# Sitzungsberichte

der

## mathematisch-physikalischen Classe

der

## k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.

Band XXV. Jahrgang 1895.

**München.**
Verlag der K. Akademie.
1896.

In Commission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).

# Beiträge zur Potentialtheorie.

Von **Walther Dyck.**

(*Eingelaufen 6. Juli.*)

## I.

## Ueber die Darstellung der Kronecker'schen Charakteristik eines Functionensystems durch bestimmte Integrale.

Ein genaues Studium der Kronecker'schen Arbeiten über „Systeme von Functionen mehrer Variabeln" und die Beschäftigung mit den mannigfachen, schon von Kronecker hervorgehobenen Beziehungen derselben zu den hierhergehörigen fundamentalen Untersuchungen von Cauchy und Gauss, von Sturm und von Jacobi, sowie zu neueren Arbeiten zur Analysis situs und zur Gleichungstheorie hat mich zu einer näheren Auseinandersetzung jener gegenseitigen Beziehungen, zur Ausdehnung gewisser Formulirungen, sowie zur Verallgemeinerung einzelner Fragestellungen geführt, deren Resultate ich in einer Reihe kürzerer Berichte der hohen mathematisch-physikalischen Klasse der Akademie vorzulegen mir erlauben möchte.

In dem gegenwärtigen Aufsatze handelt es sich um die Darstellung der Kronecker'schen Charakteristik eines Systems von $n+1$ reellen Functionen von $n$ reellen Veränderlichen mit Hilfe von bestimmten Integralen; die von Kronecker gegebene Integralformel ist als specieller Fall, die beiden Kronecker'schen Summenformeln zur Bestimmung der Charakteristik sind als Grenzfälle in jener Darstellung enthalten.

## § 1.

## Darstellung der Charakteristik eines Functionen-Systems durch ein $n$-faches Integral.

Den Betrachtungen liegt zu Grunde das System von $(n+1)$ eindeutigen, reellen Functionen:

$$F_0, F_1, F_2, \dots F_n \tag{1}$$

der $n$ reellen unbeschränkt veränderlichen Grössen $z_1, z_2 \dots z_n$; dabei setzen wir voraus, dass diese Functionen eine $n$-fach unendliche Anzahl sowohl positiver als negativer Werthe annehmen, dass sie im Allgemeinen stetig und nach den einzelnen Variabeln differentiirbar sind, dass keine der $n+1$ aus je $n$ Functionen gebildeten Functionaldeterminanten zusammen mit den betreffenden Functionen für unendlich viele Werthsysteme der $z$ verschwindet.

Wir führen jetzt $n+1$ neue, reelle, unbeschränkt veränderliche Grössen $x_0, x_1, \dots x_n$, die wir, um uns zur Abkürzung geometrischer Sprechweise bedienen zu können, als „rechtwinklige Punkt-Coordinaten eines linearen $n+1$ dimensionalen Raumes $L_{n+1}$" bezeichnen und deuten wollen, und setzen:

$$\begin{aligned} x_0 &= F_0(z_1, z_2, \dots z_n), \\ x_1 &= F_1(z_1, z_2, \dots z_n), \\ &\dots\dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots\dots \\ x_n &= F_n(z_1, z_2, \dots z_n). \end{aligned} \tag{2}$$

Es definiren dann diese Gleichungen in unserem $L_{n+1}$ eine $n$-dimensionale, geschlossene Mannigfaltigkeit $M_n$, deren Punkte durch die Gesammtheit aller reellen Werthsysteme der Parameter $z_i$ ebenso, wie durch die zugehörigen Punktcoordinaten $x_k$ bezeichnet sind.

Unter Zugrundelegung dieser Mannigfaltigkeit $M_n$ im Raume der $x_k$ definire ich:

I. Die Charakteristik $K$ des Systems der Functionen $F_0, F_1, \ldots F_n$ ist diejenige Zahl, welche angibt, wie oft die Mannigfaltigkeit $M_n$ den Coordinatenanfangspunkt $x_0 = x_1 = \ldots = x_n = 0$ umgibt.

In § 2 wird bewiesen, dass die so definirte Zahl $K$ identisch ist mit der Kronecker'schen Charakteristik.

Aus der Definition folgt sofort eine Darstellung der Zahl $K$ mit Hülfe eines $n$-fachen Integrales, dessen Element eine directe Verallgemeinerung für das Element des „räumlichen Winkels" in der bekannten Gauss'schen Formel ist.[1])

Bildet man nämlich die $M_n$ durch Centralprojection vom Coordinatenanfangspunkt aus auf die „$n$-dimensionale Kugeloberfläche" vom Radius 1

$$3) \qquad x_0^2 + x_1^2 + \ldots + x_n^2 = 1$$

ab, so ist $K$ die Anzahl der so erhaltenen Kugelbedeckungen.

Die Rechnung gestaltet sich folgendermassen:

Wir legen ein „parallelepipedisches" Element $d\Omega_n$ der Mannigfaltigkeit $M_n$ durch einen Punkt

$$x_0, x_1, \ldots x_n$$

und $n$ Nachbarpunkte

$$x_0 + \overset{(i)}{d}x_0, \; x_1 + \overset{(i)}{d}x_1, \ldots x_n + \overset{(i)}{d}x_n$$

Nach den Formeln der $n$-dimensionalen Analytik hat man dann für den Inhalt dieses Elementes die Formel

[1]) Gauss, Werke Bd. V, „Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfernung wirkenden Kräfte" und „Allgemeine Theorie des Erdmagnetismus". Man vergl. auch die von Schering veranlasste Dissertation von O. Boeddicker, „Erweiterung der Gauss'schen Theorie der Verschlingungen", auf die noch später Bezug zu nehmen sein wird.

$$4)\qquad d\,\Omega_n = \sqrt{\begin{Vmatrix} \overset{(1)}{d x_0} & \overset{(1)}{d x_1} & \overset{(1)}{d x_2} \dots & \overset{(1)}{d x_n} \\ \overset{(2)}{d x_0} & \overset{(2)}{d x_1} & \overset{(2)}{d x_2} \dots & \overset{(2)}{d x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \overset{(n)}{d x_0} & \overset{(n)}{d x_1} & \overset{(n)}{d x_2} \dots & \overset{(n)}{d x_n} \end{Vmatrix}^2}$$

Hiebei ist in bekannter symbolischer Schreibweise unter dem Quadrate der Matrix die Summe der Quadrate ihrer Determinanten verstanden. Diese Determinanten selbst haben die Bedeutung des Inhaltes der Projectionen von $d\,\Omega_n$ auf die durch je $n$ der Coordinaten $x_i$ bezeichneten Coordinatenmannigfaltigkeiten. Das Verhältniss einer solchen Projection zum Elemente $d\,\Omega_n$ kann daher als Cosinus des Neigungswinkels der auf beiden errichteten Normalen bezeichnet werden. Es ergibt sich so z. B. für den Winkel der Normalen $N$ gegen die Axe $X_0$:

$$5)\qquad \cos(N X_0) = \frac{\begin{vmatrix} \overset{(1)}{d x_1} & \overset{(1)}{d x_2} \dots & \overset{(1)}{d x_n} \\ \overset{(2)}{d x_1} & \overset{(2)}{d x_2} \dots & \overset{(2)}{d x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \overset{(n)}{d x_1} & \overset{(n)}{d x_2} \dots & \overset{(n)}{d x_n} \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{Vmatrix} \overset{(1)}{d x_0} & \overset{(1)}{d x_1} & \overset{(1)}{d x_2} \dots & \overset{(1)}{d x_n} \\ \overset{(2)}{d x_0} & \overset{(2)}{d x_1} & \overset{(2)}{d x_2} \dots & \overset{(2)}{d x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \overset{(n)}{d x_0} & \overset{(n)}{d x_1} & \overset{(n)}{d x_2} \dots & \overset{(n)}{d x_n} \end{Vmatrix}^2}}$$

Man hat weiter für den Cosinus des Winkels des Radiusvector $R$ gegen die Axe $X_0$:

$$6)\qquad \cos(R X_0) = \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + x_1^2 + \dots x_n^2}} = \frac{x_0}{r}$$

und bildet hieraus sofort für $\cos(RN)$ die Formel

$$7)\qquad \cos(RN) = \sum_{i=0}^{i=n} \cos(RX_i)\cdot\cos(NX_i)$$

Bezeichnet jetzt $d\omega_n$ die Centralprojection von $d\Omega_n$ auf die Einheitskugel, so ist

$$8)\qquad d\omega_n = d\Omega_n\cdot\cos(RN)\cdot\frac{1}{r^n},$$

wo der letzte Factor die Reduction des Elementes auf die Einheitskugel bewirkt.

Man erhält sonach unter Benützung der vorigen Beziehungen für $d\omega_n$ die Formel:

$$9)\qquad d\omega_n = \frac{\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \overset{(1)}{dx_0} & \overset{(1)}{dx_1} & \overset{(1)}{dx_2} & \dots & \overset{(1)}{dx_n} \\ \overset{(2)}{dx_0} & \overset{(2)}{dx_1} & \overset{(2)}{dx_2} & \dots & \overset{(2)}{dx_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \overset{(n)}{dx_0} & \overset{(n)}{dx_1} & \overset{(n)}{dx_2} & \dots & \overset{(n)}{dx_n} \end{vmatrix}}{\sqrt{x_0^2+x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2}^{\,n+1}}$$

Zur Umsetzung dieser Formel in die Parameter $z$ wähle man die $n$ Nachbarpunkte $x_\sigma + \overset{(i)}{dx_\sigma}$ so, dass

$$10)\qquad \overset{(i)}{dx_\sigma} = F_{\sigma i}\, dz_i,$$

(wobei durch den zweiten Index bei $F_\sigma$ die partielle Ableitung nach dem Parameter $z_i$ bezeichnet ist), man schreite also auf den „Parameterlinien" der Mannigfaltigkeit $M_n$ vorwärts.

Es ergibt sich dann für das auf $M_n$ definirte Element $d\Omega_n$ die Formel:

$$11)\qquad d\Omega_n = \sqrt{\begin{vmatrix} F_{01} & F_{11} & F_{21} & \dots & F_{n1} \\ F_{02} & F_{12} & F_{22} & \dots & F_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ F_{0n} & F_{1n} & F_{2n} & \dots & F_{nn} \end{vmatrix}^2}\, dz_1\, dz_2 \dots dz_n$$

und ebenso lassen sich sofort die Formeln für $\cos(RN)$ und $r$ in den $z_i$ schreiben.

Bezeichnet man noch durch $\tilde{\omega}_n$ die Oberfläche der Kugel vom Radius 1

$$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1$$

so ergibt sich:

II. Die Charakteristik $K$ des Systems der Functionen $F_0, F_1, \dots F_n$, dargestellt als Windungszahl der Mannigfaltigkeit $M_n$ um den Nullpunkt, ist gegeben durch das $n$-fache Integral

$$12)\qquad K = \frac{1}{\tilde{\omega}_n} \cdot \int d\omega_n =$$

$$= \frac{1}{\tilde{\omega}_n} \cdot \int \frac{\begin{vmatrix} F_0 & F_{01} & F_{02} & \dots & F_{0n} \\ F_1 & F_{11} & F_{12} & \dots & F_{1n} \\ F_2 & F_{21} & F_{22} & \dots & F_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ F_n & F_{n1} & F_{n2} & \dots & F_{nn} \end{vmatrix}}{\sqrt{F_0^2 + F_1^2 + F_2^2 + \dots + F_n^2}^{\,n+1}}\, dz_1\, dz_2 \dots dz_n.$$

Das Integral ist dabei erstreckt über das gesammte Werthesystem der reellen Veränderlichen $z_1, z_2, \dots z_n$, denn dieses Werthesystem ist im Allgemeinen den Punkten $x_0, x_1, \dots x_n$ unserer Mannigfaltigkeit $M_n$ umkehrbar eindeutig zugeordnet.

Die Formel macht unmittelbar die Gleichberechtigung der Functionen $F_0, F_1, \dots F_n$ ersichtlich.

Das Vorzeichen der Charakteristik $K$ ist an eine bestimmte Reihenfolge der Functionen geknüpft und wechselt bei Vertauschung von je zweien derselben.

## § 2.

## Die Kronecker'sche Summenformel.

Man entnimmt der vorstehenden Formel (12) sofort:

Die Elemente des Integrals werden nach dem Vorzeichen der Zählerdeterminante summirt. Dieses Vorzeichen aber unterscheidet die beiden Seiten der Mannigfaltigkeit $M_n$ gesehen vom Coordinatenanfangspunkte aus, insoferne die gleich Null gesetzte Determinante die Bedingung für den „berührenden Kegel" vom Coordinatenanfangspunkt nach der $M_n$ darstellt.[1])

Ein beliebiger, vom Coordinatenanfangspunkt auslaufender Strahl durchsetzt die Mannigfaltigkeit $M_n$ in einer Anzahl von Punkten, die wir nach dem Vorzeichen der Determinante unterscheiden.

Zählt man nun diese Schnittpunkte dem Vorzeichen entsprechend je mit $+1$ bez. $-1$ gerechnet ab, so erhält man eine Zahl, die unabhängig ist von der speciellen Richtung des gewählten Strahles und also giltig für die Gesammtheit aller Strahlen, welche die Elemente der $M_n$ auf die Einheitskugel projiciren.

Die Zahl gibt somit eben die Anzahl der Bedeckungen der Einheitskugel an und ist demnach identisch mit der in I. definirten Charakteristik $K$.

Bildet man aber andererseits speciell für einen der Axenstrahlen, z. B. für die positive Axe $X_n$

$$x_0 = 0,\ x_1 = 0, \ldots\ x_{n-1} = 0,\ x_n > 0$$

[1]) Das im Allgemeinen stets vorhandene Auftreten von Selbstdurchsetzungen unserer $M_n$ (längs Mannigfaltigkeiten von $n-1$ Dimensionen) hindert die Bestimmung der „Flächenseite" durch jenes Vorzeichen nicht.

die algebraische Summe über die Schnittpunkte mit $M_n$, so folgt:

$$13)\qquad K = \sum \text{sign.} \begin{vmatrix} 0 & F_{01} & F_{02} & \dots & F_{0n} \\ 0 & F_{11} & F_{12} & \dots & F_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & F_{n-1\,1} & F_{n-1\,2} & \dots & F_{n-1\,n} \\ F_n & F_{n1} & F_{n2} & \dots & F_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^n \sum \text{sign.} (\varDelta_n)$$

wo $\varDelta_n$ die Functionaldeterminante der $F_0, F_1, \dots F_{n-1}$ bezeichnet und die Summe sich erstreckt über die Punkte

$$F_0 = 0,\ F_1 = 0, \dots F_{n-1} = 0,\ F_n > 0.$$

Die so gewonnene Formel ist abgesehen vom Vorzeichen identisch mit der von Kronecker für die Charakteristik des Functionensystems gegebenen.

Addirt man die beiden für die positive und für die negative Halbaxe $X_n$ aufgestellten Summenformeln, so folgt

$$14)\qquad 2K = (-1)^n \sum \text{sign.} (F_n \cdot \varDelta_n)$$

die Summe erstreckt über alle Punkte

$$F_0 = 0,\ F_1 = 0, \dots F_{n-1} = 0,$$

die zweite Kronecker'sche Summenformel.

## § 3.

### Weitere Darstellungen der Charakteristik durch vielfache Integrale.

Neben den ersten Integralausdruck für die Charakteristik unseres Functionensystems stellen sich eine Reihe weiterer mit Hilfe des aus den Entwicklungen des vorigen Paragraphen direct folgenden Satzes:

III. Jeder „lineare Schnitt"

$$x_0 = 0,\ x_1 = 0, \ldots\ x_k = 0$$

der Mannigfaltigkeit $M_n$, der also eine Mannigfaltigkeit $M_{n-k-1}$ von $n-k-1$ Dimensionen im linearen Raume $L_{n-k}$ der $x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots x_n$ definirt, ist ebenso oft wie $M_n$ selbst um den Nullpunkt gewunden.

Es ergibt sich aus diesem Satze die Darstellung von $K$ durch ein $(n-1)$-faches, $(n-2)$-faches, ... $(n-k-1)$-faches, ... 2-faches, 1-faches Integral und schliesslich fliesst aus ihr als Grenzfall die Darstellung mit Hilfe einer Summenformel. Die letztere ist die von Kronecker für die Charakteristik aufgestellte Summenformel, und ebenso ist das $(n-1)$-fache Integral eben das von Kronecker hergeleitete.[1])

Für die Herstellung des durch den Satz III bezeichneten Integralausdruckes für die Charakteristik sind wesentlich dieselben Ueberlegungen massgebend wie bei den in § 1 gegebenen Formulirungen. In der durch

---

[1]) Kronecker benützt zur Ableitung dieses $(n-1)$-fachen Integrales unter Auszeichnung der Function $F_0$ die Abbildung des „Raumes der $z_1, z_2, \ldots z_n$" auf den Raum der $x_1, x_2, \ldots x_n$ durch

$$x_1 = F_1,\ x_2 = F_2, \ldots x_n = F_n\,;$$

die reellen Punkte $z_i$ des Raumes der $z$ sind dabei eindeutig auf reelle Punkte $x_i$ abgebildet, aber umgekehrt entsprechen den Punkten $x_i$ im Allgemeinen verschiedene Punkte $z_i$. Die Function $F_0(z_1, z_2, \ldots z_n)$ geht bei der Abbildung über in $\Phi_0(x_1, x_2, \ldots x_n)$, und dabei ist die Mannigfaltigkeit $F_0 = 0$ ihrerseits umkehrbar eindeutig auf $\Phi_0 = 0$ bezogen. Die Anzahl der Windungen von $\Phi_0 = 0$ (also in der obigen Bezeichnung des Schnittes der $M_n$ mit $x_0 = 0$) um den Nullpunkt ist dann die gesuchte Charakteristik.

Dadurch, dass in der oben gewählten Form der Definition und Herleitung der Charakteristik jede Auszeichnung einer der Functionen des Systems vermieden ist, werden die Formulirungen allgemeiner und übersichtlicher. Der Satz von der Unveränderlichkeit der Charakteristik bei Vertauschung der Functionen des Systems ist direct gegeben.

$$
15)\quad \begin{aligned}
x_0 &= F_0(z_1, z_2, \ldots z_n) = 0, \\
x_1 &= F_1(z_1, z_2, \ldots z_n) = 0, \\
&\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
&\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
x_k &= F_k(z_1, z_2, \ldots z_n) = 0; \\
x_{k+1} &= F_{k+1}(z_1, z_2 \ldots z_n), \\
&\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
&\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
x_n &= F_n(z_1, z_2, \ldots z_n)
\end{aligned}
$$

gegebenen $M_{n-k-1}$ bestimmen wir ein $(n-k-1)$-dimensionales Element $d\,\Omega_{n-k-1}$ durch einen Punkt $x_{k+1} \ldots x_n$ und $n-k-1$ Nachbarpunkte

$$
x_{k+1} + \overset{(i)}{d}x_{k+1},\quad x_{k+2} + \overset{(i)}{d}x_{k+2}, \ldots\; x_n + \overset{(i)}{d}x_n
$$

Der Inhalt des Elementes $d\,\Omega_{n-k-1}$ ist somit analog wie oben gegeben durch:

$$
16)\quad d\,\Omega_{n-k-1} = \sqrt{\begin{Vmatrix}
\overset{(1)}{d}x_{k+1} & \overset{(1)}{d}x_{k+2} & \ldots & \overset{(1)}{d}x_n \\
\overset{(2)}{d}x_{k+1} & \overset{(2)}{d}x_{k+2} & \ldots & \overset{(2)}{d}x_n \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\overset{(n-k-1)}{d}x_{k+1} & \overset{(n-k-2)}{d}x_{k+2} & \ldots & \overset{(n-k-1)}{d}x_n
\end{Vmatrix}^2}
$$

und für die Centralprojection dieses Elementes auf die Einheitskugel

$$
x_{k+1}^2 + x_{k+2}^2 + \ldots + x_n^2 = 1
$$

ergibt sich

$$
17)\quad d\,\omega_{n-k-1} = \frac{\begin{vmatrix}
x_{k+1} & x_{k+2} & \ldots & x_n \\
\overset{(1)}{d}x_{k+1} & \overset{(1)}{d}x_{k+2} & \ldots & \overset{(1)}{d}x_n \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\overset{(n-k-1)}{d}x_{k+1} & \overset{(n-k-1)}{d}x_{k+2} & \ldots & \overset{(n-k-1)}{d}x_n
\end{vmatrix}}{\sqrt{x_{k+1}^2 + x_{k+2}^2 + \ldots x_n^2}^{\,n-k}}
$$

Führen wir jetzt in der Mannigfaltigkeit $M_{n-k-1}$ die Parameter $z_1, z_2, \ldots z_{n-k-1}$ als unabhängige, die übrigen als durch die Gleichungen $F_0 = 0$, $F_1 = 0, \ldots F_k = 0$ von ihnen abhängige Parameter ein, so kann man setzen:

$$0 = \left[F_{\sigma i} + \sum_{\mu = n-k}^{\mu = n} F_{\sigma\mu} \frac{\partial z_\mu}{\partial z_i}\right] dz_i \tag{18}$$

$$\sigma = 0, 1, \ldots k; \quad i = 1, 2, \ldots n-k-1$$

$$\overset{(i)}{dx_\sigma} = \left[F_{\sigma i} + \sum_{\mu = n-k}^{\mu = n} F_{\sigma\mu} \frac{\partial z_\mu}{\partial z_i}\right] dz_i \tag{19}$$

$$\sigma = k+1, \ldots n; \quad i = 1, 2, \ldots n-k-1$$

Aus den Gleichungen (16) folgt

$$\frac{\partial z_\mu}{\partial z_i} = \frac{\overset{(i)}{D}_\mu}{D}, \tag{20}$$

wo $D$ die aus den letzten $k+1$ Verticalreihen der Matrix

$$M = \begin{Vmatrix} F_{01} & F_{02} & \ldots & F_{0\,n-k-1} & F_{0\,n-k} & \ldots & F_{0n} \\ F_{11} & F_{12} & \ldots & F_{1\,n-k-1} & F_{1\,n-k} & \ldots & F_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ F_{k1} & F_{k2} & \ldots & F_{k\,n-k-1} & F_{k\,n-k} & \ldots & F_{kn} \end{Vmatrix} \tag{21}$$

gebildete Determinante ist, und $\overset{(i)}{D}_\mu$ diejenige, welche aus $D$ durch Ersetzen der Verticalreihe mit dem Index $\mu$ $(\mu = n-k, \ldots n)$ durch die Verticalreihe mit dem Index $i$ $(i = 1, 2, \ldots n-k-1)$ entsteht.

Es kann nunmehr jede Determinante der Matrix der $dx$ (Formel 16) dargestellt werden als symbolisches Product zweier Matrices.

So ist:

$$22)\qquad (D)^{n-k-1}\cdot\begin{vmatrix} \overset{(1)}{d}x_{k+2} & \overset{(1)}{d}x_{k+3} & \dots & \overset{(1)}{d}x_n \\ \overset{(2)}{d}x_{k+2} & \overset{(2)}{d}x_{k+3} & \dots & \overset{(2)}{d}x_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \overset{(n-k-1)}{d}x_{k+2} & \overset{(n-k-1)}{d}x_{k+3} & \dots & \overset{(n-k-1)}{d}x_n \end{vmatrix} =$$

$$= \left\Vert \begin{matrix} F_{k+21} & F_{k+22} & \dots & F_{k+2n} \\ F_{k+31} & F_{k+32} & \dots & F_{k+3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ F_{n1} & F_{n2} & \dots & F_{nn} \end{matrix} \right\Vert \cdot \left\Vert \begin{matrix} D & 0 & \dots & 0 & \overset{(1)}{D}_{n-k} & \overset{(1)}{D}_{n-k+1} & \dots & \overset{(1)}{D}_n \\ 0 & D & \dots & 0 & \overset{(2)}{D}_{n-k} & \overset{(2)}{D}_{n-k+1} & \dots & \overset{(2)}{D}_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & D & \overset{(n-k-1)}{D}_{n-k} & \overset{(n-k-1)}{D}_{n-k+1} & \dots & \overset{(n-k-1)}{D}_n \end{matrix} \right\Vert \cdot dz_1\, dz_2 \dots dz_{n-k-1}.$$

Die zweite dieser Matrices ist correspondirende Matrix zu der in Formel (21) gegebenen. Der Factor, um welchen sich je die entsprechenden Determinanten unterscheiden ist, $D^{n-k-2}$. Das Matrixproduct kann demnach in der Form geschrieben werden:

$$
23) \qquad D^{n-k-2} \cdot \begin{vmatrix} F_{01} & F_{02} & \dots & F_{0n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ F_{k1} & F_{k2} & \dots & F_{kn} \\ F_{k+2\,1} & F_{k+2\,2} & \dots & F_{k+2\,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ F_{n1} & F_{n2} & \dots & F_{nn} \end{vmatrix}
$$

Für das Oberflächenelement 17) auf der Einheitskugel ergibt sich hieraus durch eine einfache Zusammenziehung die Formel

$$
24) \qquad d\omega_{n-k-1} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & F_{01} & F_{02} & \dots & F_{0n} \\ 0 & F_{11} & F_{12} & \dots & F_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & F_{k1} & F_{k2} & \dots & F_{kn} \\ F_{k+1} & F_{k+1\,1} & F_{k+1\,2} & \dots & F_{k+1\,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ F_n & F_{n1} & F_{n2} & \dots & F_{nn} \end{vmatrix}}{D \cdot \sqrt{F_{k+1}^2 + \dots F_n^2}^{\,n-k}} \cdot dz_1\, dz_2 \dots dz_{n-k-1}
$$

Führt man nun an Stelle von $z_1, z_2, \dots z_{n-k-1}$ andere Parameter $z$, also $z_{i_1}, z_{i_2}, \dots z_{i_{n-k-1}}$ ein, so erhält man für $d\omega_{n-k-1}$ eine analoge in den Differentialen

$$
dz_{i_1}\, dz_{i_2} \dots dz_{i_{n-k-1}}
$$

geschriebene Formel, in welcher die obige Determinante $D$ der Matrix (21) ersetzt ist durch die Determinante $D_i$, welche durch Streichen der Verticalreihen mit den Indices $i_1, i_2, \dots i_{n-k-1}$ entsteht.

Jetzt fasse man die Ausdrücke

$$25)\qquad d\,o_{n-k-1} = \frac{\sqrt{\begin{Vmatrix} F_{01} & F_{02} & \dots & F_{0n} \\ F_{11} & F_{12} & \dots & F_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ F_{k1} & F_{k2} & \dots & F_{kn} \end{Vmatrix}^2}}{D_i}\, dz_{i_1}\, dz_{i_2} \dots dz_{i_{n-k-1}}$$

als Elemente für die Integration in den $z$ auf,[1]) so kann man den Integralausdruck für die Charakteristik in folgender allgemeiner Formel zusammenziehen:

$$26)\qquad K = \frac{1}{\tilde{\omega}_{n-k-1}} \int \frac{\begin{vmatrix} 0 & F_{01} & F_{02} & \dots & F_{0n} \\ 0 & F_{11} & F_{12} & \dots & F_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & F_{k1} & F_{k2} & \dots & F_{kn} \\ F_{k+1} & F_{k+1\,1} & F_{k+1\,2} & \dots & F_{k+1\,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ F_n & F_{n1} & F_{n2} & \dots & F_{nn} \end{vmatrix}}{\sqrt{F_{k+1}^2 + F_{k+2}^2 + \dots + F_n^2}^{\,n-k} \sqrt{\begin{Vmatrix} F_{01} & F_{02} & \dots & F_{0n} \\ F_{11} & F_{12} & \dots & F_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ F_{k1} & F_{k2} & \dots & F_{kn} \end{Vmatrix}^2}}\, d\,o_{n-k-1}$$

---

[1]) Deuten wir diese Formel, wovon später noch zu handeln sein wird, im linearen Raume rechtwinkliger Coordinaten $z_1, z_2, \dots z_n$, so stellt $d\,o_{n-k-1}$ ein „Oberflächenelement" der Mannigfaltigkeit $F_0 = 0,\ F_1 = 0, \dots F_k = 0$ dieses Raumes dar, dessen Projection auf die Coordinatenmannigfaltigkeit der $z_{i_1}, z_{i_2}, \dots z_{i_{n-k-1}}$ durch $dz_{i_1}, dz_{i_2}, \dots dz_{i_{n-k-1}}$ gegeben ist, während $\frac{D_i}{\sqrt{M^2}}$ als „Cosinus des Neigungswinkels jener Elemente gegen einander" zu bezeichnen ist.

Hiebei bezeichnet $\tilde{\omega}_{n-k-1}$ die Oberfläche der Kugel

$$x_{k+1}^2 + x_{k+2}^2 + \ldots + x_n^2 = 1.$$

Die Integration ist zu erstrecken über die Gesammtheit aller reellen Werthesysteme der $z$, für welche

$$F_0 = 0, \; F_1 = 0, \ldots F_k = 0$$

ist. Löst man die Zählerdeterminante dieses Ausdruckes nach den Determinanten $D_i$ der Matrix $M$ (Gl. 19) auf und führt für jedes einzelne der so entstehenden Theilintegrale die nach Formel (23) entsprechenden $dz_{i_1} \ldots dz_{i_{n-k-1}}$ als unabhängige Differentiale ein, so erkennt man:

IV. Die Charakteristik $K$ lässt sich darstellen durch eine Summe von $\binom{n}{n-k-1}$ $(n-k-1)$-fachen Integralen, deren **Grenzen** ausschliesslich von einem ersten Theil unserer Functionen, den gleich Null gesetzten Functionen:

$$F_0, \; F_1, \ldots F_k$$

abhängen, während die **unter dem Integralzeichen** stehenden Differentiale nur von den übrigen Functionen

$$F_{k+1}, \; F_{k+2}, \ldots F_n$$

abhängen. Die Abnahme der Ordnung der einzelnen Integrale vom $n$-fachen bis zum 0-fachen findet dabei in der Zunahme der Anzahl der Bedingungsgleichungen für die Grenzen von 0 bis $n$ gewissermassen ihren Ausgleich.

Für $k = 0$ ergibt sich das von Kronecker gegebene $(n-1)$-fache Integral. Für $k = n-1$ folgt die in § 2 (Gl. 19) abgeleitete Summenformel.

Zunächst folgt nämlich:

$$K = (-1)^n \cdot \frac{1}{\tilde{\omega}_0} \sum \frac{F_n \cdot \Delta_n}{\text{abs}(F_n) \cdot \text{abs}(\Delta_n)} \cdot \varepsilon,$$

wenn wir mit $\varepsilon$ den Grenzwerth für die Grösse der diskreten Punkte, über welche die Summation erfolgt, bezeichnen. Als Inhalt der aus zwei Punkten bestehenden quadratischen Mannigfaltigkeit

$$x_n^2 = 1$$

folgt dann

$$\bar{\omega}_0 = 2\varepsilon$$

und damit ergibt sich direct die Kronecker'sche Formel

$$K = (-1)^n \frac{1}{2} \sum \operatorname{sign}(F_n \Delta_n).$$

## § 4.

### Verallgemeinerungen.

Die Darlegungen des § 2, welchen zufolge die Zahl $K$ sich durch die dem Vorzeichen der Determinante

$$\begin{vmatrix} F_0 & F_{01} & F_{02} & \dots & F_{0n} \\ F_1 & F_{11} & F_{12} & \dots & F_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ F_n & F_{n1} & F_{n2} & \dots & F_{nn} \end{vmatrix}$$

entsprechend erfolgende Summation der Schnittpunkte der $M_n$ mit einem beliebigen Axenstrahl bestimmt, gestatten die folgende für manche Fragen nicht unwesentliche Verallgemeinerung unserer Integraldarstellungen.

V. Es ist keineswegs nothwendig, die in den vorstehenden Formeln gegebenen Integrale über das ganze Gebiet einer Mannigfaltigkeit $M_{n-k-1}$ zu erstrecken, man kann sich vielmehr auch beschränken auf diejenigen Theile derselben, welche durch einen vom Coordinatenanfangspunkt auslaufenden, sonst ganz beliebigen Kegel begrenzt sind, wenn man nur den Divisor $\bar{\omega}_{n-k-1}$ ersetzt durch den Inhalt des von diesem Kegel auf der Einheitskugel ausgeschnittenen Gebietes.

So kann man z. B. das durch

$$x_0 = F_0 = 0, \quad x_1 = F_1 = 0, \; \ldots \; x_k = F_k = 0$$

bezeichnete Integrationsgebiet einschränken durch eine beliebige Anzahl weiter zutretender Ungleichungen

$$x_{k+1} = F_{k+1} > 0, \quad x_{k+2} = F_{k+2} > 0, \; \ldots \quad x_l = F_l > 0;$$

$\tilde{\omega}_{n-k-1}$ ist dabei zu ersetzen durch $\frac{\tilde{\omega}_{n-k-1}}{2^m}$, wenn $m$ die Anzahl der Ungleichungen ist.

Auf anderweite mögliche Verallgemeinerungen unserer Formeln, wie sie etwa durch Deformationen der Mannigfaltigkeit $M_n$ herbeigeführt werden können und wie sie bei allen derartigen Betrachtungen der Analysis situs Platz greifen, gehe ich hier nicht ein.

## Berichtigungen

zum I. Theile der Beiträge zur Potentialtheorie.

Auf Seite 264 Formel (5) sind im Nenner die Matrixstriche zu ergänzen.

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| „ | „ | 271 | Zeile 9 | von oben | ist | zu | lesen | Gleichung | (18) | statt | (16). |
| „ | „ | 275 | „ 7 | „ | „ | „ | „ | „ | (21) | „ | (19). |
| „ | „ | 275 | „ 9 | „ | „ | „ | „ | „ | (25) | „ | (23). |
| „ | „ | 275 | „ 3 | „ unten | „ | „ | „ | „ | (14) | „ | (19). |