Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Classe

der

k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.

Band XXV. Jahrgang 1895.

München.

Verlag der K. Akademie.

1896.

In Commission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).

Die Abbildung der Halbebene auf ein Polygon, das von Bögen confocaler Kegelschnitte begrenzt wird.

Von **F. Lindemann.**

(Eingelaufen 4. Mai.)

Es sind zahlreiche Beispiele genau durchgeführt, bei denen es sich um die conforme Abbildung einer complexen Ebene auf eine andere handelt, und bei denen man die Abbildungsfunction als gegeben betrachtet, um die durch sie dargestellte Beziehung geometrisch zu verfolgen. Versucht man aus solchen Beispielen andere für die Hauptaufgabe der Abbildungstheorie (nämlich eindeutige conforme Abbildung eines gegebenen Flächenstückes auf den Einheitskreis oder die Halbebene) abzuleiten, so ist die Ausbeute eine sehr geringe; denn die verlangte Eindeutigkeit wird durch die Verzweigungspunkte der studirten Function in der Regel gerade da gestört, wo es sich um ein wesentlich neues Problem handeln würde. In manchen Fällen kann man indessen diese Störungen heben; und dies an einem Beispiele vollkommen durchzuführen, erschien mir als eine lehrreiche Aufgabe, der die folgenden Ausführungen dienen mögen.

1. Setzt man $z = x + iy$, $z_1 = x - iy$ und schreibt die Gleichung einer in rechtwinkligen Coordinaten gegebenen Curve in der Form

(1) $$f(z, z_1) = 0,$$

so besteht die Relation

$$\frac{dz}{\frac{\partial f}{\partial z_1}} = -\frac{dz_1}{\frac{\partial f}{\partial z}}; \tag{2}$$

und aus letzterer lässt sich nach meiner früheren Darstellung in manchen Fällen die conforme Abbildung eines von der Curve $f = 0$ umschlossenen Ovals auf die Halbebene ($Y > 0$) ableiten; es beruht dies darauf, dass in Folge von (2) die Function

$$\frac{d\eta}{dZ} = i\frac{dz}{dZ}\cdot\frac{1}{\frac{\partial f}{\partial z_1}} \tag{3}$$

auf dem Rande des Ovals reell ist, wenn $Z = X + iY$ einen Punkt der Bildebene bezeichnet.[1])

Die Curve (1) gehöre einem Systeme confocaler Ellipsen und Hyperbeln an, das durch die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2 - \lambda} + \frac{y^2}{b^2 - \lambda} = 1$$

definirt sei; dann geht die Gleichung (1) über in

$$\begin{aligned}(z^2 + z_1^2)(b^2 - a^2) + 2zz_1(a^2 + b^2 - 2\lambda) \\ - 4(a^2 - \lambda)(b^2 - \lambda) = 0;\end{aligned} \tag{4}$$

und es wird

$$\eta' = \frac{d\eta}{dZ} = \frac{i}{4\sqrt{z^2 - e^2}\ \sqrt{(a^2 - \lambda)(b^2 - \lambda)}}\cdot\frac{dz}{dZ}, \tag{5}$$

$$\text{wenn } e^2 = a^2 - b^2,$$

eine Function, die längs der Curve (4) reell ist; dasselbe gilt von ihrem logarithmischen Differentialquotienten

---

1) Vergl. Sitzungsbericht der phys.-ökon. Gesellschaft zu Königsberg i. Pr. vom 7. Juni 1894.

$$(6)\qquad \frac{d\log\eta'}{dZ}=\frac{d\log z'}{dZ}-\frac{z}{z^2-e^2}\cdot z',\quad \text{wo } z'=\frac{dz}{dZ}.$$

Letzterer ist von λ unabhängig; er ist gleich $\frac{d\log v'}{dZ}$, wenn

$$(7)\qquad v=\int\frac{dz}{\sqrt{z^2-e^2}}=\log(z+\sqrt{z^2-e^2})=\log\zeta$$

gesetzt wird. Es ist vortheilhaft v oder ζ als neue Variable eingeführt zu denken. Vermöge der Substitution

$$(8)\qquad \frac{z}{e}=\frac{1}{2}\left(\zeta+\frac{1}{\zeta}\right),\qquad \zeta=z+\sqrt{z^2-e^2}$$

wird bekanntlich[1]) das System confocaler Ellipsen (mit den Brennpunkten $\pm e$) in der z-Ebene übergeführt in ein System concentrischer Kreise in der ζ-Ebene (mit dem Mittelpunkte $\zeta=0$); die zugehörigen confocalen Hyperbeln gehen in die Radienvectoren der Kreise über; der Verbindungslinie der Brennpunkte (doppelt gezählt) entspricht in der ζ-Ebene der Einheitskreis. Jedem von confocalen Ellipsen und Hyperbeln begrenzten Polygone, das keinen Brennpunkt im Innern oder auf dem Rande enthält, entspricht ein von Bögen concentrischer Kreise und deren Radien begrenztes Polygon.

Erstreckt sich keine Seite eines solchen Kegelschnittpolygons ins Unendliche, so sind alle Winkel an den Ecken gleich $\frac{\pi}{2}$ oder gleich $\frac{3\pi}{2}$. Bildet man die ζ-Ebene vermöge der Gleichung (7) auf eine v-Ebene ab, so wird das Polygon in ein geradliniges verwandelt, dessen Abbildung auf die Halbebene nach Christoffel sofort ausgeführt werden kann. Liegt kein Brennpunkt im Innern oder auf dem Rande des abzubildenden Polygons, so haben wir also

[1]) Vergl. z. B. Holzmüller, Einführung in die Theorie der isogonalen Verwandtschaften, Leipzig 1882, p. 130 ff. und Taf IX.

$$(9) \qquad v = \log(z + \sqrt{z^2 - e^2}) = C \int \frac{\sqrt{\Pi(Z - B_t)}}{\sqrt{\Pi(Z - A_s)}}\, dZ + C'.$$

Hiebei bedeuten $B_1, B_2, \ldots B_n$ diejenigen Stellen der Axe $Y = 0$, denen je eine Ecke mit dem Winkel $\frac{3\pi}{2}$ im gegebenen Polygon entspricht, während den Punkten A_1, $A_2 \ldots A_m$ Ecken mit dem Winkel $\frac{\pi}{2}$ zugeordnet sind. Es ist immer

$$(9\text{a}) \qquad m = n + 4,$$

so dass der Punkt $Z = \infty$ keine singuläre Stelle für die Abbildung liefert (wenn nicht zufällig eine der Grössen A_s, B_t unendlich gross wird).

2. Ist das gegebene Polygon im Endlichen geschlossen, wie im vorigen Falle, liegt aber ein Brennpunkt auf dem Rande (etwa $z = e$), so betrachten wir wieder die durch (6) gegebene Function $\frac{d \log v'}{dZ}$. Da jetzt die Relation

$$(10) \qquad m = n + 3$$

erfüllt ist, so ist die Function

$$\frac{d \log v'}{dZ} - \frac{1}{2} \Sigma \frac{1}{Z - B_t} + \frac{1}{2} \Sigma \frac{1}{Z - A_s} + \frac{1}{2} \frac{1}{Z - E},$$

wo der reelle Punkt E dem Brennpunkte e zugeordnet sei, überall (auch für $Z = \infty$) holomorph, also gleich einer Constanten. Das Verhalten im Brennpunkte bedarf nur noch einer Besprechung. Es besteht für $z = e$ eine Entwicklung der Form

$$(11) \qquad z - e = \varepsilon_1 (Z - E) + \varepsilon_2 (Z - E)^2 + \ldots,$$

und es ist demnach

$$\frac{z}{z^2-e^2}\frac{dz}{dZ}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z+e}+\frac{1}{z-e}\right)\frac{dz}{dZ}=\frac{1}{2}\frac{1}{Z-E}+\mathfrak{P}(Z-E)$$

wenn $\mathfrak{P}(Z-E)$ eine nach positiven Potenzen geordnete Reihe bedeutet; die betrachtete Function verhält sich also an der Stelle $Z=E$ in der That nicht singulär. Die Abbildung wird sonach durch eine Formel der folgenden Gestalt vermittelt:

$$\text{(10a)}\quad \log(z+\sqrt{z^2-e^2}) = C\int\frac{\sqrt{\Pi(Z-B_t)}}{\sqrt{\Pi(Z-A_s)}}\frac{dZ}{\sqrt{Z-E}}+C'.$$

Liegen beide Brennpunkte auf dem Rande des Polygons und entspricht der Werth $Z=E'$ dem Werthe $z=-e$, so finden wir in gleicher Weise:

$$\text{(12)}\qquad m=n+2,$$

$$\text{(12a)}\quad \log(z+\sqrt{z^2-e^2})=C\int\frac{\sqrt{\Pi(Z-B_t)}}{\sqrt{\Pi(Z-A_s)}}\frac{dZ}{\sqrt{(Z-E)(Z-E')}}.$$

3. Es kann auch vorkommen, dass der Brennpunkt nicht nur auf dem Rande des Polygons liegt, sondern auch eine Ecke desselben bildet; das Polygon erscheint dann längs eines Stückes der reellen Axe, das vom betr. Brennpunkte ausgeht, aufgeschlitzt. Die Entwicklung (11) ist zu ersetzen durch

$$z-e = \delta_2(Z-E)^2+\delta_3(Z-E)^3+\ldots.$$

Wir finden in gleicher Weise, da die Function $\frac{d\log v'}{dZ}$ an der Stelle $Z=E$ nicht unendlich wird:

$$\text{(13)}\qquad m=n+4,$$

$$\text{(13a)}\quad \log(z+\sqrt{z^2-e^2})=C\int\frac{\sqrt{\Pi(Z-B_t)}}{\sqrt{\Pi(Z-A_s)}}dZ+C'.$$

Sind beide Brennpunkte Ecken des Polygons, so wird:

$$(14) \qquad m = n + 4,$$

$$(14a) \qquad \log(z + \sqrt{z^2 - e^2}) = C \int \frac{\sqrt{\Pi(Z - B_t)}}{\sqrt{\Pi(Z - A_s)}} dZ + C'.$$

Liegt ein Brennpunkt auf dem Rande, während der andere als Ecke auftritt, so ist

$$(15) \qquad m = n + 3,$$

$$(15a) \qquad \log(z + \sqrt{z^2 - e^2}) = C \int \frac{\sqrt{\Pi(Z - B_t)}}{\sqrt{\Pi(Z - A_s)}} \frac{dZ}{\sqrt{Z - E}} + C'.$$

4. Liegt ein Brennpunkt im Innern des abzubildenden Polygons, so gilt wieder eine Entwicklung der Form (11); es bedeutet nun jetzt E einen Punkt im Innern der Halbaxe $Y > v$. Damit die Function (6) auf dem Rande reell sei, muss dann der conjugirte Punkt E_1 in gleicher Weise als singuläre Stelle vorkommen; es wird also:

$$(16) \qquad m = n + 2,$$

(16a) $$\log(z + \sqrt{z^2 - e^2})$$
$$= C \int \frac{\sqrt{\Pi(Z - B_t)}}{\sqrt{\Pi(Z - A_s)}} \frac{dZ}{\sqrt{(Z - E)(Z - E_1)}} + C'.$$

Liegen beide Brennpunkte im Innern, so ist:

$$(17) \qquad m = n.$$

(17a) $$\log(z + \sqrt{z^2 - e^2})$$
$$= C \int \frac{\sqrt{\Pi(Z - B_t)}}{\sqrt{\Pi(Z - A_s)}} \frac{dZ}{\sqrt{Z - E)(Z - E_1)(Z - E')(Z - E_1')}} + C'.$$

Für $m = n = 0$ ergibt sich hieraus insbesondere die Schwarzsche Formel für das Innere einer Ellipse.

Liegt $z = e$ im Innern, $z = -e$ auf dem Rande des Polygons, so haben wir

$$m = n + 1, \tag{18}$$

$$\log\left(z + \sqrt{z^2 - e^2}\right) = C \int \frac{\sqrt{\Pi(Z - B_t)}}{\sqrt{\Pi(Z - A_s)}} \frac{dZ}{\sqrt{(Z-E)(Z-E_1)(Z-E')}} + C'. \tag{18a}$$

Liegt $z = e$ im Innern und ist $z = -e$ eine Ecke des Polygons, so wird

$$m = n + 2, \tag{19}$$

$$\log\left(z + \sqrt{z^2 - e^2}\right) = C \int \frac{\sqrt{\Pi(Z - B_t)}}{\sqrt{\Pi(Z - A_s)}} \frac{dZ}{\sqrt{(Z-E)(Z-E_1)}} + C'. \tag{19a}$$

5. Es bleibt noch der Fall zu betrachten, dass sich der unendlich ferne Punkt der z-Ebene im Innern des Polygons befindet, d. h. dass es sich um die Abbildung der Halbebene auf das Aeussere eines Polygons von der bisher betrachteten Gestalt handelt. Die Aufgabe erledigt sich in derselben Weise, wie die entsprechende Aufgabe bei geradlinigen Polygonen durch Christoffel[1]) Erledigung fand. Es sei $A + iB$ der Punkt, welcher dem Punkte $z = \infty$ zugeordnet wird, so dass eine Entwicklung der Form

$$\frac{1}{z} = \gamma_1 (Z - A - iB) + \gamma_2 (Z - A - iB)^2 + \ldots . \tag{20}$$

besteht. Ist dann n die Zahl der Ecken mit den Winkeln $\frac{3\pi}{2}$, m diejenige mit den Winkeln $\frac{\pi}{2}$, so können wir alle möglichen Fälle in den Gleichungen

1) Annali di Matematica, Serie 2, Bd. 4, 1870.

$$\text{(21)} \qquad n = m + \nu$$

$$\text{(21 a)} \qquad \log (z + \sqrt{z^2 - c^2}) = C \int \frac{\sqrt{\Pi (Z - B_t)}}{\sqrt{\Pi (Z - A_s)}} \frac{d\,Z}{U} + C',$$

wo $U = (Z - E)^{\alpha} (Z - E_1)^{\alpha_1} (Z - E')^{\beta} (Z - E_1')^{\beta_1} [(Z - A)^2 + B^2]$

zusammenfassen; zur Ableitung der letzten Gleichung hat man die Function (6) an den einzelnen singulären Stellen zu entwickeln. Die einzelnen Fälle unterscheiden sich nun in folgender Weise:

1) Kein Brennpunkt liegt im Innern des abzubildenden Polygons (welches den unendlich fernen Punkt enthält):

$$\nu = 0, \quad \alpha = 0, \quad \alpha_1 = 0, \quad \beta = 0, \quad \beta_1 = 0.$$

2) Ein Brennpunkt auf dem Rande:

$$\nu = 1, \quad \alpha = \frac{1}{2}, \quad \alpha_1 = 0, \quad \beta = 0, \quad \beta_1 = 0.$$

3) Beide Brennpunkte auf dem Rande:

$$\nu = 2, \quad \alpha = \frac{1}{2}, \quad \alpha_1 = 0, \quad \beta = \frac{1}{2}, \quad \beta_1 = 0.$$

4) Ein Brennpunkt als Ecke:

$$\nu = 0, \quad \alpha = 0, \quad \alpha_1 = 0, \quad \beta = 0, \quad \beta_1 = 0.$$

5) Beide Brennpunkte als Ecken:

$$\nu = 0, \quad \alpha = 0, \quad \alpha_1 = 0, \quad \beta = 0, \quad \beta_1 = 0.$$

6) Beide Brennpunkte auf dem Rande und einer von ihnen als Ecke:

$$\nu = 1, \quad \alpha = \frac{1}{2}, \quad \alpha_1 = 0, \quad \beta = 0, \quad \beta_1 = 0.$$

7) Ein Brennpunkt im Innern:

$$\nu = 2, \quad \alpha = \frac{1}{2}, \quad \alpha_1 = \frac{1}{2}, \quad \beta = 0, \quad \beta_1 = 0.$$

8) Beide Brennpunkte im Innern:

$$\nu = 4, \quad \alpha = \frac{1}{2}, \quad \alpha_1 = \frac{1}{2}, \quad \beta = \frac{1}{2}, \quad \beta_1 = \frac{1}{2}.$$

9) Ein Brennpunkt auf dem Rande, der andere im Innern:

$$\nu = 3, \quad \alpha = \frac{1}{2}, \quad \alpha_1 = \frac{1}{2}, \quad \beta = \frac{1}{2}, \quad \beta_1 = 0.$$

10) Ein Brennpunkt im Innern, der andere als Ecke:

$$\nu = 2, \quad \alpha = \frac{1}{2}, \quad \alpha_1 = \frac{1}{2}, \quad \beta = 0, \quad \beta_1 = 0.$$

Der Fall 1) liefert für $n = m = 0$ insbesondere die Schwarz'sche Formel für die Abbildung des Aeussern einer Ellipse. Der Fall 5) führt für $m = n = 0$ zu der bekannten (z. B. für die Kugelfunctionen wichtigen) Abbildung:

$$\frac{Z - A - iB}{Z - A + iB} = a\left(z + \sqrt{z^2 - e^2}\right) + \beta.$$

6. Liegt der unendlich ferne Punkt der z-Ebene auf dem Rande des Polygons, ohne eine Ecke desselben zu bilden, so sind die Formeln (21) und (21a) zu ersetzen durch:

$$(22) \qquad m = n + \nu,$$

$$(22\text{a}) \qquad \log\left(z + \sqrt{z^2 - e^2}\right) = C \int \frac{\sqrt{\Pi(Z - B_t)}}{\sqrt{\Pi(Z - A_s)}} \frac{dZ}{U} + C',$$

wo $U = (Z - E)^{\alpha}(Z - E_1)^{\alpha_1}(Z - E')^{\beta}(Z - E_1')^{\beta_1}(Z - A)$

und wo der reelle Punkt $Z = A$ dem Punkt $z = \infty$ entspricht. Für die eben unterschiedenen 10 Fälle haben wir jetzt bez.:

$$\nu = 2,\ 1,\ 0,\ 2,\ 2,\ 1,\ 0,\ -1,\ -1,\ 0$$

zu setzen, während die zugehörigen Werthe von $\alpha, \alpha_1, \beta, \beta_1$ ungeändert bleiben.

7. Ein neuer Ansatz wird nöthig, wenn der unendlich ferne Punkt der z-Ebene als Ecke des abzubildenden Polygons einfach oder mehrfach vorkommt, d. h. wenn sich das gegebene Flächenstück nach einer Richtung oder nach mehreren Richtungen (zwischen je zwei Hyperbelzweigen) ins Unendliche erstreckt. Vermöge der Abbildung (8) entspricht jetzt dem gegebenen Flächenstücke das Innere eines Kreisbogenpolygons, dessen Begrenzung durch concentrische Kreise und deren Radien gebildet wird und bei dem das gemeinsame Centrum mehrfach als Ecke vorkommt. Zwei im Centrum zusammentreffende Radien bilden den Winkel $\lambda\pi$, wenn in der z-Ebene die Asymptoten der entsprechenden Hyperbeläste denselben Winkel einschliessen. Statt des Punktes $\zeta = 0$ kann auch der Punkt $\zeta = \infty$ als Ecke des Kreisbogenpolygons vorkommen; es können auch beide Punkte gleichzeitig als Ecken in Betracht zu ziehen sein. Unser Problem ist hierdurch, falls die Brennpunkte nicht im Innern oder auf dem Rande liegen auf das Schwarz'sche Problem reducirt; es wird gelöst durch eine Differentialgleichung der Form

$$(23) \qquad \{\zeta, Z\} = R(Z),$$

wenn in bekannter Weise

$$\{\zeta, Z\} = \frac{d^2 \log \dfrac{d\zeta}{dZ}}{dZ^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{d \log \dfrac{d\zeta}{dZ}}{dZ}\right)^2$$

gesetzt wird, und wenn $R(Z)$ eine rationale Function bezeichnet. Es seien wieder A_r $(r = 1, 2, \ldots n)$ die reellen Punkte der Z-Ebene, welche aus den Ecken mit dem Winkel $\frac{\pi}{2}$ hervorgehen, B_s $(s = 1, 2, \ldots m)$ diejenigen Punkte, denen Ecken mit den Winkeln $\frac{3\pi}{2}$ entsprechen, C_t die Punkte der Axe $Y = 0$, denen der Punkt $\zeta = 0$ als Ecke des Polygons entspricht und $\lambda_t \pi$ der zugehörige Winkel, endlich

D_u diejenigen Punkte, die aus einer Ecke $\zeta = \infty$ mit dem Winkel μ_u hervorgehen. Man findet:

$$\{\zeta, Z\} = \{z, Z\} + \frac{3\,e^2}{2\,(z^2 - e^2)^2}\left(\frac{d\,z}{d\,Z}\right)^2.$$

Die Differentialgleichung des Problems ist daher von der Form:

$$(24) \qquad \{z, Z\} + \frac{3\,e^2}{2\,(z^2 - e^2)^2}\left(\frac{d\,z}{d\,Z}\right)^2$$

$$= \sum_r \left[\frac{3}{8}\frac{1}{(Z-A_r)^2} + \frac{\alpha_r}{Z-A_r}\right] + \sum_s \left[-\frac{5}{8}\frac{1}{(Z-B_s)^2} + \frac{\beta_s}{Z-B_s}\right]$$

$$+ \sum_t \left[\frac{1-\lambda_t^2}{2\,(Z-C_t)^2} + \frac{\gamma_t}{Z-C_t}\right] + \sum_u \left[\frac{1-\mu_u^2}{2\,(Z-D_u)^2} + \frac{\delta_u}{Z-D_u}\right];$$

und zwischen den Constanten der rechten Seite bestehen die Relationen:

$$(25) \quad \begin{cases} \Sigma\,\alpha_r + \Sigma\,\beta_s + \Sigma\,\gamma_t + \Sigma\,\delta_u = 0, \\ \Sigma\,A_r\,\alpha_r + \Sigma\,B_s\,\beta_s + \Sigma\,C_t\,\gamma_t + \Sigma\,D_u\,\delta_u + \frac{3}{8}\,n - \frac{5}{8}\,m \\ \qquad + \frac{1}{2}\,\Sigma\,(1-\lambda_t^2) + \frac{1}{2}\,\Sigma\,(1-\mu_u^2) = 0, \\ \Sigma A_r^2\alpha_r + \Sigma B_s^2\beta_s + \Sigma C_t^2\gamma_t + \Sigma D_u^2\delta_u + \frac{3}{4}\,\Sigma A_r - \frac{5}{4}\Sigma B_s \\ \qquad + \Sigma\,(1-\lambda_t^2)\,C_t + \Sigma\,(1-\mu_u^2)\,D_u = 0. \end{cases}$$

Die Integration der Gleichung (24) ist vermöge (23) in bekannter Weise auf die Integration einer linearen homogenen Differentialgleichung zurückgeführt. Die rechte Seite von (24) ist hierbei gleich $R(Z)$, d. h. gleich der rechten Seite von (23), zu setzen.

8. Lassen wir zu, dass ein Brennpunkt im Innern oder auf dem Rande des abzubildenden Flächenstückes liege, so sind an der rechten Seite von (24) gewisse Modificationen

anzubringen. Handelt es sich um den Brennpunkt $+e$, so besteht eine Entwicklung von der Form (11). Entwickelt man dann die linke Seite von (24) nach Potenzen von $Z-E$ und beachtet, dass, wenn E im Innern der Halbebene $Y>0$ liegt, der conjugirte Punkt E_1 in entsprechender Weise singulär sein muss, so wird das Problem im allgemeinsten Falle durch eine Gleichung der folgenden Form gelöst:

$$
\begin{aligned}
(26) \qquad & \{z, Z\} + \frac{3\,e^2}{2\,(z^2-e^2)^2}\left(\frac{d\,z}{d\,Z}\right)^2 \\
&= R(Z) + \frac{3}{8}\left[\frac{\varrho}{(Z-E)^2} + \frac{\varrho_1}{(Z-E_1)^2} + \frac{\varrho'}{(Z-E')^2} + \frac{\varrho_1'}{(Z-E_1')^2}\right] \\
&\quad + \frac{\varkappa\cdot\sigma}{Z-E} + \frac{\varkappa_1\cdot\sigma_1}{Z-E_1} + \frac{\varkappa'\cdot\sigma'}{Z-E'} + \frac{\varkappa_1'\cdot\sigma_1'}{Z-E_1'}.
\end{aligned}
$$

Hier bedeutet $R(Z)$ die rechte Seite von (24); $\varkappa_1$ ist zu $\varkappa$, $\varkappa_1'$ zu $\varkappa'$ conjugirt; $\varrho, \varrho_1, \varrho', \varrho_1', \sigma, \sigma_1, \sigma', \sigma_1'$ sind gleich 0 oder 1 je nach Lage der Brennpunkte; und zwischen den Constanten der rechten Seite bestehen die Relationen:

$$
(27) \quad \left\{
\begin{aligned}
& B + \varkappa + \varkappa_1 + \varkappa' + \varkappa_1' = 0, \\
& B' + \sigma\varkappa E + \sigma_1 E_1 + \sigma'\varkappa' E' + \sigma_1'\varkappa_1' E_1' = 0, \\
& B'' + \sigma\varkappa E^2 + \sigma_1\varkappa_1 E_1^2 + \sigma'\varkappa' E'^2 + \sigma_1'\varkappa_1' E_1'^2 + \frac{3}{4}(\varrho E \\
& \qquad + \varrho_1 E_1 + \varrho' E' + \varrho_1' E_1') = 0,
\end{aligned}
\right.
$$

wo mit B, B', B'' die linken Seiten der entsprechenden Gleichungen (25) bezeichnet sind.

Die verschiedenen möglichen Fälle unterscheiden wir in derselben Weise durch Zahlen, wie dies in Nr. 5 geschah. Dann haben wir folgende Resultate:

1) Alle Grössen ϱ, σ sind Null; die Gleichung (26) ist mit (24) identisch.

2) $\varrho = \sigma = 1, \quad \varrho_1 = \varrho' = \varrho_1' = \sigma_1 = \sigma' = \sigma_1' = 0.$

3) $\varrho = \varrho' = \sigma = \sigma' = 1, \quad \varrho_1 = \varrho_1' = \sigma_1 = \sigma_1' = 0.$

4) $\varrho = \varrho_1 = \varrho' = \varrho_1' = \sigma_1 = \sigma' = \sigma_1' = 0, \quad \sigma = 1.$

5) $\varrho = \varrho_1 = \varrho' = \varrho_1' = \sigma_1 = \sigma_1' = 0, \quad \sigma = \sigma' = 1.$

6) $\varrho = \sigma = \sigma' = 1, \quad \varrho_1 = \varrho' = \varrho_1' = \sigma_1 = \sigma_1' = 0.$

7) $\varrho = \varrho_1 = \sigma = \sigma_1 = 1, \quad \varrho' = \varrho_1' = \sigma' = \sigma_1' = 0.$

8) $\varrho = \varrho_1 = \varrho' = \varrho_1' = \sigma = \sigma_1 = \sigma' = \sigma_1' = 1.$

9) $\varrho = \varrho' = \varrho_1' = \sigma = \sigma' = \sigma_1' = 1, \quad \varrho_1 = \sigma_1 = 0.$

10) $\varrho = \varrho_1 = \sigma = \sigma_1 = \sigma' = 1, \quad \varrho' = \varrho_1' = \sigma_1' = 0.$

Ist $m = n = 0$, so findet man aus (1) insbesondere die Abbildung des von den beiden Zweigen einer Hyperbel eingeschlossenen Ebenenstückes; sie geschieht durch die Formel

$$(28) \qquad \zeta = z + \sqrt{z^2 - e^2} = \alpha \left(\frac{Z-C}{Z-D}\right)^\lambda + \beta,$$

wo $\lambda\pi$ den von den Asymptoten eingeschlossenen Winkel bezeichnet. Die Formel (28) folgt direct aus der bekannten Gleichung für die Abbildung eines Kreisbogen-Zweiecks.

9. Aus (7) leiten wir die Abbildung des von einem Hyperbelzweige eingeschlossenen Flächenstückes ab. Hat λ dieselbe Bedeutung wie in (28), so ist der von den Asymptoten eingeschlossene Winkel hier gleich $(1-\lambda)\,\pi$. Sei $\mu = 1 - \lambda$, $E = i$, $E_1 = -i$, so ergibt sich die Differentialgleichung:

$$\{\zeta, Z\} = \frac{1-\mu^2}{2} \frac{1}{(Z-C)^2} + \frac{3}{8} \frac{1}{(Z-i)^2} + \frac{3}{8} \frac{1}{(Z+i)^2} + \frac{\gamma}{Z-C} + \frac{\varkappa}{Z-i} + \frac{\varkappa_1}{Z+i},$$

und die Gleichungen (25) werden:

$$\gamma + \varkappa + \varkappa_1 = 0,$$
$$\gamma C + \varkappa E + \varkappa_1 E_1 + \frac{3}{4} + \frac{1-\mu^2}{2} = 0,$$
$$\gamma C^2 + \varkappa E^2 + \varkappa_1 E_1^2 + C(1-\mu^2) = 0.$$

Wir wählen $C = \infty$ und finden dann:

$$\gamma = 0, \quad \varkappa = -\varkappa_1 = i\,\frac{1+2\mu^2}{8};$$

die Differentialgleichung wird:

$$(29) \qquad \{\zeta, Z\} = \frac{3}{4}\,\frac{Z^2-1}{(Z^2+1)^2} - \frac{1}{4}\,\frac{1+2\mu^2}{Z^2+1};$$

ihre Integration geschieht durch die lineare Gleichung:

$$(Z^2+1)\frac{d^2\Theta}{dZ^2} + Z\frac{d\Theta}{dZ} - \frac{\mu^2}{4}\Theta = 0.$$

Die particulären Integrale der letzteren sind:

$$\Theta_1 = (Z+\sqrt{Z^2+1})^{\frac{\mu}{2}}, \qquad \Theta_2 = (Z-\sqrt{Z^2+1})^{\frac{\mu}{2}}$$

Das allgemeine Integral von (29) ist eine lineare Function von $\frac{\Theta_1}{\Theta_2}$, also

$$(30) \qquad \frac{a\zeta+b}{c\zeta+d} = \frac{\Theta_1}{\Theta_2} = (Z+\sqrt{Z^2+1})^{\mu}.$$

Durch diese Formel wird die Abbildung der Halbebene auf den von einem Hyperbelaste begrenzten Theil der Ebene vermittelt; und zwar liegt letzterer auf der concaven Seite der Hyperbel, wenn $\mu < 1$ ist, auf der convexen Seite im andern Falle; $\mu\pi$ ist der von den Asymptoten eingeschlossene Winkel.

Dasselbe Resultat erhält man nach einer früher von mir angegebenen Methode. Es sei die Gleichung einer Cassinischen Curve in der Form

$$(31) \qquad (z-a)(z_1-a)(z+a)(z_1+a) = c^2$$

gegeben, so dass die reellen Punkte a und $-a$ als gemeinsame Brennpunkte der vom Parameter c abhängigen Curvenschaar auftreten. Ausserdem hat die Curve zwei andere Brennpunkte:

man findet sie, indem man die vom unendlich fernen Kreispunkte $z = 0$ ausgehenden Tangenten mittelst der Relation $\frac{\partial f}{\partial z_1} = 0$ bestimmt; nun ist

$$\left(\frac{\partial f}{\partial z_1}\right)^2 = z_1^2 (z^2 - a^2)^2 = (z^2 - a^2)\,[c^2 + a^2 (z^2 - a^2)]\,;$$

wir haben also die vier Brennpunkte

$$z = \pm a \quad \text{und} \quad z = \pm \frac{1}{a} \sqrt{a^4 - c^2}.$$

Ist $a^4 > c^2$, so besteht die Curve aus zwei Ovalen; von dem einen wird die positive Axe in den Punkten $\sqrt{a^2 - c}$ und $\sqrt{a^2 + c}$ getroffen; zwischen beiden liegen die Brennpunkte a und $\frac{1}{a}\sqrt{a^4 - c^2}$. Die Abbildung eines solchen Ovals, das zwei Brennpunkte umschliesst, auf die Halbebene $Y > 0$ geschieht nach jener Methode durch die Gleichung

$$(32) \quad \int \frac{dz}{\sqrt{(z^2 - a^2)\,[c^2 + a^2 (z^2 - a^2)]}}$$
$$= C \int \frac{dZ}{\sqrt{(Z - A)(Z - A_1)(Z - B)(Z - B_1)}} + C',$$

wenn die Punkte A, B den beiden inneren Brennpunkten entsprechen und wenn A_1, B_1 bez. zu A, B conjugirt sind.

Wird jetzt $c = a^2$, so erhält die Curve (31) einen Doppelpunkt im Anfangspunkte, in den auch der von c abhängige Brennpunkt hineinrückt; auch B fällt mit B_1 zusammen und wird reel; und die Formel (32) geht über in:

$$(33) \quad \frac{1}{a} \int \frac{dz}{z\sqrt{z^2 - a^2}} = C \int \frac{dZ}{(Z - B)\sqrt{(Z - A)(Z - A_1)}} + C'.$$

Hierdurch ist die Abbildung des Innern einer Schleife einer Lemniscate auf die Halbebene vermittelt.

Schliessen die Tangenten des Doppelpunktes den Winkel $\mu\pi$ ein, so muss für $z = 0$ eine Entwicklung der Form

$$z = (Z - B)^\mu \mathfrak{P}(Z - B)$$

bestehen; es wird also

$$\frac{dz}{z} = \mu \frac{dZ}{Z - B} + \frac{\mathfrak{P}'}{\mathfrak{P}} dZ.$$

In (33) müsste daher $a^2 C = i\mu(A - B)$ gesetzt werden. Für eine eigentliche Lemniscate muss allerdings $\mu = \frac{1}{2}$ genommen werden, denn sie wird aus einer gleichseitigen Hyperbel durch die Transformation $z = t^{-1}$ gewonnen. Durch letztere Transformation werden aber aus beliebigen Hyperbeln Curven erhalten, die den Lemniscaten ganz analog sind, und bei denen μ beliebig bleibt (vgl. unten Nr. 9). Sie haben gleichfalls nur zwei Brennpunkte, und für sie gilt also auch die Formel (33). Lassen wir $B = \infty$, $A = i$, $A_1 = -i$, $a = e^{-1}$ werden, so folgt:

$$\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - e^2}} = \mu \int \frac{dZ}{\sqrt{Z^2 + 1}} + C,$$

woraus wiederum die Gleichung (30) gewonnen wird; es ist nur nachträglich t mit z zu vertauschen.

Denkt man sich den Punkt i der Z-Ebene durch einen beliebigen Punkt B der Halbebene $Y > 0$ ersetzt, ebenso $-i$ durch den conjugirten Punkt B_1 und lässt sodann $e = 0$ werden, so nähern sich auch B und B_1 demselben reellen Werthe B_0 und die Gleichung (30) gibt

$$\frac{a\zeta + b}{c\zeta + d} = (2Z - B_0)^\mu.$$

Es entsteht also in der That die bekannte Formel für die Abbildung der Halbebene auf den von zwei Geraden (hier den Asymptoten der Hyperbel, in welche letztere für $e = 0$ zerfällt) eingeschlossenen Winkelraum.

10. Die hier befolgte Methode wird man auch in anderen Fällen anwenden können, in denen die Abbildung eines gegebenen Curvensystems der z-Ebene auf ein System von Kreisen der ζ-Ebene bekannt ist, sobald nur $\{\zeta, z\}$ eine rationale Function von z ist. Selbstverständlich gelingt dies bei dem Systeme confocaler Parabeln, da dasselbe aus dem Systeme confocaler Ellipsen und Hyperbeln durch Grenzübergang gewonnen werden kann.

Ferner kommt das System von Curven in Betracht, das aus den confocalen Ellipsen und Hyperbeln durch die Transformation $t = z^{-1}$ hervorgeht. Sei $t = \sigma + i\tau$, so sind dies die Curven:

$$(34) \qquad \begin{aligned} &(\sigma^2+\tau^2)^2 (a^2-\lambda) (b^2-\lambda) + 4\lambda (\sigma^2+\tau^2) \\ &\qquad - 4a^2\sigma^2 - 4b^2\tau^2 = 0. \end{aligned}$$

Sie haben sämmtlich im Anfangspunkte einen Doppelpunkt. Für $\lambda < b^2\ (a^2 > b^2)$ ist derselbe isolirt, für $\lambda > b^2$ hat die Gestalt der Curve Aehnlichkeit mit derjenigen einer gewöhnlichen Lemniscate; eine solche findet man für $2\lambda = a^2 + b^2$, sie entspricht der gleichseitigen Hyperbel

$$\sigma^2 - \tau^2 = \frac{1}{2}(a^2 - b^2).$$

Ist $t_1 = \sigma - i\tau$, und wird die linke Seite von (34) für den Augenblick mit φ bezeichnet, so sind die Brennpunkte durch die Gleichung $\frac{\partial \varphi}{\partial t_1}$ bestimmt. Wir haben $\varphi(t_1, t_1) = t^2 t_1^2 f(z, z_1)$, also:

$$\frac{1}{t^2 t_1^2}\frac{\partial \varphi}{\partial t_1} - \frac{2}{t^2 t_1^3}\varphi = \frac{\partial f}{\partial z_1}\frac{\partial z_1}{\partial t_1} = -\frac{\partial f}{\partial z_1}\frac{1}{t_1^2}$$

Nun war in Nr. 1:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial z_1}\right)^2 = 16\,(z^2 - c^2)\,(a^2 - \lambda)\,(b^2 - \lambda),$$

also vermöge $\varphi = 0$:

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t_1}\right)^2 = t^4 \left(\frac{\partial f}{\partial z_1}\right)^2 = 16\,(1 - c^2 t^2)\,t^2\,(a^2 - \lambda)\,(b^2 - \lambda)$$

Jede Curve des Systems (34) hat daher nur die beiden (allen gemeinsamen) Brennpunkte $t = \pm c^{-1}$, wie es geometrisch nach der Theorie der Cremona'schen Transformation selbstverständlich ist.

Ein anderes Beispiel gibt die Transformation

$$\zeta = z^2$$

Den Parallelen zu den Axen der ζ-Ebene entsprechen zwei Orthogonalschaaren von gleichseitigen Hyperbeln.[1]) Die Abbildung eines von letzteren gebildeten Polygons geschieht also, indem man die Function

$$\frac{d \log \frac{d\zeta}{dZ}}{dZ} = 2\,\frac{d}{dZ} \log\left(z\,\frac{dz}{dZ}\right)$$

als rationale Function von Z bestimmt. Einer beliebigen geraden Linie der ζ-Ebene entspricht eine gleichseitige Hyperbel mit dem Mittelpunkte $z = 0$; auch für Polygone, deren Begrenzung durch beliebige concentrische gleichseitige Hyperbeln gegeben wird, ist also diese Methode anwendbar.[2])

Einem beliebigen Kreise der ζ-Ebene entspricht eine Cassini'sche Curve der z-Ebene, deren Mittelpunkt an der

---

[1]) Vgl. Holzmüller a. a. O. p. 105 ff.

[2]) Es ist dies schon von Sanio angegeben: Die Abbildung des Aeusseren eines Kreisbogenpolygons. Königsberger Inauguraldissertation 1885.

Stelle $z = 0$ liegt; dieselbe ist eine gewöhnliche Lemniscate, wenn der Kreis durch den Punkt $\zeta = 0$ hindurchgeht. Die Abbildung der Halbebene $Y > 0$ auf Polygone, deren Begrenzung durch Bögen concentrischer Cassini'scher Curven gebildet wird, ist also zurückgeführt auf Bestimmung der Function

$$\{\zeta, Z\} = \{z, Z\} + \frac{3}{2}\frac{1}{z^2}\left(\frac{dz}{dZ}\right)^2$$

in ihrer Abhängigkeit von Z.

In ähnlicher Weise wird man zahlreiche Beispiele, die von Holzmüller und Anderen behandelt sind, verwerthen können.

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der Bayerischen Akademie der Wissenschaften München

Jahr/Year: 1895

Band/Volume: 1895

Autor(en)/Author(s): Lindemann Ferdinand

Artikel/Article: Die Abbildung der Halbebene auf ein Polygon, das von Bögen confocaler Kegelschnitte begrenzt wird 219-237