Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Classe

der

k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.

Band XXV. Jahrgang 1895.

München.
Verlag der K. Akademie.
1896.

In Commission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).

Ueber die Entwickelung eindeutiger analytischer Functionen in Potenzreihen.

Von **Alfred Pringsheim.**

(*Eingelaufen 9. Februar.*)

Begründet man die Theorie der Functionen einer complexen Veränderlichen auf die Cauchy'sche Definition der monogenen Functionen und ihrer Integrale, so ergibt sich die Entwickelbarkeit einer für $0 \leqq |x| < R$ bezw. für $R_0 < |x| < R$ eindeutigen und monogenen Functionen nach positiven ganzen Potenzen von x (der „Cauchy'sche" Satz), bezw. nach positiven und negativen ganzen Potenzen von x (der „Laurent'sche" Satz) sowie der wahre Convergenz- und Geltungsbereich der betreffenden Entwickelungen ganz unmittelbar aus den bekannten Cauchyschen Integralsätzen. Wesentlich anders liegt die Sache, wenn man die Eigenschaften der im Sinne des Herrn Weierstrass analytischen und monogenen, d. h. durch ein „Functionenelement" von der Form $\sum_0^\infty{}_\nu\, a_\nu \cdot (x - x_0)^\nu$ und dessen analytische Fortsetzungen definirten Functionen auf elementarem Wege, also insbesondere ohne Anwendung der complexen Integration ableiten will. Gestaltet sich hier schon die Feststellung des wahren Convergenzbezirkes für die Entwickelung $\sum_0^\infty{}_\nu\, a_\nu\, (x - x_0)^\nu$ einer innerhalb eines einfach zusammenhängenden, die Stelle x_0 enthaltenden Gebietes eindeutigen und analytischen Function ziemlich umständlich,[1]) so bietet die Erkenntniss der blossen Möglichkeit, eine in einem Ringgebiete um die Stelle x_0 eindeutige und analytische Function nach positiven und negativen Potenzen von $(x-x_0)$ zu entwickeln, bei dem jetzigen Stande der Theorie ganz unverhältnissmässige Schwierigkeiten: man erschliesst dieselbe entweder nach dem Vorgange des Herrn Mittag-Leffler[2]) aus einem von Herrn Weierstrass abgeleiteten Hülfssatze von ziemlich verwickelter Beschaffenheit,[3]) oder etwas kürzer mit Hülfe einer von Scheeffer herrührenden, im Grunde genommen zwar auf denselben Principien beruhenden, aber directeren Beweismethode.[4]) Indessen selbst dieser auf den ersten Blick relativ einfach erscheinende Scheeffer'sche Beweis setzt doch eine Reihe von Vorkenntnissen, namentlich über die Eigenschaften mehrdeutiger Functionen voraus, welche es unmöglich machen, den betreffenden Satz an der für einen natürlichen und consequenten Aufbau der elementaren Functionentheorie erforderlichen Stelle erscheinen zu lassen.

Hiernach dürfte es nicht ohne Interesse erscheinen, wenn ich im Folgenden einen neuen Beweis für die fragliche Entwickelungsform einer analytischen Function mittheile. Die Grundlagen der hierbei von mir angewendeten Methode finden sich zwar schon im Wesentlichen in einer Cauchyschen Abhandlung: „Considérations nouvelles sur la théorie des suites et sur les lois de leur convergence“[5]): allein abgesehen davon, dass die dort gegebene

---

1) Cf. Stolz, Vorlesungen über allg. Arithmetik, Bd. II, p. 180. Biermann, Theorie der analyt. Functionen, p. 165.

2) Acta mathematica, Bd. IV. p. 80.

3) Abhandl. aus der Functionenlehre, p. 28.

4) Acta mathematica, Bd. IV. p. 375.

5) Exercices d'Analyse et de Physique mathématique, T. I, p. 269.

Darstellung sich nur auf die Entwickelung einer Function nach positiven Potenzen bezieht, so enthält dieselbe auch verschiedene Lücken principieller Natur, und hierin mag wohl der Grund davon zu suchen sein, dass man, soviel ich weiss, auf jene Methode nicht wieder zurückgekommen ist,[1]) deren Kern in der Anwendung gewisser Mittelwerthe an Stelle der sonst bei der Coefficientendarstellung üblichen Integrale liegt. Derartige Mittelwerthe — nämlich Grenzwerthe von der Form $\lim_{n=\infty}\left\{\frac{1}{n}\cdot\sum_{0}^{n-1}{}_{\nu} f(x_{n,\nu})\right\}$, wo die $x_{n,\nu}$ für jedes n und ν arithmetisch wohl definirte Zahlen von der Beschaffenheit bedeuten, dass $|x_{n,\nu+1} - x_{n,\nu}|$ mit wachsendem n beliebig klein wird — kann man natürlich stets auch als specielle Fälle von bestimmten Integralen auffassen. Immerhin haben dieselben mit dem Infinitesimalbegriff in Wahrheit absolut nichts zu thun, da es sich bei ihrer Bildung keineswegs um eine Summe schliesslich „unendlich

---

[1]) Ich bin nachträglich durch Herrn Dyck darauf aufmerksam gemacht worden, dass sich in: Serret, Cours de calcul différentiel et intégral, T. I, p. 570 (in der deutschen Ausgabe von Harnack, T. I, p. 527) gleichfalls die Ableitung der Mac Laurin'schen Reihe mit Hülfe von Mittelwerthen findet. Die dort gegebene Darstellung ist im Wesentlichen eine Reproduction der im Texte citirten Cauchy'schen, bei welcher die erwähnten Lücken vermieden sind; allein der fragliche Beweis hat hierbei vollständig seinen elementaren Charakter verloren. Die dabei benützten „Mittelwerthe" sind in Wahrheit nur umständlicher geschriebene bestimmte Integrale mit veränderlichen Grenzen, die ausserdem noch von einem veränderlichen Parameter abhängen. Nach beiden Grössen wird differenzirt, wobei der Satz von der Differentiation eines bestimmten Integrals nach der oberen Grenze, sodann auch derjenige von der Vertauschbarkeit der Differentiationsreihenfolge in Anwendung kommt; kurzum dieser Beweis gehört vollständig der Infinitesimalrechnung an und erscheint in der That weit einfacher und durchsichtiger, wenn man statt der benützten Mittelwerthe die üblichen Integralbezeichnungen anwendet.

klein" werdender, sondern lediglich um eine Summe wohl definirter, stets endlich bleibender Grössen, dividirt durch deren Anzahl, handelt. Hiernach ist aber ein solcher Mittelwerth genau in demselben Sinne „elementar" wie jeder gewöhnliche, von einer positiv wachsenden ganzen Zahl abhängige Grenzwerth, z. B. wie die sogenannte Summe einer unendlichen Reihe (die man ja schliesslich auch stets als speciellen Fall eines bestimmten Integrales auffassen kann), sodass gegen die Einführung derartiger Mittelwerthe in die elementare Functionentheorie irgendwelche principielle Bedenken schwerlich erhoben werden können, zumal die fraglichen Sätze auf diesem Wege eine Einfachheit und Abrundung erhalten, welche die mit Hülfe der complexen Integration erzielte noch merklich übertrifft. So lässt sich insbesondere der für diese ganze Betrachtung grundlegende Satz, dass der Mittelwerth einer eindeutigen analytischen Function $f(x)$ für die Stellen $|x| = r$ einen von r unabhängigen bestimmten Werth besitzt, weit leichter völlig streng begründen, als der entsprechende Cauchy'sche Integral-Satz für monogene Functionen (im Cauchy'schen Sinne); und es gestaltet sich die Darstellung der Entwicklungscoefficienten einer Potenzreihe durch solche Mittelwerthe wesentlich einfacher und natürlicher als die betreffende Integral-Darstellung, welche die Einführung des völlig fremdartigen, d. h. zu der Potenzentwickelung einer beliebigen analytischen Function in gar keiner nothwendigen Beziehung stehenden Factors $\frac{1}{2\pi i}$ nach sich zieht.

Im Uebrigen habe ich, um der folgenden Betrachtung einen möglichst elementaren Charakter zu wahren, absichtlich davon Abstand genommen, die Lehre von den Einheitswurzeln oder gar deren Darstellung durch trigonometrische Functionen, ja selbst auch nur den Satz von der Wurzelexistenz einer algebraischen Gleichung zu benützen. Vielmehr stütze ich mich lediglich auf den elementaren Satz, dass eine quadratische Gleichung von der Form $x^2 = \beta + \gamma i$ stets zwei und nur zwei verschiedene, vermittelst reeller Quadratwurzelausziehungen zu berechnende Wurzeln besitzt.

§ 1.

Ist $\gamma > 0$, β beliebig, so hat man bekanntlich:

$$(1) \qquad \sqrt{\beta + \gamma i}$$
$$= \pm \left\{ \sqrt{\tfrac{1}{2}\sqrt{\beta^2 + \gamma^2} + \tfrac{1}{2}\beta} + i \sqrt{\tfrac{1}{2}\sqrt{\beta^2 + \gamma^2} - \tfrac{1}{2}\beta} \right\},$$

wo sämmtliche Quadratwurzeln auf der rechten Seite positiv zu nehmen sind. Dabei soll derjenige Wurzelwerth, welcher resultirt, wenn man auf der rechten Seite als Gesammtvorzeichen das positive wählt, der Kürze halber schlechthin als der positive Werth von $\sqrt{\beta + \gamma i}$ bezeichnet werden.

Sei nun ferner $N = 2^n$, so lassen sich offenbar die sämmtlichen Wurzeln der Gleichung

$$(2) \qquad x^N = 1$$

mit Hülfe von n successiven Quadratwurzelausziehungen berechnen, dergestalt, dass allgemein:

$$(3) \qquad x = \pm \sqrt[\scriptstyle 1]{\pm \sqrt[\scriptstyle 2]{\pm \cdots \pm \sqrt[\scriptstyle n-1]{\pm \sqrt[\scriptstyle n]{1}}}}$$

(wobei die Indices an den einzelnen Wurzelzeichen lediglich zur Charakterisirung ihrer Anzahl dienen). Daraus folgt zunächst, dass die Anzahl der verschiedenen Wurzelwerthe nur $\leq 2^n$, also $\leq N$ sein kann.

Unter den auf diese Weise sich ergebenden Wurzeln ist eine besonders ausgezeichnet, welche aus $\sqrt[4]{1} = + i$ entsteht, wenn man bei jeder weiteren Wurzelausziehung die im obigen Sinne definirte positive Wurzel beibehält. Bezeichnet man dieselbe durch:

$$(4) \qquad \alpha_n = \beta_n + \gamma_n i$$

so ergibt sich mit Hülfe der Formel (1):

$$(5) \quad \begin{cases} \beta_n = \underset{1}{\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\underset{2}{\sqrt{\frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2}\underset{n-3}{\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\underset{n-2}{\sqrt{\frac{1}{2}}}}}}}}} \\ \gamma_n = \underset{1}{\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\underset{2}{\sqrt{\frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2}\underset{n-3}{\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\underset{n-2}{\sqrt{\frac{1}{2}}}}}}}}} \end{cases}$$

Man erkennt alsdann leicht:

1) dass keine Wurzel der Gl. (2) mit positiv reellem und positiv imaginärem Theile existirt, welche näher an der positiven Einheit liegt als α_n;

2) dass die Potenzen $\overset{0}{\alpha_n}, \overset{1}{\alpha_n}, \cdots \overset{N-1}{\alpha_n}$ durchweg von einander verschieden sind und der Gl. (2) genügen, also die sämmtlichen Wurzeln dieser Gleichung darstellen;

3) dass diesen N-Werthen ebensoviele, in der gleichen Anordnung auf einander folgende, aequidistante Punkte auf dem Einheitskreise entsprechen, deren constanter Abstand $|1 - \alpha_n|$ der Bedingung genügt:

$$(6) \qquad |1 - \alpha_n| < \left(\sqrt{\tfrac{1}{2}}\right)^{n-3}.$$

Nun bedeute $f(x)$ eine für alle x mit dem absoluten Betrage $|x| = r$ eindeutig definirte und im Allgemeinen stetige Function, so soll gesetzt werden:

$$(7) \qquad \mathfrak{M}_n(f(r)) = \frac{1}{N}\sum_0^{N-1}{}_{\nu}\, f(\overset{\nu}{\alpha_n} \cdot r),$$

sodass also $\mathfrak{M}_n(f(r))$ das arithmetische Mittel aus den Werthen bedeutet, welche $f(x)$ an den N-Stellen $x = \overset{\nu}{a}_n \cdot r$ $(\nu = 0, 1, \cdots N-1)$ annimmt. Aus der vorausgesetzten Stetigkeit von $f(x)$ längs des Kreises $|x| = r$ und der Beziehung (6) ergibt sich sodann, dass $\mathfrak{M}_n(f(r))$ mit unbegrenzt wachsenden Werthen von n einer festen Grenze zustrebt, sodass die Bezeichnung:

$$(8) \qquad \mathfrak{M}(f(r)) = \lim_{n=\infty} \mathfrak{M}_n(f(r))$$

einen bestimmten Sinn besitzt. Zugleich erkennt man unmittelbar aus der Definition von $\mathfrak{M}(f(r))$, dass:

$$(9) \qquad \mathfrak{M}(K \cdot f(r)) = K \cdot \mathfrak{M}(f(r)),$$

wenn K einen beliebigen für alle x mit dem absoluten Betrage r constanten Factor bedeutet; und ferner:

$$(10) \qquad \begin{aligned} &\mathfrak{M}(f_1(r) + \cdots + f_k(r)) \\ &= \mathfrak{M}(f_1(r)) + \cdots + \mathfrak{M}(f_k(r)), \end{aligned}$$

wenn man mit $f_1(x) \ldots f_k(x)$ Functionen von analoger Beschaffenheit wie $f(x)$ bezeichnet.

Ist jetzt $\varphi(x)$ eindeutig und analytisch für alle x des Gebietes $R_0 \leq |x| \leq R$ (wobei eventuell auch $R_0 = 0$ sein kann), so besteht der Satz, dass $\mathfrak{M}(\varphi(r))$ für $R_0 \leq r \leq R$ einen bestimmten von r unabhängigen Werth besitzt, sodass also:

$$\mathfrak{M}(\varphi(r)) = \mathfrak{M}(\varphi(r')),$$

wenn $R_0 \leq r < r' \leq R$.

Der Beweis dieses Satzes beruht auf einem Hülfssatze[1]) des Inhalts, dass der Differenzenquotient $\dfrac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h}$

[1]) Beweis dieses Hülfssatzes s. am Ende von § 1.

für alle x des betreffenden Gebietes und hinlänglich kleine Werthe von h eine gleichmässig stetige Function von h ist, d. h. man kann jeder beliebig kleinen positiven Grösse ε eine positive Grösse δ so zuordnen, dass für alle x des Gebietes: $R_0 \leqq |x| \leqq R$ die Beziehung besteht:

$$(10)\qquad \left| \frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h} - \frac{\varphi(x+k)-\varphi(x)}{k} \right| < \varepsilon, \quad \text{falls } \left\{ \begin{matrix} |h| \\ |k| \end{matrix} \right\} \leqq \delta.$$

Angenommen nun, man habe $r > 0$ beliebig klein fixirt, so bestimme man zunächst eine positive ganze Zahl m so, dass die positive Grösse:

$$\frac{r'-r}{m} = \delta$$

klein genug wird, um die Gültigkeit der Ungleichung (10) für $|h| \leqq \delta$, $|k| \leqq \delta$ zu sichern. Wählt man hierauf die positive ganze Zahl n bezw. $N = 2^n$ gross genug, dass:

$$r' \cdot |1 - a_n| \leqq \delta \quad (\text{also a fortiori } r \cdot |1 - a_n| < \delta),$$

so hat man:

$$\left| \frac{\varphi(a_n^\nu \cdot (r+\delta)) - \varphi(a_n^\nu \cdot r)}{a_n^\nu \cdot \delta} - \frac{\varphi(a_n^{\nu+1} \cdot r) - \varphi(a_n^\nu \cdot r)}{a_n^\nu (a-1) \cdot r} \right| < \varepsilon$$

oder nach Multiplication mit δ und Berücksichtigung von $|a_n^\nu| = 1$:

$$\left| \varphi(a_n^\nu \cdot (r+\delta)) - \varphi(a_n^\nu \cdot r) - \delta \cdot \frac{\varphi(a_n^{\nu+1} \cdot r) - \varphi(a_n^\nu \cdot r)}{(a-1) \cdot r} \right| < \delta \cdot \varepsilon$$

Setzt man der Reihe nach $\nu = 0, 1, \ldots (N-1)$ und addirt die resultirenden Ungleichungen, so heben sich offenbar alle von dem dritten Gliede der linken Seite herrührenden Bestandtheile vollständig heraus (NB. es ist ja insbesondere $a_n^N \cdot r = a_n^0 \cdot r$), und es ergibt sich:

$$\left| \sum_0^{N-1} {}_\nu\, \varphi\,(a_n^\nu \cdot (r+\delta)) - \sum_0^{N-1} {}_\nu\, \varphi\,(a_n^\nu \cdot r) \right| < N \cdot \delta \cdot \varepsilon$$

oder nach Division mit N:

$$| \mathfrak{M}_n (\varphi\,(r+\delta)) - \mathfrak{M}_n (\varphi\,(r)) | < \delta \cdot \varepsilon$$

und daher, wenn man r ins Unendliche wachsen lässt:

$$| \mathfrak{M} (\varphi\,(r+\delta)) - \mathfrak{M} (\varphi\,(r)) | \leqq \delta \cdot \varepsilon.$$

Schreibt man in dieser Ungleichung $r+(\mu-1)\,\delta$ statt r (wo: $r+(\mu-1)\cdot\delta < r'$ für $\mu=1, 2, \ldots m$ — also auch: $(r+(\mu-1)\,\delta)\cdot|1-a_n| < \delta$), so wird:

$$| \mathfrak{M} (\varphi(r+\mu\delta)) - \mathfrak{M} (\varphi\,(r+\overline{\mu-1}\cdot\delta)) | \leqq \delta\cdot\varepsilon,$$

und wenn man die für $\mu = 1, 2, \ldots m$ hieraus resultirenden Ungleichungen addirt und beachtet, dass: $m \cdot \delta = r' - r$, schliesslich:

$$| \mathfrak{M} (\varphi\,(r')) - \mathfrak{M} (\varphi\,(r)) | \leqq (r'-r)\cdot\varepsilon.$$

Da aber ε von vornherein beliebig klein angenommen werden kann, und andererseits $\mathfrak{M} (\varphi\,(r'))$, $\mathfrak{M} (\varphi\,(r'))$ eindeutig bestimmte Werthe besitzen, so muss geradezu:

$$(11) \qquad | \mathfrak{M} (\varphi\,(r')) - \mathfrak{M} (\varphi\,(r)) | = 0$$

sein, womit die ausgesprochene Behauptung bewiesen ist.

Beweis des Hülfssatzes. Für jede Stelle x des Bereiches $R_0 \leqq |x| \leqq R$ gilt eine Entwickelung von der Form:

$$\varphi\,(x+h) = \sum_0^\infty {}_\nu\, \frac{\varphi^{(\nu)}\,(x)}{\nu!} \cdot h^\nu$$

deren wahrer Convergenzradius bekanntlich eine mit x stetig veränderliche, positive Grösse ist und demnach ein bestimmtes von Null verschiedenes Minimum ϱ besitzen muss. Fixirt man nun eine positive Grösse:

$$\delta < \varrho$$

so ist für alle x und h des Bereiches: $R_0 \leqq |x| \leqq R$ und $|h| \leqq \delta$ die Reihenentwickelung (12) gültig und absolut convergent, und daher auch in dem gleichen Umfange:

$$\varphi''(x+h) = \sum_0^\infty{}_\nu \frac{\varphi^{(\nu+2)}(x)}{\nu!} \cdot h^\nu.$$

Da aber für den angegebenen Werthebereich $\varphi''(x+h)$ eine stetig veränderliche Function ihres Argumentes ist, so besitzt daselbst $|\varphi''(x+h)|$ ein bestimmtes endliches Maximum g, und es ist daher nach einem bekannten Satze:

$$(13) \qquad \left| \frac{\varphi^{(\nu+2)}(x)}{\nu!} \cdot h^\nu \right| \leqq g \qquad \text{für:} \begin{cases} R_0 \leqq |x| \leqq R \\ \quad |h| \leqq \delta. \end{cases}$$

Setzt man nun Gl. (12) in die Form:

$$\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} - \varphi'(x) = h \cdot \sum_0^\infty{}_\nu \frac{\varphi^{(\nu+2)}(x)}{(\nu+2)!} \cdot h^\nu,$$

so hat man für $h \leqq \delta$ mit Benützung von Ungl. (13):

$$\left| \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} - \varphi'(x) \right| \leqq g \cdot |h| \sum_0^\infty{}_\nu \frac{1}{(\nu+1)(\nu+2)}$$
$$\text{d. h.} \leqq g \cdot |h|$$

und daher, wenn auch $|k| \leqq \delta$ angenommen wird:

$$(14) \qquad \left| \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} - \frac{\varphi(x+k) - \varphi(x)}{k} \right|$$
$$\leqq g \{|h| + |k|\} \leqq 2g \cdot \delta,$$

sodass also die fragliche Differenz unter ε herabsinkt, wenn von vornherein $\delta < \frac{\varepsilon}{2g}$ angenommen wird.

§ 2.

Lehrsatz. Ist $f(x)$ eine eindeutige und analytische Function für alle Stellen x des Gebietes $R_0 \leqq |x| \leqq R$, so gilt für dieses Gebiet die Entwickelung:

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{\mu}\, a_\mu \cdot x^\mu$$

wo:

$$a_\mu = \mathfrak{M}\left(r^{-\mu} \cdot f(r)\right)$$

und r einen beliebigen Werth des Intervalles $R_0 \leqq r \leqq R$ bedeutet. Ist insbesondere $R_0 = 0$, so reducirt sich die obige Entwickelung auf die folgende:

$$f(x) = \sum_{0}^{\infty}{}^{\mu}\, a_\mu \cdot x^\mu.$$

Beweis. Bezeichnet man mit x_0 irgend eine willkürlich gewählte Stelle im Innern des fraglichen Bereiches, sodass also $R_0 < |x_0| < R$ und setzt man:

$$\varphi(x) = x \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

so ist $\varphi(x)$ für alle x des Bereiches $R_0 \leqq x \leqq R$ gleichfalls eindeutig und analytisch. Man erkennt dies ohne Weiteres für jede von x_0 verschiedene Stelle x; in der Umgebung der Stelle x_0 hat man aber:

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{1}^{\infty}{}^{\mu}\, \frac{f^{(\mu)}(x_0)}{\mu!}(x - x_0)^\mu$$

also:

$$\varphi(x) = x \cdot \sum_1^\infty{}_\mu \frac{f^{(\mu)}(x_0)}{\mu!}(x - x_0)^{\mu-1}$$

d. h. $\varphi(x)$ ist dort gleichfalls analytisch. In Folge dessen ist nach dem Satze des vorigen Paragraphen:

$$\mathfrak{M}\left(R_0 \cdot \frac{f(R_0) - f(x_0)}{R_0 - x_0}\right) = \mathfrak{M}\left(R \cdot \frac{f(R) - f(x_0)}{R - x_0}\right)$$

oder mit Berücksichtigung von Gl. (9) und (10) des § 1:

$$(15) \quad \begin{aligned} f(x_0) \cdot \mathfrak{M}\left(\frac{R}{R - x_0}\right) &- f(x_0)\, \mathfrak{M}\left(\frac{R_0}{R_0 - x_0}\right) \\ = \mathfrak{M}\left(\frac{R \cdot f(R)}{R - x_0}\right) &- \mathfrak{M}\left(\frac{R_0 f(R_0)}{R_0 - x_0}\right) \end{aligned}$$

Nun ist:

$$(16) \quad \frac{R}{R - x_0} = \sum_0^{m-1}{}_\mu \left(\frac{x_0}{R}\right)^\mu + \left(\frac{x_0}{R}\right)^m \cdot \frac{1}{1 - \frac{x_0}{R}}$$

$$(17) \quad \frac{R_0}{R_0 - x_0} = -\sum_1^{m-1}{}_\mu \left(\frac{R_0}{x_0}\right)^\mu - \left(\frac{R_0}{x_0}\right)^m \cdot \frac{1}{1 - \frac{R_0}{x_0}}$$

und daher:

$$(17) \quad \begin{aligned} &\mathfrak{M}\left(\frac{R \cdot f(R)}{R - x_0}\right) \\ &= \sum_0^{m-1}{}_\mu \mathfrak{M}\left(R^{-\mu} \cdot f(R)\right) \cdot x_0^\mu + x_0^m \cdot \mathfrak{M}\left(\frac{f(R)}{R^m (1 - \frac{x_0}{R})}\right). \end{aligned}$$

Da nun:

$$(18) \quad \left| x_0^m \cdot \mathfrak{M}\left(\frac{f(R)}{R^m (1 - \frac{x_0}{R})}\right) \right| < \left| \frac{x_0}{R} \right|^m \cdot \frac{F(R)}{1 - \left|\frac{x_0}{R}\right|}$$

wenn $F(R)$ das Maximum der absoluten Beträge von $f(x)$ für $|x| = R$ bezeichnet, so folgt, dass dieser letztere Ausdruck mit unbegrenzt wachsenden Werthen von m gegen Null convergirt, und zwar, wenn $r < R$ angenommen wird, offenbar gleichmässig für alle x_0, welche der Bedingung genügen: $|x_0| \leqq r$. Lässt man also in Gl. (17) m ins Unendliche wachsen, so wird:

$$(19)\qquad \mathfrak{M}\left(\frac{R\cdot f(R)}{R-x_0}\right) = \sum_0^\infty{}_\mu\, \mathfrak{M}\,(R^{-\mu}\cdot f(R)\cdot x_0^\mu$$

wobei diese Reihe zunächst unbedingt und gleichmässig convergirt für $|x_0| \leqq r < R$. Es lässt sich indessen leicht zeigen, dass dies auch noch für $|x_0| = R$ der Fall sein muss. Da nämlich $f(x)$ nach Voraussetzung noch für $|x| = R$ analytisch sein sollte, so gehört zu jeder Stelle x' des Kreises mit dem Radius R eine angebbare Umgebung, für welche $f(x)$ nach Potenzen von $(x-x')$ entwickelbar ist. Diese Umgebung muss dann ein gewisses, von Null verschiedenes Minimum ϱ besitzen. Nimmt man alsdann eine positive Grösse $\delta < \varrho$ an, so folgt, dass $f(x)$ auch noch für $|x| \leqq R+\delta$ analytisch ist. Alsdann besteht aber eine Beziehung von der Form (19), sofern man daselbst R durch $R+\delta$ ersetzt, und diese muss nach dem Gesagten unbedingt und gleichmässig convergiren für $|x_0| \leqq r < R+\delta$, also insbesondere für $|x_0| = R$. Da aber nach dem Satze des vorigen Paragraphen:

$$\mathfrak{M}\,((R+\delta)^{-\mu} f(R+\delta)) = \mathfrak{M}\,(R^{-\mu}\cdot f(R)),$$

so ist die zuletzt genannte Entwickelung von der in Gl. (19) nicht verschieden, sodass also diese letztere in der That noch für $|x_0| = R$ unbedingt und gleichmässig convergirt.

Analog ergibt sich aus Gl. (17):

$$(20)\qquad \mathfrak{M}\left(\frac{R_0 f(R_0)}{R_0-x_0}\right)$$
$$= -\sum_1^{m-1}{}_\mu\, \mathfrak{M}\,(R_0^\mu\cdot f(R))\cdot x_0^{-\mu} - x_0^{-m}\, \mathfrak{M}\left(\frac{R_0^m f(R_0)}{1-\frac{R_0}{x_0}}\right)$$

Da aber:

$$(21)\qquad \left| x_0^{-m}\, \mathfrak{M}\left(\frac{R_0^m \cdot f(R_0)}{1-\frac{R_0}{x_0}}\right)\right| < \left|\frac{R_0}{x_0}\right|^m \cdot \frac{F(R_0)}{1-\left|\frac{R_0}{x_0}\right|},$$

(wenn wiederum $F(R_0)$ das Maximum von $|f(x)|$ für $|x| = R_0$ bezeichnet), und da dieser Ausdruck wegen $|x_0| > R_0$ mit unendlich wachsendem m gegen Null convergirt, so hat man:

$$(22)\qquad \mathfrak{M}\left(\frac{R_0 \cdot f(R)}{R_0 - x_0}\right) = -\sum_1^\infty{}_\mu\, \mathfrak{M}\left(R_0^\mu f(R)\right) \cdot x^{-\mu}.$$

Diese Reihe convergirt dann zunächst wieder unbedingt und gleichmässig für $|x_0| > R_0$: es folgt aber genau wie oben, dass dies auch noch für $|x_0| = R_0$ der Fall sein muss, sofern man vorläufig $R_0 > 0$ annimmt. (Der Fall $R_0 = 0$ wird weiter unten besprochen werden).

Da die in den Entwickelungen (19) und (22) als Coefficienten auftretenden Mittelwerthe nach dem Satze des vorigen Paragraphen (in dem durch die analytische Beschaffenheit von $f(x)$ bezw. $x^{\pm\mu} \cdot f(x)$ gegebenen Umfange) von R bezw. R_0 unabhängig sind, so kann man die Gleichungen (19) und (22) auch durch die folgenden ersetzen:

$$(23)\qquad \begin{cases} \mathfrak{M}\left(\dfrac{R \cdot f(R)}{R - x_0}\right) = \sum\limits_1^\infty{}_\mu\, \mathfrak{M}\left(r^{-\mu} \cdot f(r)\right) \cdot x_0^\mu \\ \mathfrak{M}\left(\dfrac{R_0 \cdot f(R_0)}{R_0 - x_0}\right) = -\sum\limits_1^\infty{}_\mu\, \mathfrak{M}\left(r^\mu \cdot f(r)\right) \cdot x_0^{-\mu} \end{cases}$$

wo r einen ganz beliebigen Werth des Intervalles $R_0 \leqq r \leqq R$ bedeutet. Ersetzt man jetzt in (23) $f(x)$ durch die Einheit, so folgt insbesondere:

$$(24)\qquad \begin{cases} \mathfrak{M}\left(\dfrac{R_0}{R - x_0}\right) = \sum\limits_0^\infty{}_\mu\, \mathfrak{M}\left(r^{-\mu}\right) \cdot x_0^\mu & (\text{wo: } |x_0| \leqq R) \\ \mathfrak{M}\left(\dfrac{R_0}{R_0 - x_0}\right) = -\sum\limits_1^\infty{}_\mu\, \mathfrak{M}\left(r^\mu\right) \cdot x_0^{-\mu} & (\text{wo: } |x_0| \geqq R_0) \end{cases}$$

Nun ist aber für $\mu \geqq 1$ — falls n von vornherein so gewählt wird, dass $N = 2^n > \mu$:

$$\mathfrak{M}_n(r^{\pm\mu}) = \frac{1}{N} \sum_0^{N-1} {}_\nu\, a_n^{\pm\mu\cdot\nu} \cdot r^{\pm\mu} = \frac{1}{N} \cdot r^{\pm\mu} \cdot \frac{1 - a_n^{\pm\mu\cdot N}}{1 - a_n^{\pm\mu}} = 0,$$

also auch:

$$\mathfrak{M}(r^{\pm\mu}) = 0.$$

Dagegen für $\mu = 0$, offenbar:

$$\mathfrak{M}_n(r^0) = 1, \text{ also auch: } \mathfrak{M}(r^0) = 1,$$

sodass die Gleichungen (24) sich auf die folgenden reduciren:

$$(25) \qquad \begin{cases} \mathfrak{M}\left(\dfrac{R}{R - x_0}\right) = 1 \\[2ex] \mathfrak{M}\left(\dfrac{R_0}{R_0 - x_0}\right) = 0. \end{cases}$$

Mit Benützung der in Gl. (23) und (25) enthaltenen Resultate geht dann Gl. (15) — wenn man statt x_0 jetzt x schreibt — in die folgende über:

$$(26) \qquad \begin{aligned} f(x) &= \sum_0^\infty {}_\mu\, \mathfrak{M}(r^{-\mu} \cdot f(r)) \cdot x^\mu + \sum_1^\infty {}_\mu\, \mathfrak{M}(r^\mu \cdot f(r)) \cdot x^{-\mu} \\ &= \sum_{-\infty}^{+\infty} \mathfrak{M}(r^{-\mu} \cdot f(r)) \cdot x^\mu \end{aligned}$$

wobei also diese Entwickelung unbedingt und gleichmässig convergirt für $R_0 \leqq |x| \leqq R$, und die in den Coefficienten auftretende Grösse r einen beliebig zu wählenden Werth des Intervalles $R_0 \leqq r \leqq R$ bedeutet.

Ist jetzt speciell $R_0 = 0$, so kann man zunächst in den Coefficienten von der Form $\mathfrak{M}(r^\mu \cdot f(r))$ für $\mu \geqq 1$ $r = 0$ setzen. Alsdann wird aber:

$$\mathfrak{M}_n\left(r^{\mu}\cdot f(r)\right)_{r=0}=0 \quad \text{also auch:} \quad \mathfrak{M}\left(r^{\mu}\cdot f(r)\right)=0$$

sodass Gl. (26) sich auf die folgende reducirt:

$$(27) \qquad f(x)=\sum_{0}^{\infty}{}_{\mu}\, \mathfrak{M}\left(r^{-\mu}\cdot f(r)\right)\cdot x^{\mu}$$

Dabei würde nach dem oben Gesagten diese Entwickelung zunächst gültig sein für $0<|x|\leqq R$. Man erkennt aber unmittelbar, dass sie auch noch für $x=0$ besteht. Im Falle $x=0$ geht nämlich die rechte Seite über in:

$$\mathfrak{M}\left(f(r)\right)$$

und da man hier wiederum $r=0$ setzen darf, so folgt:

$$\mathfrak{M}\left(f(r)\right)=\lim_{n=\infty}\mathfrak{M}_n\left(f(r)\right)_{r=0}=f(0)$$

d. h. Gl. (27) gilt in der That auch für $x=0$.

Damit ist aber der oben ausgesprochene Satz bewiesen.

Zusatz I. Ist $f(x)$ nur für das Gebiet $R_0<|x|<R$ eindeutig und analytisch, so gilt die Entwickelung (26) zunächst für jedes Gebiet $R_0'\leqq|x|\leqq R'$, sofern nur R_0', R' der Bedingung genügen: $R_0<R_0'<R'<R$: sie gilt somit schliesslich für alle x des Gebietes $R_0<|x|<R$. Sind also $|x|=R$ bezw. $|x|=R_0$ die wahren Convergenzgrenzen der betreffenden Entwickelung, so muss $f(x)$ für $|x|=R$ bezw. $|x|=R_0$ mindestens eine singuläre Stelle besitzen.

Bleibt $f(x)$ beim Uebergange von Werthen mit dem absoluten Betrage $|x|<R$ bezw. $|x|>R_0$ zu solchen mit dem absoluten Betrage $|x|=R$ bezw. $|x|=R_0$ noch im allgemeinen gleichmässig stetig, und ist $f(x)$ für $|x|=R$ bezw. $|x|=R_0$ durchweg endlich, so kann man offenbar die in den Coefficienten auftretende Grösse r eventuell auch durch R bezw. R_0 ersetzen, da in diesem Falle die Differenzen:

$$\mathfrak{M}(R^{\mu} \cdot f(R)) - \mathfrak{M}(R'^{\mu} \cdot f(R'))$$

$$\text{bezw. } \mathfrak{M}(R_0^{\mu} \cdot f(R_0)) - \mathfrak{M}(R_0'^{\mu} \cdot f(R_0'))$$

beliebig klein gemacht werden können.

Zusatz II. Man erkennt leicht, dass der bewiesene Satz auch umkehrbar ist, d. h. wenn die Reihe:

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} {}_{\nu}\, a_{\mu}\, x^{\mu} = f(x)$$

zum Mindesten für alle x mit dem absoluten Betrage $|x| = r$ gleichmässig convergirt, so hat man:

$$a_{\mu} = \mathfrak{M}(r^{-\mu} \cdot f(r)).$$

Hieraus ergibt sich dann die Eindeutigkeit einer derartigen Entwickelung zunächst in dem Umfange, dass aus dem Bestehen der Gleichung:

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} {}_{\mu}\, a_{\mu} \cdot x^{\mu} = \sum_{-\infty}^{+\infty} {}_{\mu}\, b_{\mu} \cdot x^{\mu},$$

zum Mindesten für alle x mit einem gewissen absoluten Betrage $|x| = r$, für welche jene Reihen gleichmässig convergiren, deren Identität folgt. Auch hat es keine besondere Schwierigkeit, diesen Identitätsbeweis auf den Fall auszudehnen, dass die Gleichheit der beiden Reihensummen nur für irgend eine unendliche Punktmenge feststeht.

Fehlen in der betrachteten Reihe die negativen Potenzen, sodass also:

$$f(x) = \sum_{0}^{\infty} {}_{\mu}\, a_{\mu} \cdot x^{\mu}$$

so hat man offenbar:

$$\mathfrak{M}\,(r^{-\mu}\cdot f(r)) = \frac{1}{\mu!} f^{(\mu)}(0).$$

Jene Mittelwerthe stellen also in gewissem Sinne eine Verallgemeinerung der A b l e i t u n g e n von $f(x)$ für $x=0$ dar.

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der Bayerischen Akademie der Wissenschaften München

Jahr/Year: 1895

Band/Volume: 1895

Autor(en)/Author(s): Pringsheim Alfred

Artikel/Article: Ueber die Entwicklung eindeutiger analytischer Functionen in Potenzreihen 75-92