Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Classe

der

k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.

Band XXV. Jahrgang 1895.

München.
Verlag der K. Akademie.
1896.

In Commission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).

Ueber simultane partielle Differentialgleichungen II. O. mit 3 Variabeln.

Von **Eduard v. Weber.**

(*Eingelaufen 9. Februar.*)

Die Frage nach den gemeinsamen Integralen zweier partieller Differentialgleichungen 2. O. in 3 Variabeln ist von den Herren Valyi[1]) und Bianchi[2]) untersucht worden. Nach einer neuen, sehr einfachen Methode, welche namentlich mehrere der Bianchi'schen Fallunterscheidungen unnöthig macht, leiten wir im Folgenden die Hauptergebnisse der genannten Untersuchungen noch einmal ab, und wenden uns dann zum Studium eines besonderen Falles,[3]) der in der allgemeinen Theorie der partiellen Differentialgleichungen höherer Ordnung eine bekannte[4]) wichtige Rolle spielt.

I.

Wir bezeichnen wie üblich mit $p\,q$, $r\,s\,t$, $u\,v\,w\,\bar{\omega}$ bez. die ersten, zweiten, dritten Ableitungen von z nach x und y. Jedes gemeinsame Integral der beiden Gleichungen:

---

1) Crelle's J., Bd. 95, p. 99 f.

2) Atti d. R. Acc. dei Lincei, Rendiconti (4) II, Nota I p. 218, N. II p. 237, N. III p. 307.

3) Bianchi l. c., Nota II.

4) Vgl. Darboux, Ann. de l'Ec. Norm. 7, 1870.

$$F\,(xyzpqrst) = C \tag{1}$$
$$F'\,(xyzpqrst) = C' \tag{2}$$

wo C, C' willkürliche Constante bezeichnen, befriedigt dann auch ein System Pfaff'scher Gleichungen von der Form:

$$\begin{gathered} dz = p\,dx + q\,dy, \quad dp = r\,dx + s\,dy, \\ dq = s\,dx + t\,dy \end{gathered} \tag{3}$$

$$\begin{gathered} dr = u\,dx + v\,dy, \quad ds = v\,dx + w\,dy, \\ dt = w\,dx + \tilde{\omega}\,dy \end{gathered} \tag{4}$$

worin unter $uvw\tilde{\omega}$ gewisse Functionen von $x \ldots t$ zu verstehen sind, die den Gleichungen

$$M + Ru + Sv + Tw = 0 \tag{5}$$
$$N + Rv + Sw + T\tilde{\omega} = 0 \tag{6}$$
$$M' + R'u + S'v + T'w = 0 \tag{7}$$
$$N' + R'v + S'w + T'\tilde{\omega} = 0 \tag{8}$$

genügen; dabei ist

$$M = X + pZ + rP + sQ; \quad N = Y + qZ + sP + tQ$$
$$M' = X' + \ldots, \quad N' = Y' + \ldots, \quad X = \frac{\partial F}{\partial x} \ldots, \quad T' = \frac{\partial F'}{\partial t}.$$

Sind die Gleichungen (5) . . (8) linear unabhängig, hat man aber identisch:

$$\begin{vmatrix} R & S & T & 0 \\ 0 & R & S & T \\ R' & S' & T' & 0 \\ 0 & R' & S' & T' \end{vmatrix} = 0, \tag{9}$$

so existirt augenscheinlich kein gemeinsames holomorphes Integral von (1), (2). Besteht (9) nicht identisch, so sind $u \ldots \tilde{\omega}$ vermöge (5) . . (8) als Functionen von $x \ldots t$ bestimmt, und die Bedingungen dafür, dass das System (3), (4) unbeschränkt integrabel sei, lauten

$$D_x(v) - D_y(u) = D_x(w) - D_y(v) = D_x(\tilde{\omega}) - D_y(w) = 0 \tag{10}$$

worin

$$D_x(f) = \Delta_x f + u\frac{\partial f}{\partial r} + v\frac{\partial f}{\partial s} + w\frac{\partial f}{\partial t}$$

$$D_y(f) = \Delta_y f + v\frac{\partial f}{\partial r} + w\frac{\partial f}{\partial s} + \tilde{\omega}\frac{\partial f}{\partial t}$$

$$\Delta_x(f) = \frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial z} + r\frac{\partial f}{\partial p} + s\frac{\partial f}{\partial q}$$

$$\Delta_y(f) = \frac{\partial f}{\partial y} + q\frac{\partial f}{\partial z} + s\frac{\partial f}{\partial p} + t\frac{\partial f}{\partial q}$$

gesetzt ist.

Indem man aber (5) mit D_y, (6) mit D_x differentiirt und subtrahirt, erhält man zufolge einfacher Rechnung:

$$R(D_y(u) - D_x(v)) + S(D_y(v) - D_x(w)) \\ + T(D_y(w) - D_x(\tilde{\omega}) = 0. \tag{11}$$

ebenso aus (7) und (8):

$$R'(D_y(u) - D_x(v)) + S'(D_y(v) - D_x(w)) \\ + T'(D_y(w) - D_x(\tilde{\omega})) = 0 \tag{12}$$

sodass die Bedingungen (10) nur mit einer einzigen äquivalent sind. Diese eine Bedingung, welche die 2. Ableitungen von F und F' nach $x \ldots t$ linear enthält, ist nothwendig und hinreichend dafür, dass jede der ∞^1 Gleichungen (1) mit jeder der ∞^1 Gleichungen (2) ein Integral mit 4 Constanten gemein habe; dieses Integral ergibt sich durch Integration von (3), (4) unter Berücksichtigung der aus (1), (2) folgenden Anfangsbedingungen. Die willkürliche Annahme von C' liefert dann für jede der Gleichungen (1), die von C für jede Gleichung (2) ein vollständiges Integral.

Verschwinden dagegen alle 4-gliedrigen Determinanten der Matrix von (5) .. (8) identisch, was wir durch

$$\begin{Vmatrix} M & R & S & T & 0 \\ N & 0 & R & S & T \\ M' & R' & S' & T' & 0 \\ N' & 0 & R' & S' & T' \end{Vmatrix} = 0 \tag{13}$$

ausdrücken, ohne dass jedoch alle 3-gliedrigen Unterdeterminanten von (9) zu Null werden, so können wir aus (5)..(8) drei der Grössen $u .. \tilde{\omega}$ durch eine unter ihnen, etwa $\tilde{\omega}$, ausdrücken. Die eine, in (10) enthaltene Bedingung stellt dann eine partielle Differentialgleichung I. O. mit der unbekannten Function $\tilde{\omega}$ und den unabhängigen Variabeln $x .. t$ dar; ist deren allgemeines Integral gefunden, so bleibt noch (3), (4) zu integriren; also:

„Das identische Bestehen der Relationen (13) hat zur Folge, dass die Gleichungen (1), (2) ein gemeinsames Integral besitzen, das von einer willkürlichen Function abhängt und durch Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen gefunden werden kann."

II.

Ehe wir in die genauere Untersuchung des Falles (13) eintreten, schicken wir einige Hilfsbetrachtungen voraus.

Zwei Flächenelemente II. O.[1]) $E(x .. t)$ und $E'(x + \delta x .. t + \delta t)$ heissen nach Lie vereinigt liegend, wenn sie die Relationen

$$\delta z = p\delta x + q\delta y, \quad \delta p = r\delta x + s\delta y, \quad \delta q = s\delta x + t\delta y \tag{14}$$

befriedigen; eine Serie von ∞^1 Elementen II. O., deren jedes mit einem benachbarten vereinigt liegt, heisst ein Streifen II. O. Eine infinitesimale Transformation $X(f)$ der Elemente

---

[1]) Vgl. meine Arbeit: Theorie der Flächenelemente des Raumes von 3 Dimensionen, Math. Ann., Bd. 44, p. 458 ff.

$x..t$ des Raumes heisse eine infinitesimale Streifentransformation, wenn sie jedes Element in ein benachbartes mit ihm vereinigt liegendes überführt. Definiren wir fortan das Symbol d durch die Identität

$$df = X(f)\,\delta\lambda, \tag{15}$$

so hat man identisch:

$$dz = p\,dx + q\,dy;\; dp = r\,dx + s\,dy;\; dq = s\,dx + t\,dy \tag{16}$$

und $X(f)$ hat die Form

$$X(f) = \xi\Delta_x(f) + \eta\Delta_y(f) + \varrho\frac{\partial f}{\partial r} + \sigma\frac{\partial f}{\partial s} + \tau\frac{\partial f}{\partial t} \tag{17}$$

wo $\xi\eta\varrho\sigma\tau$ Functionen von $x..t$ bedeuten. Die ∞^7 Streifen, welche sich durch Integration der Gleichungen:

$$\begin{aligned} &dx : dy : dz : dp : dq : dr : ds : dt \\ &= \xi : \eta : \xi p + \eta q : \xi r + \eta s : \xi s + \eta t : \varrho : \sigma : \tau \end{aligned} \tag{18}$$

ergeben, sollen die Bahnstreifen von $X(f)$ heissen.

Zwei vereinigte Elemente $x..t$ und $x+\delta x..t+\delta t$ werden durch $X(f)$ in benachbarte Elemente $x+dx..$ und $x+\delta x+d(x+\delta x)\ldots$ übergeführt, welche wieder vereinigt liegen, wenn man hat:

$$\left.\begin{aligned} d\delta z &= dp\delta x + dq\delta y + p\,d\delta x + q\,d\delta y \\ d\delta p &= dr\delta x + ds\delta y + r\,d\delta x + s\,d\delta y \\ d\delta q &= ds\delta x + dt\delta y + s\,d\delta x + t\,d\delta y \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Subtrahirt man von diesen Gleichungen bez. die folgenden drei:

$$\left.\begin{aligned} d\delta z &= \delta p\,dx + \delta q\,dy + p\,d\delta x + q\,d\delta y \\ d\delta p &= \delta r\,dx + \delta s\,dy + r\,d\delta x + s\,d\delta y \\ d\delta q &= \delta s\,dx + \delta t\,dy + s\,d\delta x + t\,d\delta y \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

welche ausdrücken, dass die Elemente $x + \delta x \ldots t + \delta t$ und $x + \delta x + d(x + \delta x) \ldots t + \delta t + d(t + \delta t)$ vereinigt liegen, so folgen die Beziehungen:

$$\begin{aligned} dp\,\delta x - \delta p\,dx + dq\,\delta y - \delta q\,dy &= 0 \\ dr\,\delta x - \delta r\,dx + ds\,\delta y - \delta s\,dy &= 0 \\ ds\,\delta x - \delta s\,dx + dt\,\delta y - \delta t\,dy &= 0 \end{aligned}$$

von denen die erste wegen (14), (16) von selbst erfüllt ist. Die andern beiden schreiben wir abkürzend:

$$(d\delta)_1 = 0, \qquad (d\delta)_2 = 0. \tag{21}$$

Da umgekehrt aus (21) wegen (20) die Relationen (19) folgen, so haben wir den Satz:

„Damit die infinitesimale Streifentransformation $X(f)$ 2 benachbarte vereinigt liegende Elemente wieder in solche überführe, ist nothwendig und hinreichend, dass jene Elemente den Bedingungen (21) genügen, wo d durch (15) definirt ist."

Es erhebt sich nun die Frage: Wie muss $X(f)$ beschaffen sein, damit irgend 2 benachbarte Elemente, die (14), (21) befriedigen, in benachbarte vereinigte Elemente übergeführt werden, die w i e d e r u m den R e l a t i o n e n (21) g e n ü g e n? Dazu ist nothwendig und hinreichend, dass man identisch habe:

$$\begin{aligned} d\,(d\delta)_1 &= \lambda_1\,(d\delta)_1 + \lambda_2\,(d\delta)_2 \\ d\,(d\delta)_2 &= \mu_1\,(d\delta)_1 + \mu_2\,(d\delta)_2 \end{aligned} \tag{22}$$

unter $\lambda_1 \ldots \mu_2$ unbestimmte Factoren der Grössenordnung $\delta\lambda$ verstanden. Führt man die Differentiationen links mit Rücksicht auf (14), (15) aus, und vergleicht die Coefficienten von δx, δy, δr, δs, δt auf beiden Seiten, so folgt, wenn partielle Differentialquotienten durch untere Indices angedeutet werden:

$$\left.\begin{aligned}
X\varrho + \varrho\Delta_x(\xi) - \xi\Delta_x(\varrho) + \sigma\Delta_x(\eta) - \eta\Delta_x(\sigma) & \\
= \lambda_1\varrho + \lambda_2\sigma & \\
X\sigma + \varrho\Delta_y(\xi) - \xi\Delta_y(\varrho) + \sigma\Delta_y(\eta) - \eta\Delta_y(\sigma) & \\
= \lambda_1\sigma + \lambda_2\tau & \\
-X\xi + \varrho\xi_r - \xi\varrho_r + \sigma\eta_r - \eta\sigma_r = -\lambda_1\xi & \\
-X\eta + \varrho\xi_s - \xi\varrho_s + \sigma\eta_s - \eta\sigma_s = -\lambda_1\eta - \lambda_2\xi & \\
\varrho\xi_t - \xi\varrho_t + \sigma\eta_t - \eta\sigma_t = -\lambda_2\eta &
\end{aligned}\right\} \quad (23)$$

$$\left.\begin{aligned}
X\sigma + \sigma\Delta_x(\xi) - \xi\Delta_x(\sigma) + \tau\Delta_x(\eta) - \eta\Delta_x(\tau) & \\
= \mu_1\varrho + \mu_2\sigma & \\
X\tau + \sigma\Delta_y(\xi) - \xi\Delta_y(\sigma) + \tau\Delta_y(\eta) - \eta\Delta_y(\tau) & \\
= \mu_1\sigma + \mu_2\tau & \\
\sigma\xi_r - \xi\sigma_r + \tau\eta_r - \eta\tau_r = -\mu_1\xi & \\
-X\xi + \sigma\xi_s - \xi\sigma_s + \tau\eta_s - \eta\tau_s = -\mu_1\eta - \mu_2\xi & \\
-X\eta + \sigma\xi_t - \xi\sigma_t + \tau\eta_t - \eta\tau_t = -\mu_2\eta &
\end{aligned}\right\} \quad (24)$$

Da es sich augenscheinlich um eine Eigenschaft der Bahnstreifen handelt, so kann man unbeschadet der Allgemeinheit $\xi = 1$ setzen, wodurch sich obige Formeln etwas vereinfachen.

Genügen die $\xi, \eta, \varrho, \sigma, \tau$ identisch den Relationen, welche durch Elimination von $\lambda_1 \lambda_2 \mu_1 \mu_2$ aus (23) (24) folgen, so hat das Bahnstreifensystem (18) offenbar folgende Eigenschaft:

„Hat man einen beliebigen Streifen S, der den Differentialgleichungen (21) genügt, so bilden die ∞^1 Streifen des Systems (18), welche bez. von den ∞^1 Elementen von S auslaufen, eine Fläche, da ja je 2 aufeinanderfolgende dieser Streifen nach ihrer ganzen Ausdehnung vereinigt liegen.“

Wir nennen ein solches System von ∞^7 Streifen „ein unbeschränkt integrables Streifensystem.“

III.

Wir setzen in (17) $\xi = 1$, $\eta = \Lambda$, und legen der im Uebrigen beliebigen Streifentransformation $X(f)$ nur die Bedingung auf, dass die 2 totalen Differentialgleichungen (21) eine integrable Combination liefern sollen, d. h. eine Relation der Form:

$$\delta F = \varrho_1 (d\delta)_1 + \varrho_2 (d\delta)_2 \tag{25}$$

erfüllt sei, worin F eine Funktion von $x \ldots t$ bedeutet, und unter Gebrauch der Abkürzungen pag. 102:

$$\delta F = M\delta x + N\delta y + R\delta r + S\delta s + T\delta t$$

gesetzt ist; $\varrho_1\, \varrho_2$ sind unbestimmte Faktoren der Grössenordnung $1:\delta\lambda$.

Indem man in (25) die Coefficienten der willkürlichen Differentiale auf beiden Seiten gleichsetzt und ϱ_1, ϱ_2 eliminirt, folgen die Bedingungen

$$R\Lambda^2 - S\Lambda + T = 0, \tag{26}$$

$$\frac{dy}{dx} = \Lambda, \tag{27}$$

$$\left.\begin{aligned} R\frac{dr}{dx} + (S - R\Lambda)\frac{ds}{dx} + M &= 0 \\ R\frac{ds}{dx} + (S - R\Lambda)\frac{dt}{dx} + N &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

Dies sind aber zusammen mit

$$\frac{dz}{dx} = p + q\Lambda, \quad \frac{dp}{dx} = r + s\Lambda, \quad \frac{dq}{dx} = s + t\Lambda \tag{27a}$$

nichts anderes als die Charakteristikengleichungen der partiellen Differentialgleichung (1). Da aus (26), (27), (28) umgekehrt (25) folgt, so gilt der Satz:

„Die Bedingung, dass die Gleichungen (21) eine integrable Combination δF zulassen, ist äquivalent mit der andern, dass die Bahnstreifen von $X(f)$ den Charakteristikengleichungen von $F = C$ genügen."

Die Gleichungen (28) sind völlig äquivalent mit den folgenden:

$$\frac{dr}{dx} = u + v\Lambda, \quad \frac{ds}{dx} = v + w\Lambda, \quad \frac{dt}{dx} = w + \tilde{\omega}\Lambda \tag{29}$$

unter $u \,..\, \tilde{\omega}$ die allgemeinsten Funktionen von $x \,..\, t$ verstanden, die (5), (6) befriedigen; berechnet man nämlich uvw aus (29) und substituirt in (5), (6), so kommen gerade wieder die Gleichungen (28); umgekehrt, sind die letzteren befriedigt, so genügen alle Werthsysteme $uvw\tilde{\omega}$, die (29) erfüllen, auch den Relationen (5), (6).

Des weiteren verlangen wir jetzt, dass die Gleichungen (21) noch eine zweite, von (25) unabhängige integrable Combination zulassen, d. h. dass man ausser (25) noch habe:

$$\delta F' = \varrho_1'(d\delta)_1 + \varrho_2'(d\delta)_2 \tag{30}$$

mit der Bedingung

$$\varrho_1 \varrho_2' - \varrho_2 \varrho_1' \neq 0 \tag{31}$$

Es folgt zunächst, dass die Gleichung

$$R'\Lambda^2 - S'\Lambda + T' = 0 \tag{32}$$

mit (26) eine Wurzel gemein hat, die wir gerade mit Λ bezeichnen wollen; es besteht also (9) identisch. Ferner müssen alle Systeme von Funktionen $u \,..\, \tilde{\omega}$, die (29), mithin nach obiger Bemerkung auch (5), (6) erfüllen, nun auch den Relationen (7), (8) genügen; da die Gleichungen (5) .. (8) somit eine der Grössen $u \,..\, \tilde{\omega}$ ganz willkürlich lassen, müssen überhaupt alle 4-gliedrigen Determinanten (13) verschwinden. Umgekehrt, ist letzteres der Fall, ohne dass alle 3-gliedrigen

Determinanten von (9) null werden, so kann man aus dreien der Gleichungen (5)..(8), etwa aus (5), (6), (7) die uvw in der Form berechnen:

$$u = k_1 - \Lambda^3 \tilde{\omega}, \quad v = k_2 + \Lambda^2 \tilde{\omega}, \quad w = k_3 - \Lambda \tilde{\omega} \tag{33}$$

wo Λ die wegen (9) vorhandene gemeinsame Wurzel von (26), (32) bedeutet; man erkennt dies leicht durch Anwendung von Sylvester's dialytischer Eliminationsmethode auf (26), (32). Setzt man jetzt

$$\varrho = k_1 + \Lambda k_2, \quad \sigma = k_2 + \Lambda k_3, \quad \tau = k_3 \tag{34}$$

so genügt das Streifensystem, das durch die Gleichungen

$$\begin{gathered} \frac{dy}{dx} = \Lambda, \quad \frac{dz}{dx} = p + q\Lambda, \quad \frac{dp}{dx} = r + s\Lambda, \\ \frac{dq}{dx} = s + t\Lambda, \quad \frac{dr}{dx} = \varrho, \quad \frac{ds}{dx} = \sigma, \quad \frac{dt}{dx} = \tau \end{gathered} \tag{35}$$

definirt ist, wegen (34), (33) den Relationen (29), worin jetzt $u..\tilde{\omega}$ Funktionen von $x..t$ bedeuten, die sowohl (5), (6), als auch (7), (8) befriedigen. Wir haben somit den Satz:

„Das identische Bestehen der Relationen (13) ist die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die beiden Differentialgleichungen (1), (2) ein System von ∞^7 Charakteristiken miteinander gemein haben; dieses System ist durch (35), (34), (33) eindeutig festgelegt."

Setzt man in (27), (27a), (29) für Λ die zweite Wurzel[1]) Λ_1 von (26), so erhält man die Definitionsgleichungen des zweiten Charakteristikensystems von F. Nennen wir einen Streifen der die Differentialgleichung $\delta F' = 0$ befriedigt, kurz einen Streifen von F', so gilt der Satz:

---

[1]) Dass die Gleichungen (26), (32) keine verschwindenden Diskriminanten besitzen, ist, wie man leicht sieht, eine nothwendige Voraussetzung für die Gültigkeit obiger Entwickelungen.

„Die Relationen (13) sind die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass alle charakteristischen Streifen des 2. Systems von F Streifen von F', sowie alle charakt. Streifen des 2. Systems von F' Streifen von F seien.“ Wegen des völligen Reciprocitätsverhältnisses zwischen F und F' genügt es, den ersten Theil der Behauptung zu erweisen.

Wir haben zu zeigen, dass jede der Gleichungen (5), (6) und:

$$M'+A_1N'+R'u+(S'+R'A_1)v+(T'+S'A_1)w+T'A_1\tilde{\omega}=0$$

eine Folge der beiden andern ist. Rändert man aber die Matrix dieser 3 Gleichungen mit der Horizontalreihe N', 0, R', S', T', und der Verticalreihe 0, 0, 0, 1, so folgen nach leichter Umformung die Bedingungen:

$$\left\|\begin{matrix} M & R & S & T & 0 & 0 \\ N & 0 & R & S & T & 0 \\ M' & R' & S' & T' & 0 & -A_1 \\ N' & 0 & R' & S' & T' & 1 \end{matrix}\right\| = 0$$

welche, wie leicht ersichtlich, mit (13) völlig äquivalent sind, w. z. b. w.

Wir behaupten nun:

„Das gemeinsame Charakteristikensystem (35) von (1), (2) ist ein unbeschränkt integrables Streifensystem.“

Es genügt zunächst den beiden Identitäten (25), (30); ersetzt man darin die δx.. durch die dx.., so folgt:

$$dF=0, \qquad dF'=0 \tag{36}$$

Differentiirt man jetzt (25), (30) mit dem Symbol d und beachtet die für jedes f geltende, leicht zu verificirende Identität

$$d(\delta f)-\delta(df)=\frac{\partial f}{\partial p}(d\delta)_1+\frac{\partial f}{\partial q}(d\delta)_2,$$

so folgt wegen (36):

$$\begin{aligned}\varrho_1 d(d\delta)_1 + \varrho_2 d(d\delta)_2 + (d\varrho_1 - P)(d\delta)_1 + (d\varrho_2 - Q)(d\delta_2) &\equiv 0 \\ \varrho_1' d(d\delta)_1 + \varrho_2' d(d\delta)_2 + (d\varrho_1' - P')(d\delta)_1 + (d\varrho_2' - Q')(d\delta)_2 &\equiv 0\end{aligned}$$

woraus sich wegen (31) zwei Identitäten der Form (22) ergeben, w. z. b. w. Die gemeinsamen Integralflächen von (1), (2) werden demnach durch folgenden Process erhalten:

„Man bestimme einen Streifen II. O. S, der den Differentialgleichungen (14), (21) genügt, worin die d durch (35) definirt sind, oder auch (was wegen (25), (30), (31), auf dasselbe herauskommt) irgend einen gemeinsamen Streifen von F und F'; sodann durch Integration von (35) die ∞^1 Streifen, welche bez. von den einzelnen Elementen von S auslaufen und durch sie bez. eindeutig festgelegt sind. Diese ∞^1 Streifen ordnen sich dann zu einer gemeinsamen Integralfläche von (1), (2) zusammen."

Wir können für den Ausgangsstreifen S y und z als willkürliche Funktionen von x annehmen, ferner in einem beliebigen Punkte der so definirten Raumcurve ein Werthsystem p, q, das die Relation $dz = p\,dx + q\,dy$ befriedigt, was ∞^1 Möglichkeiten bietet; endlich können wir noch für $s\,t$ beliebige Anfangswerthe festsetzen, wodurch dann auch der Anfangswerth von r bestimmt und vermöge (14), (21) der Raumcurve entlang ein Streifen festgelegt ist. Also:

„Bestehen die Relationen (13), so gehen durch jede Raumcurve ∞^3 Integralflächen von (1), (2) hindurch."

Soll eine Integralfläche von (1) auch (2) befriedigen, so müssen die auf ihr verlaufenden ∞^3 Streifen des 1. Charakteristikensystems von (1) der Gleichung

$$dF' = 0 \tag{37}$$

genügen; da aber das System der Relationen (27), (27a), (28), (37) augenscheinlich auf (35) zurückführt, so schliesst man leicht, dass durch unsere Methode alle gemeinsamen Integrale von (1), (2) geliefert werden.

Das Bemerkenswerthe dieser Methode besteht darin, dass sie ein vollkommenes Analogon zu der von Lagrange, Charpit, Monge begründeten, von Lie geometrisch präcisirten Integrationsmethode der partiellen Differentialgleichungen I. O. darstellt. In der That lässt sich auch ein grosser Theil der an die genannte Methode sich anschliessenden geometrischen Sätze auf unsern Fall übertragen, was indes hier nicht weiter ausgeführt werden soll. Worauf es uns hier vor Allem ankam, war, den Begriff des unbeschränkt integrabeln Streifensystems aufzustellen und an einem besonders einfachen Falle zu erläutern.

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der Bayerischen Akademie der Wissenschaften München

Jahr/Year: 1895

Band/Volume: 1895

Autor(en)/Author(s): Weber Eduard von

Artikel/Article: Ueber simultane partielle Differentialgleichungen II. Ordnung mit 3 Variabeln 101-113