

$$x_1, \; x_2 \cdots x_{n-1}.$$

Alsdann denke man sich diejenige Treppe construirt, welche durch die Punkte:

$$(x_0, y_0), \; (x_1, y_0), \; (x_1, y_1), \cdots (x_{n-1}, y_{n-1}), \; (x, y_{n-1}), \; (x, y)$$

bestimmt wird, und bezeichne die Theilcurven, in welche C durch die Punkte (x_ν, y_ν) $(\nu = 1, 2, \cdots (n-1))$ zerlegt wird, alle in der Richtung der wachsenden ξ gerechnet, mit $c_1, c_2, \cdots c_n$.

Man hat nun:

$$\mathfrak{Z}_C = \int_{(C)} P(\xi, \eta) \cdot d\xi = \sum_1^n {}^\nu \int_{(c_\nu)} P(\xi, \eta) \cdot d\xi$$

$$= \sum_1^n {}^\nu P(\xi_\nu, \eta_\nu) \cdot (x_\nu - x_{\nu-1})$$

$$(\text{NB. } x_n = x)$$

wo:

$$x_{\nu-1} \leqq \xi_\nu \leqq x_\nu \qquad y_{\nu-1} \leqq \eta_\nu \leqq y_\nu.$$

Andererseits ergibt sich:

$$\mathfrak{Z}_S = \int_{(S)} P(\xi, \eta) \cdot d\xi = \sum_1^n {}^\nu \int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} P(\xi, y_{\nu-1}) \cdot d\xi$$

$$= \sum_1^n {}^\nu P(\xi^{(\nu)}, y_{\nu-1}) \cdot (x_\nu - x_{\nu-1})$$

$$(\text{NB. } x_n = x)$$

wo:

$$x_{\nu-1} \leqq \xi^{(\nu)} \leqq x_\nu.$$

Hieraus folgt zunächst:

$$\mathfrak{Z}_C - \mathfrak{Z}_S = \sum_1^n {}^\nu \{P(\xi_\nu, \eta_\nu) - P(\xi^{(\nu)}, y_{\nu-1})\} \cdot (x_\nu - x_{\nu-1})$$

und da offenbar:

$$\begin{aligned} |\xi_\nu - \xi^{(\nu)}| &\leqq x_\nu - x_{\nu-1} < \delta \\ |\eta_\nu - y_{\nu-1}| &\leqq y_\nu - y_{\nu-1} < \delta \end{aligned}$$

so findet man schliesslich mit Berücksichtigung von Ungl. (14):

$$(15) \qquad \left| \int_{(C)} P \cdot d\xi - \int_{(S)} P \cdot d\xi \right| < \sigma \cdot (x - x_0).$$

Ganz analog ergibt sich:

$$(16)\qquad \left| \int_{(C)} Q \cdot d\eta - \int_{(S)} Q \cdot d\eta \right| < \sigma (y - y_0)$$

und aus der Zusammenfassung beider Resultate:

$$(17)\qquad \begin{aligned} &\left| \int_{(C)} (P \cdot d\xi + Q \cdot d\eta) - \int_{(S)} (P \cdot d\xi + Q \cdot d\eta) \right| \\ &\qquad < \sigma [(x - x_0) + (y - y_0)]. \end{aligned}$$

Da aber jeder beliebige Integrationsweg in eine endliche Anzahl solcher Curven C zerlegt werden kann, so folgt schliesslich ganz allgemein die Richtigkeit des oben ausgesprochenen Satzes.[1])

Das vorstehende Resultat wurde zwar hier wesentlich desshalb abgeleitet, weil dasselbe gestattet, den eigentlichen Beweis des Cauchy'schen Satzes auf ein Rechteck zu beschränken. Dasselbe kann indessen auch dazu dienen, um die am Schlusse des vorigen Paragraphen gemachte Be-

[1]) Der analytische Begriff des „Treppenintegrals" und die eben bewiesene Beziehung zwischen beliebigen Curvenintegralen und solchen Treppenintegralen ist natürlich völlig unabhängig von der hier lediglich der grösseren Anschaulichkeit halber und namentlich mit Rücksicht auf die übliche Darstellung einer complexen Variablen gewählten Auffassung von ξ und η als rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes. Ein Treppenintegral ist lediglich eine Summe von Quadraturen der Form $\int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} P(\xi, y)\, d\xi$, $\int_{y_{\nu-1}}^{y_\nu} Q(x, \eta)\, d\eta$, wobei im ersten Integral $y = y_{\nu-1}$ bezw. $= y_\nu$, im zweiten $x = x_\nu$ bezw. $= x_{\nu-1}$ zu setzen ist. Und der obige Satz, von jeder geometrischen Vorstellung losgelöst, besagt, dass ein Integral der Form $\int_{x_0, y_0}^{x, y} P \cdot d\xi + Q \cdot d\eta$, wo zwischen ξ und η eine Beziehung von den näher definirten Eigenschaften besteht, stets mit beliebiger Annäherung durch eine endliche Anzahl solcher Quadraturen ersetzt werden kann.

merkung in sehr einfacher und anschaulicher Weise zu erläutern.

Nimmt man nämlich als Integrationscurve C eine die Punkte x_0 und x verbindende Gerade, deren Länge also den Werth $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$ besitzt, so kann man nach dem eben Gesagten das betreffende Integral mit beliebiger Annäherung durch ein solches über eine Treppe ersetzen, welche offenbar die unveränderliche Länge $|x-x_0|+|y-y_0|$ besitzt, wie klein man auch die Abstände ihrer Eckpunkte wählen mag. Mit anderen Worten: Bei unbegrenzter Verkleinerung der Treppenstufen convergirt der Werth des Treppenintegrals genau gegen denjenigen des geradlinigen Integrals, obschon die beiden Integrationswege die unveränderliche Längendifferenz $|x-x_0|+|y-y_0|$ $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$ besitzen.

§ 3. Aufstellung einer nothwendigen Bedingung für die Unabhängigkeit des Integrals $\int\limits_{x_0,y_0}^{x,y}(P\cdot d\xi+Q\cdot d\eta$ vom Integrationswege.

Es seien $P(x,y)$, $Q(x,y)$, $\dfrac{\partial P}{\partial y}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ innerhalb eines gewissen (ein- oder mehrfach) zusammenhängenden Gebietes T eindeutige und im Allgemeinen stetige Functionen von (x,y). Alsdann gilt der Satz:

Soll das Integral $\int\limits_{x_0,y_0}^{x,y}P\cdot d\xi+Q\cdot d\eta)$ erstreckt über eine beliebige innerhalb T verlaufende Curve einen lediglich von den Grenzen, aber nicht vom Integrationswege abhängigen, bestimmten Werth besitzen, so muss für jede Stelle (x',y') in deren Umgebung die oben genannten Functionen stetig sind, die Beziehung bestehen:

$$\frac{\partial P}{\partial y'} = \frac{\partial Q}{\partial x'}.$$

Beweis. Soll das fragliche Integral vom Integrationswege unabhängig sein, so muss offenbar jedes über eine einfach geschlossene, innerhalb T verlaufende Linie erstreckte Integral $\int (P \cdot d\xi + Q \cdot d\eta)$ verschwinden.

Sei nun (x', y') ein beliebiger Punkt innerhalb T von der Beschaffenheit, dass die vier genannten Functionen für eine gewisse Umgebung derselben stetig sind. Alsdann denke man sich parallel zu den Coordinatenaxen ein Rechteck R construirt, welches einschliesslich seiner Begrenzung (R) noch in die betreffende Umgebung des Punktes (x', y') hineinfällt und diesen selbst im Innern enthält. Bezeichnet man sodann irgend einen Eckpunkt (etwa den linken unteren) von R mit (x_0, y_0), dagegen mit (x, y) jeden beliebigen Punkt im Innern (einschliesslich des Punktes (x', y')) und mit r jedes durch die Punkte (x_0, y_0) (x, y) bestimmte, zu den Coordinatenaxen parallele Rechteck, so muss offenbar die Beziehung stattfinden:

$$\int_{(r)} \{P(\xi, \eta) \cdot d\xi + Q(\xi, \eta) \cdot d\eta\} = 0$$

d. h. man hat für alle Werthe (x, y) des genannten Gebietes:

$$\int_{x_0}^{x} P(\xi, y_0) \cdot d\xi + \int_{y_0}^{y} Q(x, \eta) \cdot d\eta + \int_{x}^{x_0} P(\xi, y) \cdot d\xi \\ + \int_{y}^{y_0} Q(x_0, \eta) \cdot d\eta = 0$$

oder anders geschrieben:

$$(18) \qquad W_1(x, y) = W_2(x, y)$$

wenn gesetzt wird:

$$(19) \quad W_1(x, y) = \int_{x_0}^{x} P(\xi, y_0) \cdot d\xi + \int_{y_0}^{y} Q(x, \eta) \cdot d\eta$$

$$(20)\quad W_2(x, y) = \int_{y_0}^{y} Q(x_0, \eta) \cdot d\eta + \int_{x_0}^{x} P(\xi, y) \, . \, d\xi.$$

Aus Gl. (19) folgt sodann durch Differentiation nach y:

$$(21)\qquad \frac{\partial W}{\partial y} = Q(x, y)$$

und aus Gl. (20) mit Berücksichtigung von Gl. (18) durch Differentiation nach x:

$$(22)\qquad \frac{\partial W_1}{\partial x} = \frac{\partial W_2}{\partial x} = P(x, y)$$

und hieraus durch weitere Differentiation:

$$(23)\qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial W_1}{\partial y}\right) &= \frac{\partial Q}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial W_1}{\partial x}\right) &= \frac{\partial P}{\partial y} \end{aligned} \right.$$

Da aber die Gleichungen (21)—(23) lehren, dass mit $P(x, y)$, $Q(x, y)$, $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ auch $\frac{\partial W_1}{\partial x}$, $\frac{\partial W_1}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial W_1}{\partial x}\right)$, $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial W_1}{\partial y}\right)$ stetig sind, so gilt die Beziehung:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial W_1}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial W_1}{\partial y}\right)$$

und man findet somit nach Gl. (23):

$$(24)\qquad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

für alle Werthe (x, y) im Innern des Rechteckes R, insbesondere also für $x = x'$, $y = y'$ — womit der oben ausgesprochene Satz bewiesen ist.

§ 4. Der Cauchy'sche Satz.

Hauptsatz. Sind $P(x, y)$, $Q(x, y)$, $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ innerhalb eines gewissen (ein- oder mehrfach) zusammenhängenden Gebietes T durchweg eindeutige, endliche und stetige Functionen von (x, y),[1]) welche der Bedingung genügen:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \tag{24}$$

so verschwindet das Integral $\int (P \cdot d\xi + Q \cdot d\eta)$ erstreckt über die vollständige Begrenzung jedes innerhalb T liegenden zusammenhängenden Flächenstückes. Und es ist $\int_{x_0, y_0}^{x, y} (P \cdot d\xi + Q \cdot d\eta)$ für alle innerhalb eines einfach zusammenhängenden Gebietstheiles von T verlaufenden Integrationswege eine eindeutige und stetige Function $W(x, y)$ mit den partiellen Differentialquotienten:

$$\frac{\partial W}{\partial x} = P(x, y), \quad \frac{\partial W}{\partial y} = Q(x, y).$$

Beweis. Zunächst lässt sich zeigen, dass $\int (P \cdot d\xi + Q \cdot d\eta)$ erstreckt über die Begrenzung eines vollständig innerhalb T liegenden Rechtecks R den Werth Null hat.

Es seien (x_0, y_0), (x_1, y_0), (x_1, y_1), (x_0, y_1) die Eckpunkte von R, (x, y) irgend einer und jeder beliebige Punkt im Innern oder auf der Begrenzung von R. Alsdann definire ich für dieses Gebiet R zwei Functionen $W_1(x, y)$,

---

[1]) Es sind somit die genannten Functionen gleichmässig stetig im Innern und auf der Begrenzung jedes innerhalb T liegenden Gebietes T', wobei man die Begrenzung von T' derjenigen von T beliebig nahe bringen kann.

$W_2(x, y)$ als diejenigen besonderen Werthe des Integrals $\int\limits_{x_0, y_0}^{x, y} (P \cdot d\xi + Q \cdot d\eta)$, welche sich ergeben, wenn man einmal auf den Schenkeln des rechten Winkels über (x, y_0), das andere Mal über (x_0, y) bis (x, y) integrirt, also:

$$(25)\quad \begin{cases} \text{(a)} & W_1(x, y) = \int\limits_{x_0}^{x} P(\xi, \eta_0) \cdot d\xi + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x, \eta) \cdot d\eta \\ \text{(b)} & W_2(x, y) = \int\limits_{y_0}^{y} Q(x_0, \eta) \cdot d\eta + \int\limits_{x_0}^{x} P(\xi, y) \cdot d\xi. \end{cases}$$

Es sind hiernach $W_1(x, y)$, $W_2(x, y)$ für das betreffende Gebiet eindeutig definirte, lediglich von (x, y) abhängende Functionen, und zwar hat man offenbar insbesondere:

$$(26)\qquad W_1(x_0, y_0) = W_2(x_0, y_0) = 0.$$

Man erkennt ferner leicht, dass $W_1(x,y)$, $W_2(x,y)$ stetige Functionen der beiden Variablen (x, y) sind. Bezeichnet man mit h, k zwei beliebige (positive oder negative) Incremente von x, y (wobei die Stelle $(x + h, x + k)$ auch eventuell ausserhalb von R fallen kann, in welchem Falle h, k von vornherein so klein anzunehmen sind, dass das durch die vier Eckpunkte: (x_0, y_0), $(x + h, y_0)$, $(x + h, y + k)$, $(x_0, y + k)$ definirte Rechteck noch innerhalb T liegt), so wird:

$$W_1(x + h, y + k) = \int\limits_{x_0}^{x+h} P(\xi, y_0) \cdot d\xi + \int\limits_{y_0}^{y+k} Q(x + h, \eta) \cdot d\eta$$

und daher:

$$\begin{aligned} W_1(x + h, y + k) - W_1(x, y) &= \int\limits_{x}^{x+h} P(\xi, y_0) \cdot d\xi \\ &\quad + \int\limits_{y}^{y+k} Q(x + h, \eta) \cdot d\eta + \int\limits_{y_0}^{y} \{Q(x + h, \eta) - Q(x, \eta)\} \cdot d\eta \\ &= h \cdot P(x + \vartheta \cdot h, y_0) + k \cdot Q(x + h, y + \vartheta' \cdot k) \\ &\quad + \Delta \cdot \{Q(x + h, y_0 + \vartheta'' \cdot \Delta) - Q(x, y_0 + \vartheta'' \cdot \Delta)\} \end{aligned}$$

wo: $\Delta = y - y_0$ und ϑ, ϑ', ϑ'' in den Grenzen $0 \cdots 1$ liegen. Da die Stellen:

$$(x + \vartheta \cdot h, y_0), \; (x + h, y + \vartheta' \cdot k), \; (x + h, y_0 + \vartheta'' \cdot \Delta), \\ (x, y_0 + \vartheta'' \cdot \Delta)$$

sämmtlich dem Gebiete T angehören, so können die beiden ersten Glieder der rechten Seite wegen der Endlichkeit von $P(\xi, \eta)$, $Q(\xi, \eta)$, das dritte wegen der Stetigkeit von $Q(\xi, \eta)$ durch Wahl einer oberen Grenze für h und k beliebig klein gemacht werden, womit die Stetigkeit von $W_1(x, y)$ in dem behaupteten Umfange erwiesen ist. Ganz analog erkennt man aber auch die Stetigkeit von $W_2(x, y)$.

Ferner ergibt sich durch Differentiation von Gl. (25a) nach y und Gl. (25b) nach x unmittelbar:

$$\frac{\partial W_1}{\partial y} = Q(x, y), \quad \frac{\partial W_2}{\partial x} = P(x, y) \tag{27}$$

und sodann aus (25a) durch Differentiation nach x zunächst:

$$\frac{\partial W_1}{\partial x} = P(x, y_0) + \frac{\partial}{\partial x} \int_{y_0}^{y} Q(x, \eta) \cdot d\eta.$$

In Folge der gleichmässigen Stetigkeit von $Q(x, \eta)$ als Function der beiden Veränderlichen (x, η) darf man im letzten Gliede die Reihenfolge der Differentiation und Integration vertauschen und erhält daher mit Berücksichtigung der nach Voraussetzung bestehenden Beziehung (24):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \int_{y_0}^{y} Q(x, \eta) \cdot d\eta &= \int_{y_0}^{y} \frac{\partial Q(x, \eta)}{\partial x} \cdot d\eta \\ &= \int_{y_0}^{y} \frac{\partial P(x, \eta)}{\partial \eta} \cdot d\eta \\ &= P(x, y) - P(x, y_0) \end{aligned}$$

und somit:

$$\frac{\partial W_1}{\partial x} = P(x, y). \tag{28a}$$

Analog ergibt sich:

$$\frac{\partial W_2}{\partial y} = Q(x, y). \tag{28b}$$

Die Gleichungen (27), (28) lehren also, dass für alle (x, y), welche dem Innern oder der Begrenzung von R angehören, die Beziehungen bestehen:

$$\frac{\partial W_1}{\partial x} = \frac{\partial W_2}{\partial x} \qquad \frac{\partial W_1}{\partial y} = \frac{\partial W_2}{\partial y} \tag{29}$$

und es können daher die für das nämliche Werthegebiet als stetig erkannten Functionen $W_1(x, y)$, $W_2(x, y)$ nach einem bekannten Satze höchstens um eine additive Constante verschieden sein, welche aber offenbar den Werth Null haben muss, da nach Gl. (26) $W_1(x_0, y_0) = W_2(x_0, y_0)$ ist. Man findet somit schliesslich insbesondere:

$$W_1(x_1, y_1) = W_2(x_1, y_1) \tag{30}$$

d. h. das Integral $\int\limits_{x_0, y_0}^{x_1, y_1} (P \cdot d\xi + Q \cdot d\eta)$ erstreckt über je ein Paar anstossender Rechteckseiten hat den gleichen Werth, oder anders ausgesprochen: Das Integral, continuirlich erstreckt über die Begrenzung des Rechtecks, hat den Werth Null.

Angenommen nun, man habe ein innerhalb T liegendes, von einem oder mehreren Treppenpolygonen volltsändig begrenztes zusammenhängendes Flächenstück S, so lässt sich ein solches stets mit Hülfe einer endlichen Anzahl von Parallelen zu den Coordinatenaxen in eine endliche Anzahl von Rechtecken r_ν $(\nu = 1, 2, \cdots n)$ zerlegen, deren Begrenzung theils von den einzelnen Stücken der ursprünglichen

Treppenbegrenzung, theils von Stücken jener Hülfslinien gebildet wird, und zwar gehört jedes Stück der ursprünglichen Begrenzung nur einem einzigen (r_ν), dagegen jedes Stück einer Hülfslinie stets zwei benachbarten (r_ν) gleichzeitig an. Man hat nun zunächst:

$$(31) \qquad \sum_1^n{}_\nu \int_{(r_\nu)} (P \cdot d\xi + Q \cdot d\eta) = 0$$

da jedes einzelne dieser Rechtecksintegrale verschwindet. Führt man hierbei alle Integrationen in demselben Sinne aus, etwa dem sog. positiven, wo also die Fläche jedes einzelnen r_ν bei der Integration über den Umfang zur Linken bleibt, so wird offenbar über jedes Stück einer Hülfslinie genau zweimal und zwar in entgegengesetzter Richtung integrirt: es heben sich also die betreffenden Integralbestandtheile vollständig heraus, während nur die auf die Stücke der ursprünglichen Begrenzung (S) bezüglichen Integrale mit einer bestimmten, eindeutig vorgeschriebenen Integrationsrichtung zurückbleiben. Durch Addition dieser Theilintegrale geht dann Gl. (31) in die folgende über:

$$(32) \qquad \int_{(S)} (P \cdot d\xi + Q \cdot d\eta) = 0$$

wobei offenbar die Integration in dem Falle, dass (S) aus mehreren Treppenpolygonen besteht, über das äussere Polygon in der schlechthin als positiv geltenden (d. h. in der Richtung der wachsenden Winkel fortschreitenden), über jedes innere Polygon in der entgegengesetzten Richtung auszuführen ist.

Hat man schliesslich ein dem Gebiete T angehöriges, von einer oder mehreren Randcurven vollständig begrenztes, zusammenhängendes Flächenstück T', so kann man diesen Randcurven zunächst nach § 2 eine entsprechende Anzahl von Treppenpolygonen mit der Gesammtbegrenzung (S) zuordnen, dergestalt, dass die Differenz:

$$\int_{(T')} (P \cdot d\xi + Q \cdot d\eta) - \int_{(S)} (P \cdot d\xi + Q \cdot d\eta)$$

beliebig klein wird. Und da das zweite Integral den Werth Null hat, das erste aber einen bestimmten Werth haben muss, so folgt, dass auch:

$$(33) \qquad \int_{(T')} (P \cdot d\xi + Q \cdot d\eta) = 0$$

sein muss.

Bedeutet sodann U irgend ein einfach zusammenhängendes in T liegendes Flächenstück, und sind (x_0, y_0), (x_1, y_1) zwei beliebige Punkte in U, so werden irgend zwei innerhalb U zwischen (x_0, y_0) und (x_1, y_1) verlaufende Curven C und C', die sich weder selbst noch gegenseitig schneiden, einen Flächentheil von U vollständig begrenzen, sodass also das betreffende Integral über diese Begrenzung verschwindet. Man erhält somit, wenn man als Integrationsrichtung auf C und C' die von (x_0, y_0) nach (x, y) festhält:

$$(34) \qquad \int_{(C)} (P \cdot d\xi + Q \cdot d\eta) = \int_{(C')} (P \cdot d\xi + Q \cdot d\eta).$$

Dieses Resultat wird aber offenbar durch das Auftreten etwaiger Doppelpunkte bei C und C' in keiner Weise alterirt, da die Integrale über die auf diese Weise entstehenden Schleifen nach Gl. (33) jedesmal verschwinden.

Wenn endlich die Curven C und C' sich auch gegenseitig schneiden, sodass sie also mehrere nur in diesen Schnittpunkten zusammenstossende Flächentheile vollständig begrenzen, so werden zunächst die Integrale über die betreffenden Einzelbegrenzungen verschwinden müssen. Wählt man daher die einzelnen Integrationsrichtungen in der Weise, dass über die Theile der Curve C jedesmal in der Richtung $(x_0, y_0) \cdots (x, y)$, über diejenigen von C' in entgegengesetzter Richtung integrirt wird, so ergibt sich durch Addition der betreffenden Theilintegrale und schliessliche Umkehrung der

Integrationsrichtung für alle auf Stücke von C' zu erstreckenden Integrale wiederum die Richtigkeit der Beziehung (34).

Hieraus folgt aber, dass das Integral $\int\limits_{x_0, y_0}^{x, y} (P \cdot d\xi + Q \cdot d\eta)$ innerhalb des Gebietes U einen vom Integrationswege unabhängigen, eindeutig bestimmten Werth besitzt, sodass also in diesem Gebiete:

$$W(x, y) = \int\limits_{x_0, y_0}^{x, y} (P \cdot d\xi + Q \cdot d\eta) \tag{35}$$

bei variablem (x, y) und constantem (x_0, y_0) eine eindeutige Function von (x, y) darstellt. Bildet man sodann unter der Voraussetzung, dass die Stelle $x + h$, $y + k)$ gleichfalls dem Gebiete U angehört:

$$W(x+h, y+k) = \int\limits_{x_0, y_0}^{x+h, y+k} (P \cdot d\xi + Q \cdot d\eta)$$

so kann man ohne Beschränkung der Allgemeinheit den Integrationsweg dieses Integrals über (x, y) führen und erhält also durch Subtraction:

$$W(x+h, y+k) - W(x, y) = \int\limits_{x, y}^{x+h, y+k} (P \cdot d\xi + Q \cdot d\eta)$$

und da man auch diesem Integrale ohne Beschränkung der Allgemeinheit einen speciellen Integrationsweg zutheilen kann, nämlich die Horizontale von (x, y) bis $(x+h, y)$, dann die Verticale von $(x+h, y)$ bis $(x+h, y+k)$ (wobei nur h, k von vornherein so klein anzunehmen sind, dass dieser Weg noch dem Gebiete U angehört), so folgt:

$$\begin{aligned} & W(x+h, y+k) - W(x, y) \\ & = \int\limits_x^{x+h} P(\xi, y) \cdot dx + \int\limits_y^{y+k} Q(x+h, \eta) \cdot d\eta \\ & = h \cdot P(x + \vartheta h, y) + k \cdot Q(x+h, \eta + \vartheta' k) \end{aligned} \tag{36}$$

d. h. $W(x, y)$ ist eine stetige Function von (x, y).

Aus der letzten Gleichung ergibt sich dann speciell für $h = 0$, bezw. $k = 0$:

$$\frac{W(x+h, y) - W(x, y)}{h} = P(x + \vartheta h, y)$$

$$\frac{W(x, y+k) - W(x, y)}{k} = Q(x, y + \vartheta' k)$$

und hieraus durch Uebergang zur Grenze $h=0$, bezw. $k=0$:

$$(37) \qquad \frac{\partial W}{\partial x} = P(x, y) \qquad \frac{\partial W}{\partial y} = Q(x, y).$$

Hiemit ist aber der ausgesprochene Satz in allen Theilen bewiesen.

Zusätze. 1) Der Satz erleidet keine Aenderung, wenn die ursprünglich als ausnahmslos vorausgesetzte Stetigkeit von P, Q, $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ gewisse Unterbrechungen erleidet oder die Relation $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ nicht durchgängig erfüllt ist. Man zeigt dies in der bekannten Weise, indem man die Ausnahmestellen, die für P, Q nur in einzelnen Punkten, für $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ (d. h. sowohl hinsichtlich der Stetigkeit dieser beiden Functionen, als auch in Bezug auf die Relation: $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$) auch in einzelnen Linien bestehen dürfen, zuächst durch beliebig nahe anzuschmiegende, zur Gesammtbegrenzung von T' hinzuzufügende Curven ausschliesst und sodann nachweist, dass die Integrale über jede dieser Curven beliebig klein gemacht werden können, also das Gesammtresultat nicht alteriren.[1])

---

[1]) Der auf der Reduction des Doppelintegrals

$$\int\int\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) dx\, dy$$

beruhende Beweis gestattet freilich in Bezug auf $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ von vorn-

2) Erstreckt sich die gleichmässige Stetigkeit von P, Q mit eventuellem Ausschluss einzelner Punkte auch noch auf die Begrenzung von T, so verschwindet das Integral $\int (P \cdot d\xi + Q \cdot d\eta)$, auch wenn man es über die Begrenzung (T') erstreckt. Man erkennt dies, indem man zunächst ein Treppenpolygon (S) construirt denkt, dessen Ecken abwechselnd auf der Begrenzung und im Innern von T liegen, und sodann durch Verbindung der freien Eckpunkte ein gewöhnliches offenbar ganz innerhalb T liegendes Polygon (P) herstellt. Bei hinlänglicher Verkleinerung der Treppenstufen unterscheidet sich dann das Treppenintegral über (S) beliebig wenig von den beiden Integralen über (T) und (P), also kann auch die Differenz der beiden letzteren Integrale beliebig klein gemacht werden. Und da das Integral über (P) verschwindet, dasjenige über (T) jedenfalls einen bestimmten Werth haben muss, so folgt, dass dieser Werth gleichfalls Null sein muss.

---

herein eine etwas allgemeinere Fassung der betreffenden Bedingungen, insofern für die Gültigkeit des Satzes nicht die Stetigkeit, sondern nur die Integrabilität von $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$, genau gesagt die eindeutige Existenz von $\int\int \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy$, $\int\int \frac{\partial Q}{\partial x}\, dx\, dy$ in Frage kommt. Die genauere Feststellung der hiefür noch zulässigen Unstetigkeiten von $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial P}{\partial x}$ führt indessen auf Betrachtungen, mit deren Hülfe man ebensogut auch den hier gegebenen Beweis in analoger Weise verallgemeinern könnte. In der That braucht ja die Bedingung

$$\frac{\partial W_1}{\partial x} = \frac{\partial W_2}{\partial x} \qquad \frac{\partial W_1}{\partial y} = \frac{\partial W_2}{\partial y}$$

keineswegs für ein gewisses Gebiet R als ausnahmslos erfüllt vorausgesetzt werden, um daraus die Uebereinstimmung der beiden stetigen Functionen $W_1(x, y)$, $W_2(x, y)$ (bis auf eine additive Constante) zu erschliessen. Ich gehe indessen auf derartige Verallgemeinerungen hier nicht ein, da mir dieselben für die Theorie der Functionen complexer Variablen keine sonderliche Bedeutung zu besitzen scheinen.

3) Kennt man eine innerhalb irgend eines einfach zusammenhängenden Flächenstückes U von T eindeutige und stetige Function $F(x, y)$ mit den partiellen Differentialquotienten:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P(x, y) \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = Q(x, y),$$

so muss offenbar für jeden innerhalb U verlaufenden Integrationsweg die Beziehung bestehen:

$$F(x,y) = \int_{x_0, y_0}^{x,y} (P \cdot d\xi + Q \cdot d\eta) + C,$$

da das rechtsstehende Integral mit $F(x,y)$ innerhalb U die Stetigkeit und die partiellen Differentialquotienten $P(x, y)$, $Q(x,y)$ gemein hat. Da aber das Integral für $x = x_0$, $y = y_0$ verschwindet, so folgt:

$$F(x_0, y_0) = C$$

also schliesslich:

$$\int_{x_0, y_0}^{x,y} (P \cdot d\xi + Q \cdot d\eta) = F(x,y) - F(x_0, y_0).$$

Zum Cauchy'schen Integralsatze.

(Nachtrag zu dem Aufsatze auf S. 39—72 dieses Bandes.)

Von **Alfred Pringsheim.**

(*Eingelaufen 15. Juli.*)

In der Einleitung meiner Mittheilung über den Cauchy'schen Integralsatz habe ich darauf aufmerksam gemacht, dass gewisse auf Continuitäts-Betrachtungen gegründete Beweise jenes Satzes insofern lückenhaft erscheinen, als sie auf der stillschweigend gemachten Annahme beruhen, dass der Differenzen-Quotient $\frac{f(z+h)-f(z)}{h}$ für alle in Betracht kommenden Werthe von z stets gleichmässig gegen den Werth $f'(z)$ convergirt, d. h. dass nach Vorgabe einer beliebig kleinen positiven Grösse ε sich stets eine positive Grösse ϱ so fixiren lasse, dass für alle in Betracht kommenden Werthe von z stets:

$$\left|\frac{f(z+h)-f(z)}{h} - f'(z)\right| < \varepsilon, \quad \text{falls: } |h| < \varrho.$$

Ich fügte hinzu, man müsse also, um jene Beweise haltbar zu machen, entweder die fragliche Bedingung als eine specielle, der Function $f(z)$ a priori zukommende Eigenschaft ausdrücklich in die Voraussetzung aufnehmen,[1]) oder

[1]) In dem seither erschienenen ersten Bande von Weierstrass' Werken findet man einen Beweis des Laurent'schen Satzes, bei welchem in der That die fragliche Bedingung bezw. eine ihr im wesentlichen aequivalente als specielle Voraussetzung erscheint.

versuchen, dieselbe als unmittelbare Folge einfacherer Eigenschaften, etwa der Stetigkeit von $f'(z)$ darzustellen;[1]) in wieweit dies möglich wäre, liess ich dahingestellt und sprach nur die Vermuthung aus, dass der Beweis, wenn überhaupt durchführbar, auf ziemlich schwierige und umständliche Betrachtungen führen dürfte. Nachdem ich indessen neuerdings erkannt, dass der fragliche Beweis nicht nur möglich ist, sondern auch mit verhältnissmässig einfachen Mitteln geführt werden kann, möchte ich denselben — zumal der Satz an sich mir nicht ganz unwichtig erscheint — an dieser Stelle mittheilen.[2])

Es sei $f(z)$ im Innern und auf der Begrenzung eines gewissen Bereiches T eine endliche, eindeutige und stetige Function der complexen Variablen z. Liefert sodann die Substitution $z = x + yi$ die Beziehung:

$$(1) \qquad f(z) = \varphi(x,y) + i \cdot \psi(x,y),$$

wo $\varphi(x,y)$, $\psi(x,y)$ reelle Functionen der reellen Veränderlichen x, y bedeuten, so folgt bekanntlich aus der vorausgesetzten Stetigkeit von $f(z)$, dass auch $\varphi(x,y)$, $\psi(x,y)$ endliche und stetige Functionen von x, y und zwar für den Bereich T gleichmässig stetig sind.

Es sei ferner $f'(z)$ gleichfalls in T (d. h. immer im Innern und auf der Grenze von T) endlich, eindeutig und stetig, so hat man speciell:

---

[1]) In meinem Aufsatze: „Ueber die Entwicklung eindeutiger analytischer Functionen in Potenzreihen" (S. 39 ff. dieses Bandes) habe ich u. a. gezeigt, dass für „analytische", d. h. durch Potenzreihen definirte Functionen die betreffende Bedingung stets erfüllt ist (a. a. O. S. 83, 84).

[2]) Uebrigens setzt Herr Goursat, wie ich erst nachträglich bemerkt habe, bei seinem Beweise des Cauchy'schen Satzes (Act. math. T. IV, p. 196) den fraglichen Hilfssatz ausdrücklich als bekannt voraus, sodass also hier die von mir erhobene Einwendung hinfällig erscheint.

$$f'(z) = \frac{\partial f(x+yi)}{\partial x} = \frac{\partial f(x+yi)}{\partial (iy)},$$

wobei es im Innern von T freisteht, diese partiellen Differential-Quotienten als vor- oder rückwärts genommen zu verstehen; oder wenn:

$$\frac{\partial \varphi(x,y)}{\partial x} = \varphi_1(x,y) \qquad \frac{\partial \varphi(x,y)}{\partial y} = \varphi_2(x,y)$$

$$\frac{\partial \psi(x,y)}{\partial x} = \psi_1(x,y) \qquad \frac{\partial \psi(x,y)}{\partial y} = \psi_2(x,y)$$

gesetzt wird:

$$(2) \qquad f'(z) = \begin{cases} \varphi_1(x,y) + i\cdot\psi_1(x,y) \\ \psi_2(x,y) - i\cdot\varphi_2(x,y). \end{cases}$$

Hieraus folgt zunächst, dass die partiellen Differential-Quotienten $\varphi_1(x,y)$, $\varphi_2(x,y)$, $\psi_1(x,y)$, $\psi_2(x,y)$ in T gleichfalls endliche, eindeutig bestimmte Werthe besitzen, welche den Bedingungen genügen:

$$(3) \qquad \begin{cases} \varphi_1(x,y) = \psi_2(x,y) \\ \varphi_2(x,y) = -\psi_1(x,y), \end{cases}$$

und dass sie — in Folge der Stetigkeit von $f'(z)$ — in T **gleichmässig** stetige Functionen von x, y sind, d. h. jeder beliebig klein vorgeschriebenen positiven Grösse δ lässt sich eine positive Grösse ϱ so zuordnen, dass für alle x,y des Bereiches T:

$$(4) \qquad |\chi(x+h, y+k) - \chi(x,y)| < \delta \quad \text{für: } h^2+k^2 < \varrho^2,$$

(wo χ jede beliebige der Functionen $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2$ bedeutet).

Dies vorausgeschickt gilt nun der Satz:

Sind $f(z)$, $f'(z)$ eindeutig, endlich und stetig im Innern und auf der Grenze des Bereiches T, so convergirt der Ausdruck:

$$\left|\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} - f'(z)\right|$$

mit Δz in T gleichmässig gegen Null, d. h. jeder beliebig klein vorgelegten positiven Grösse ε lässt sich eine positive Grösse ϱ so zuordnen, dass:

$$\left|\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} - f'(z)\right| < \varepsilon, \quad \text{falls: } |\Delta z| < \varrho.^{1)}$$

Beweis. Setzt man $\Delta z = h + ki$, so wird zunächst:

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$$

$$= \frac{\varphi(x+h, y+k)-\varphi(x,y)}{h+ki} + i \cdot \frac{\psi(x+h, y+k)-\psi(x,y)}{h+ki}$$

$$= \left\{\frac{\varphi(x+h, y+k)-\varphi(x, y+k)}{h} + i \cdot \frac{\psi(x+h, y+k)-\psi(x, y+k)}{h}\right\} \cdot \frac{h}{h+ki}$$

$$+ \left\{\frac{\varphi(x, y+k)-\varphi(x,y)}{k} + i \cdot \frac{\psi(x, y+k)-\psi(x,y)}{k}\right\} \cdot \frac{k}{h+ki}.$$

In Folge der nach dem oben Gesagten aus der Voraussetzung folgenden Stetigkeitseigenschaften der Functionen $\varphi(x,y)$, $\psi(x,y)$ und ihrer partiellen Differential-Quotienten ist es gestattet auf die sämmtlichen hier auftretenden Differenzen-Quotienten den Rolle'schen Mittelwerth-Satz anzuwenden.

Bezeichnet man also mit $\vartheta, \vartheta', \eta, \eta'$ reelle Grössen, welche dem Intervalle von 0 bis 1 (mit Einschluss der Grenzen) angehören, so kann man setzen:

---

1) Dabei kommen natürlich, falls z auf der Grenze von T oder in deren Nähe liegt, nur solche Δz in Betracht, für welche $z + \Delta z$ noch dem Bereiche T angehört.

Der analoge Satz für Functionen einer reellen Veränderlichen findet sich bei Tannery, Introduction à la théorie des fonctions, p 234; desgl. bei Stolz, Grundzüge der Differential- u. Integralrechnung, p. 55.

$$(5) \qquad \frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$$

$$= \{\varphi_1(x+\vartheta h, y+k) + i\cdot\psi_1(x+\vartheta' h, y+k)\}\cdot\frac{h}{h+ki}$$

$$+ \{\varphi_2(x, y+\eta k) + i\cdot\psi_2(x, y+\eta' k)\}\cdot\frac{k}{h+ki}.$$

Es ist aber andererseits nach Gl. (2):

$$\begin{aligned} f'(z) &= \varphi_1(x,y) + i\cdot\psi_1(x,y) \\ &= \{\varphi_1(x,y) + i\cdot\psi_1(x,y)\}\cdot\frac{h}{h+ki} \\ &+ \{i\cdot\varphi_1(x,y) - \psi_1(x,y)\}\cdot\frac{k}{h+ki} \end{aligned}$$

oder mit Benützung der Beziehungen (3):

$$(6) \qquad \begin{aligned} f'(z) &= \{\varphi_1(x,y) + i\cdot\psi_1(x,y)\}\cdot\frac{h}{h+ki} \\ &+ \{\varphi_2(x,y) + i\cdot\psi_2(x,y)\}\cdot\frac{k}{h+ki}. \end{aligned}$$

Subtrahirt man jetzt diese Gleichung von Gl. (5), so ergiebt sich:

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} - f'(z)$$

$$\begin{aligned} &= \{\varphi_1(x+\vartheta h, y+k) - \varphi_1(x,y)\}\cdot\frac{h}{h+ki} \\ &+ \{\psi_1(x+\vartheta' h, y+k) - \psi_1(x,y)\}\cdot\frac{hi}{h+ki} \\ &+ \{\varphi_2(x, y+\eta k) - \varphi_2(x,y)\}\cdot\frac{k}{h+ki} \\ &+ \{\psi_2(x, y+\eta' k) - \psi_2(x,y)\}\cdot\frac{ki}{h+ki} \end{aligned}$$

Nun kann man nach dem oben Gesagten (s. Ungl. (4)) ϱ so fixiren, dass für $h^2+k^2<\varrho^2$, also $|h+ki|<\varrho$, der absolute Betrag jeder Klammergrösse unter eine beliebig kleine positive Grösse, die mit $\frac{\varepsilon}{4}$ bezeichnet werden möge, herabsinkt. Da ausserdem bei beliebigen, nicht gleichzeitig verschwindenden reellen Werthen von h und k stets:

$$\left|\frac{h}{h+ki}\right| \leqq 1 \qquad \left|\frac{k}{h+ki}\right| \leqq 1,$$

so folgt schliesslich:

$$(7) \qquad \left|\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} - f'(z)\right| < \varepsilon \qquad \text{für: } |\Delta z| < \varrho.$$

Hiermit ist der oben ausgesprochene Satz, d. h. derjenige Satz, welcher für den exacten Beweis des Cauchy'schen Integral-Theorems erforderlich war, bewiesen.

An dieses Resultat lässt sich nun noch die folgende für die schärfere Begründung der gesammten Cauchy'schen Functionen-Theorie nicht unwichtige Betrachtung knüpfen. Schreibt man in Ungl. (7) z' statt z, so wird:

$$(8) \qquad \left|\frac{f(z'+\Delta z)-f(z')}{\Delta z} - f'(z')\right| < \varepsilon \qquad \text{für: } |\Delta z| < \varrho$$

unter der Voraussetzung, dass auch z' und $z'+\Delta z$ dem Bereiche T angehören. Setzt man dann in (7): $\Delta z = \zeta$, in (8): $\Delta z = \zeta'$, wo die ζ, ζ' zwei beliebige complexe Grössen bedeuten, deren absoluter Betrag unterhalb ϱ liegt, so folgt durch Subtraction der Ungleichungen (7) und (8):

$$(9) \qquad \left|\frac{f(z'+\zeta')-f(z')}{\zeta'} - \frac{f(z+\zeta)-f(z)}{\zeta} - \{f'(z')-f'(z)\}\right| < 2\varepsilon.$$

In Folge der Stetigkeit von $f'(z)$ kann man jetzt z' nahe genug an z wählen, dass $|f'(z')-f'(z)|$ beliebig klein wird; insbesondere wird, wenn man $|z'-z| < \varrho$ nimmt,

$|f'(z') - f'(z)| < \frac{\varepsilon}{2}$,[1]) sodass Ungl. (9) die folgenden nach sich zieht:

$$(10)\quad \begin{aligned} &\left| \frac{f(z'+\zeta') - f(z')}{\zeta'} - \frac{f(z+\zeta) - f(z)}{\zeta} \right| < \delta \\ &\text{für: } \begin{cases} |\zeta'| < \varrho, \ |\zeta| < \varrho \\ \quad |z' - z| < \varrho \end{cases} \end{aligned}$$

(wenn man zur Abkürzung δ statt $\frac{5}{2}\varepsilon$ schreibt). Man kann somit an Stelle des oben bewiesenen Satzes jetzt auch den folgenden setzen:

Sind $f(z)$, $f'(z)$ eindeutig, endlich und stetig im Innern und auf der Grenze eines gewissen Bereiches T, so ist der Differenzen-Quotient:

$$\frac{f(z+\zeta) - f(z)}{\zeta}$$

eine gleichmässig stetige Function der beiden Variablen z und ζ für alle z des Bereiches T und alle ζ, deren absoluter Betrag unter einer gewissen Grenze ϱ liegt, d. h. jeder beliebig klein vorgelegten positiven Grösse δ lässt sich eine positive Grösse ϱ so zuordnen, dass die Ungleichungen (10) stattfinden.

---

[1]) Setzt man nämlich:

$$z' - z = h + ki,$$

so wird:

$$\begin{aligned} f(z') - f(z) = \ &\varphi_1(x+h,\ y+k) - \varphi_1(x,y) \\ &+ i\{\psi_1(x+h,\ y+k) - \psi_1(x,y)\}, \end{aligned}$$

also:

$$\begin{aligned} |f(z') - f(z)| \leqq \ &|\varphi_1(x+h,\ y+k) - \varphi_1(x,y)| \\ &+ |\psi_1(x+h,\ y+k) - \psi_1(x,y)| \end{aligned}$$

d. h. auf Grund der oben getroffenen Bestimmung:

$$|f(z') - f(z)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für: } |h+ki| < \varrho.$$

Der Satz in dieser Form besitzt nun die wichtige Eigenschaft, auch umkehrbar zu sein, d. h. man kann aus dem Bestehen der Ungleichungen (10) — welche offenbar die Endlichkeit und Eindeutigkeit von $f(z)$ als selbstverständliche Voraussetzung enthalten — die Stetigkeit von $f(z)$, sowie die Endlichkeit, Eindeutigkeit und Stetigkeit von $f'(z)$ folgern:

Setzt man nämlich in (10) $z' = z$, so wird:

$$\left| \frac{f(z+\zeta') - f(z)}{\zeta'} - \frac{f(z+\zeta) - f(z)}{\zeta} \right| < \delta \ \text{für:} \begin{Bmatrix} |\zeta'| \\ |\zeta| \end{Bmatrix} < \varrho, \tag{11}$$

und hieraus folgt zunächst, dass der Differenzen-Quotient $\frac{f(z+\zeta) - f(z)}{\zeta}$ für $\lim \zeta = 0$ einen eindeutig bestimmten, endlichen Grenzwerth besitzt, sodass man setzen kann:

$$\lim_{\zeta=0} \frac{f(z+\zeta) - f(z)}{\zeta} = f'(z), \tag{12}$$

d. h. $f(z)$ besitzt in T durchweg einen endlichen, eindeutig bestimmten Differential-Quotienten, ist also *eo ipso* auch eine stetige Function von z. Um auch noch die Stetigkeit von $f'(z)$ zu erkennen, bemerke man, dass aus (11) und (12) folgt:

$$\left| f'(z) - \frac{f(z+\zeta) - f(z)}{\zeta} \right| \leq \delta \quad \text{für:} \ |\zeta| < \varrho \tag{13}$$

und analog für jeden anderen dem Bereiche T angehörigen Werth z':

$$\left| f'(z') - \frac{f(z'+\zeta) - f(z')}{\zeta} \right| \leq \delta. \tag{14}$$

Hieraus folgt durch Subtraction:

$$|f'(z') - f'(z)| \leq 2\delta + \left| \frac{f(z'+\zeta) - f(z')}{\zeta} - \frac{f(z+\zeta) - f(z)}{\zeta} \right|, \tag{15}$$

und wenn man jetzt z' der Bedingung unterwirft: $|z' - z| < \varrho$, so findet man schliesslich mit Benützung von Ungl. (10):

$$|f'(z') - f'(z)| < 3\delta, \tag{16}$$

womit die fragliche Umkehrung des obigen Satzes[1]) in allen Theilen bewiesen ist. Nunmehr kann man aber jenen Satz mit der eben bewiesenen Umkehrung in die folgende prägnantere Form zusammenfassen:

Die *nothwendige und hinreichende* Bedingung dafür, dass die im Bereiche T endliche und eindeutige Function $f(z)$ daselbst stetig ist und einen endlichen, eindeutigen und stetigen Differential-Quotienten $f'(z)$ besitzt, besteht darin, dass der Differenzen-Quotient $\dfrac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$ für alle Werthe z des Bereiches T und alle Δz, deren absoluter Betrag unter einer gewissen Grenze liegt, eine gleichmässig stetige Function der beiden Variablen z und Δz sein muss.

Die gleichmässige Stetigkeit des Differenzen-Quotienten in dem näher definirten Sinne bildet also die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die endliche und eindeutige Function $f(z)$ im Sinne Cauchy's synektisch ist.

Ich möchte schliesslich diese Gelegenheit benützen, um den in meinem früheren Aufsatze mitgetheilten historischen Notizen einige Ergänzungen hinzuzufügen.

Ich habe dort u. a. hervorgehoben, dass der auf die Integralformel:

$$\int P\,dx + Q\,dy = \pm \int\int \left\{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right\} dx \cdot dy$$

gegründete Beweis des Cauchy'schen Satzes bereits von Cauchy selbst gekannt und auch in der Hauptsache publicirt worden sei, und glaubte aus dem Umstande, dass jener Beweis — im Gegensatze zu dem ursprünglich von Cauchy gegebenen und dessen Modificationen — ganz allgemein

[1]) Das Analogon für Functionen einer reellen Variablen findet man bei Harnack, Elemente der Diff.- und Integr.-Rechnung, p. 37.

als der Riemann'sche bezeichnet wird, den Schluss ziehen zu dürfen, dass jene Thatsache bisher „völlig unbemerkt“ geblieben sei.[1]) Ich hätte statt dessen etwa sagen sollen: „nahezu unbemerkt“. Denn ich habe inzwischen die Wahrnehmung gemacht, dass Casorati in der historischen Einleitung seiner „Teorica delle funzioni di variabili complesse“ jener Cauchy'schen Note ausdrücklich Erwähnung thut. Das Gleiche ist auch in dem jüngst erschienenen Referate der Herren Brill und Nöther über „Die Entwicklung der Theorie der algebraischen Functionen“ geschehen.[3]) Immerhin kann wohl kaum bestritten werden, dass das mathematische Publikum mit Ausnahme einer sicherlich sehr kleinen Minderheit den fraglichen Beweis bisher ganz ausschliesslich auf Riemann's Conto gesetzt hat.

Ferner habe ich inzwischen bemerkt, dass auch Herr Falk im Jahre 1883 einen Beweis des Cauchy'schen Integralsatzes veröffentlicht hat.[4]) Das Original der betreffenden Arbeit ist mir leider bisher nicht zugänglich gewesen. Indessen lässt sich aus einem Auszuge, den der Verfasser selbst in einem Briefe an Herrn Hermite mitgetheilt hat,[5]) immerhin so viel ersehen, dass jener Beweis in seiner ganzen Anlage sehr einfach, wenn auch vielleicht etwas weniger natürlich erscheint, als der von mir gegebene, und dass er insbesondere wieder auf gewissen Voraussetzungen über die Beschaffenheit der Integrations-Curven beruht, deren principielle Ueberflüssigkeit ich gerade nachzuweisen versucht habe.

---

1) a. a. O. p. 44.

2) a. a. O. p. 79. Späterhin (p. 370) wird freilich der fragliche Beweis wiederum lediglich auf die Riemann'sche Dissertation zurückgeführt.

3) Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. III, p. 173.

4) Démonstration du théorème de Cauchy sur l'intégrale d'une fonction complexe (Nova Acta Regiae Soc. Upsaliensis, Ser. III, T. XII).

5) Darboux, Bulletin, 2. série, T. VII, p. 137.

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der Bayerischen Akademie der Wissenschaften München

Jahr/Year: 1895

Band/Volume: 1895

Autor(en)/Author(s): Pringsheim Alfred

Artikel/Article: Ueber den Cauchy'schen Integralsatz 39-304