# Sitzungsberichte

der

## mathematisch-physikalischen Classe

der

## k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.

Band XXV. Jahrgang 1895.

**München.**
Verlag der K. Akademie.
1896.

In Commission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).

# Beiträge zur Potentialtheorie.[1])

Von **Walther Dyck.**

(*Eingelaufen 31. Dezember 1895.*)

## II.

## Die Gauss'sche Formel für die gegenseitige Umwindung zweier Raumcurven und ihre Ausdehnung auf höhere Mannigfaltigkeiten. Darstellung der Windungszahl zweier Mannigfaltigkeiten durch Kronecker'sche Charakteristiken gewisser Functionensysteme.

Der vorliegende zweite Theil der „Beiträge zur Potentialtheorie" behandelt zunächst ausführlich die Theorie der Umschlingung zweier geschlossener, sich nicht schneidender Linien im Raume, giebt sodann die Definition der Umschlingung für Mannigfaltigkeiten höherer Dimensionen in einem $n$-dimensionalen Gebiete und entwickelt die zugehörigen analytischen Formulirungen in Erweiterung der für zwei Curven im Raume gewonnenen Darstellungen.

Im ersten Abschnitte handelt es sich um die genaue Darlegung der Beziehungen des Gauss'schen Integrals für die Anzahl der Umschlingungen zweier Raumcurven zu den im ersten Theile dieser Beiträge (diese

---

1) Vorgetragen in der Sitzung vom 6. Juli 1895.

Sitzungsberichte 1895, pag. 261 ff.[1]) entwickelten Formeln für die Kronecker'sche Charakteristik gewisser Functionensysteme.

Indem wir die Raumcurven auf zwei verschiedene Arten, in Parameterform (§ 2) und als Schnitte je zweier Flächen (§ 3), analytisch festlegen, ergeben sich zwei wesentlich verschiedene Functionensysteme mit zwei, beziehungsweise mit drei Variabeln, deren Kronecker'sche Charakteristik mit der Gauss'schen Windungszahl übereinstimmt. Die verschiedenen Integral- und Summenformeln für die Charakteristik, die wir in den „Beiträgen I" aufgestellt haben, führen zu einer Reihe, zum Theil neuer Methoden für die Herleitung der Windungszahl. Dabei sind die für die Parameterdarstellung gewonnenen Formeln, die sich unmittelbar an die Gauss'sche Darstellung anknüpfen lassen, nicht überführbar in die Formeln, welche unter Zugrundelegung der Raumcurven als Schnitt je zweier Flächen aufzustellen sind. Die §§ 4 und 5 sind deshalb dem Beweise der Uebereinstimmung der auf die eine und andere Weise gewonnenen Zahlen gewidmet.

Im zweiten Abschnitte wird zuvörderst (in § 6) die Definition der Anzahl der Windungen einer $k$-fachen Mannigfaltigkeit um eine $n-k-1$-fache innerhalb eines Gebietes von $n$ unabhängigen Variabeln („im linearen Raume von $n$ Dimensionen" nach der aus der Geometrie übertragenen Redeweise) in directer Analogie mit den durch die analytischen Formulirungen des ersten Abschnittes gewonnenen Formeln aufgestellt.[2])

1) Der I. Theil der vorliegenden „Beiträge zur Potentialtheorie" ist im Folgenden kurz durch „Beiträge I" bezeichnet.

2) Es ist mir nicht bekannt, dass die Frage nach der Umschlingung von höheren Mannigfaltigkeiten schon behandelt worden ist. Herr H. Brunn hat (1887) in einer anlässlich seiner Promotion aufgestellten Thesis auf die Möglichkeit, zwei zweidimensionale Gebilde (speciell „Kugelflächen") im Raume von fünf Dimensionen in einander zu schlingen hingewiesen.

Indem wir auch hier für unsere Mannigfaltigkeiten von zwei, den obigen analogen, Darstellungen (in Parameterform (§ 7) und direct durch Gleichungssysteme zwischen den Coordinaten (§ 8)) ausgehen, erscheint die Windungszahl als Kronecker'sche Charakteristik für zwei wesentlich verschiedene Systeme von Functionen von $n-1$, beziehungsweise von $n$ Variabeln. Die Uebereinstimmung der auf den beiden Wegen gewonnenen Zahlen wird (in § 8) in analoger Weise wie im ersten Abschnitte bewiesen. Ohne auf die verschiedenen Formeln für die Darstellung der Windungszahl, wie sie nunmehr aus den Entwicklungen des ersten Theiles dieser Beiträge sich ergeben, näher einzugehen, bezeichnen wir zum Schlusse (in § 9) noch eine merkwürdige gegenseitige Lagenbeziehung ganzer Classen von Mannigfaltigkeiten. Mit der Darstellung der $k$-dimensionalen und der $n-k-1$-dimensionalen Mannigfaltigkeit durch Gleichungssysteme zwischen den Coordinaten des $n$-dimensionalen Raumes ist nämlich gleichzeitig je ein ganzes System von Mannigfaltigkeiten $0^{\text{ter}}$ und $n-1^{\text{ter}}$, $1^{\text{ter}}$ und $n-2^{\text{ter}}$, $2^{\text{ter}}$ und $n-3^{\text{ter}}$ u. s. w. Ordnung gegeben, denen sämmtlich ein und dieselbe Windungszahl zugehört. Diese Beziehung scheint mir besonders geeignet, die Bedeutung der Kronecker'schen Charakteristik für die Lagenverhältnisse der verschiedenen durch ein solches Functionensystem zu definirenden Gebilde hervortreten zu lassen.

## Erster Abschnitt.

## Theorie der gegenseitigen Umwindung zweier Raumcurven.

### § 1.

### Das Gauss'sche Integral.

Gauss hat in einer bekannten Notiz vom Jahre 1833 (Werke, Band V, Nachlass, Zur Elektrodynamik, pag. 605), die Anzahl der Umschlingungen zweier geschlossener, sich nicht schneidender Linien $M_1'$ und $M_1''$ durch das folgende Doppelintegral dargestellt:

1)
$$V = \frac{1}{4\pi} \cdot \iint \frac{\begin{vmatrix} z_1'' - z_1' & -dz_1' & dz_1'' \\ z_2'' - z_2' & -dz_2' & dz_2'' \\ z_3'' - z_3' & -dz_3' & dz_3'' \end{vmatrix}}{\sqrt{(z_1''-z_1')^2 + (z_2''-z_2')^2 + (z_3''-z_3')^2}^{\,3}}$$ [1]):

hierbei bezeichnen $z_1'$, $z_2'$, $z_3'$, beziehungsweise $z_1''$, $z_2''$, $z_3''$, die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes der ersten, beziehungsweise der zweiten, Linie und ist die Integration über beide Linien ausgedehnt.

Der Ausdruck unter dem Integralzeichen besitzt eine sehr einfache geometrische Bedeutung, auf welche Schering, von welchem auch die erste Ableitung der Gauss'schen Formel herrührt[2]), aufmerksam gemacht hat. Es stellt

---

[1]) Man vergleiche bezüglich des hier gewählten Vorzeichens der Determinante die am Schlusse dieses Paragraphen folgende Bemerkung.

[2]) Man vergleiche: O. Böddicker, „Erweiterung der Gauss'schen Theorie der Verschlingungen mit Anwendungen in der Elektrodynamik". Ausführung der Göttinger Inauguraldissertation Böddickers, erschienen 1876 bei Spemann in Stuttgart.

nämlich der Zähler den sechsfachen Inhalt dar des von zwei Linienelementen $do_1'$ beziehungsweise $do_1''$ der beiden Curven bestimmten Tetraeders, oder den Inhalt eines Parallelepipeds, von welchem drei Seiten durch $do_1'$, $do_1''$ und durch die Verbindungslinie der Anfangspunkte beider Linienelemente gebildet sind; der Nenner ist gleich der dritten Potenz der Entfernung der beiden Linienelemente von einander.

Für die Ausführung der Integration ist zu beachten, dass hiebei jede der Curven in bestimmter Richtung zu durchlaufen ist. Wir setzen diese dadurch fest, dass wir in beiden Curven je einen (übrigens willkürlichen) Punkt herausgreifen, in diesem die eine der beiden entgegengesetzten Richtungen der Tangente als positive Fortschreitungsrichtung auszeichnen (was durch die Wahl des Vorzeichens der Richtungscosinus an dieser Stelle geschieht) und nun in dieser Richtung die Bogenlängen zählen. Wir haben dann um die Richtung beizubehalten stets im Sinne der wachsenden Bögen fortzuschreiten, d. h. die Bogenelemente:

2′) $$do_1' = \sqrt{dz_1'^2 + dz_2'^2 + dz_3'^2}$$

und

2″) $$do_1'' = \sqrt{dz_1''^2 + dz_2''^2 + dz_3''^2}$$

sind für die ganze Integration positiv zu nehmen.

Bestehen die Curven aus mehreren getrennten, in sich geschlossenen Theilen, so führt unter Voraussetzung einer gemeinsamen analytischen Definition für die einzelnen Zweige, die Bestimmung der Fortschreitungsrichtung auf e i n e m dieser Züge deren Fixirung auch auf den übrigen Zügen mit sich.

Der Nenner des Ausdruckes unter dem Integralzeichen

$$r^{\frac{3}{2}} = \sqrt{(z_1'' - z_1')^2 + (z_2'' - z_2')^2 + (z_3'' - z_3')^2}^{\,3}$$

ist positiv zu nehmen.

Es sei hier erwähnt, dass wir alle in der Folge auftretenden Quadratwurzelausdrücke positiv annehmen; es ist dies gestattet, weil dieselben unter dem Wurzelzeichen stets eine Summe von Quadraten enthalten, welche im Allgemeinen nicht sämmtlich gleichzeitig in den betrachteten Gebieten verschwinden, so dass also die Wurzel innerhalb des Gebietes ihr Vorzeichen nicht wechselt.

Rechnen wir nun in unserem Coordinatensystem die Richtung der Axe $z_1$ nach Osten, die von $z_2$ nach Norden, die von $z_3$ nach dem Zenith, so gibt das Vorzeichen der Inhaltsdeterminante die folgende Unterscheidung für die gegenseitige Richtung der Elemente $do_1'$ und $do_1''$:

Stellt man sich in die positive Richtung des Elements $do_1'$ der ersten Curve und blickt auf das Element $do_1''$ der zweiten Curve, so dreht dieses im entgegengesetzten Sinne des Uhrzeigers um $do_1'$, wenn die Determinante

$$3) \qquad \begin{vmatrix} z_1''-z_1' & -dz_1' & dz_1'' \\ z_2''-z_2' & -dz_2' & dz_2'' \\ z_3''-z_3' & -dz_3' & dz_3'' \end{vmatrix}$$

positiv ist (vergl. Fig. 1), im Sinne des Uhrzeigers, wenn diese Determinante negativ ist (Fig. 2). Dieselben Be-

Fig. 1.

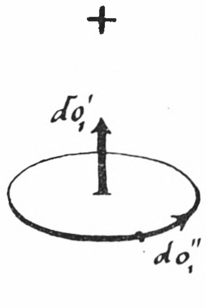
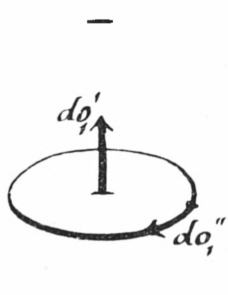



Fig. 2.



ziehungen ergeben sich dabei, wenn wir von $do_1''$ nach $do_1'$ blicken [1]).

## § 2.

## Formeln für die Windungszahl unter der Voraussetzung, dass die beiden Raumcurven in Parameterdarstellung gegeben sind.

### a) Das Gauss'sche Doppelintegral.

Der Gauss'sche Ausdruck für die Windungszahl $V$ lässt sich direct ausführen, wenn man die beiden Linien in Parameterdarstellung gegeben annimmt. Es seien durch

$$4'')\quad \begin{aligned} z_1' &= \varphi_1(\lambda_1) \\ z_2' &= \varphi_2(\lambda_1) \\ z_3' &= \varphi_3(\lambda_1) \end{aligned} \qquad \text{und}\quad 4'')\quad \begin{aligned} z_1'' &= \psi_1(\lambda_2) \\ z_2'' &= \psi_2(\lambda_2) \\ z_3'' &= \psi_3(\lambda_2) \end{aligned}$$

die Coordinaten der Punkte unserer beiden Raumcurven dargestellt, abhängig von den Parametern $\lambda_1$ bez. $\lambda_2$. Wir setzen dabei, der präcisen Ausdrucksweise wegen, die Functionen $\varphi_i$ und $\psi_i$ als eindeutige, reelle Functionen der reellen unbeschränkt veränderlichen Grössen $\lambda_1$ bez. $\lambda_2$ voraus;

---

1) Es schien für die vorliegenden Untersuchungen zweckmässig, durch die eben gegebene Auszeichnung des einen der beiden zu einander symmetrischen Coordinatensysteme die Vorzeichen $+$ und $-$ der Determinante in die **bestimmte** Beziehung zu den Figuren 1 und 2 zu bringen. Dabei habe ich, um für die in der Regel als „positiv" bezeichnete Drehung Fig. 1 auch eine positive Windungszahl zu erhalten, die Gauss'sche Determinante noch mit einem Minuszeichen versehen, welches übrigens bei der Ableitung der zweiten und dritten Colonne der Zählerdeterminante durch Differentiation der ersten Colonne naturgemäss in die Formel eintritt.

die $\varphi_i$ und $\psi_i$ seien ferner stetig und überall endlich,[1]) und nach den Parametern $\lambda_1$, beziehungsweise $\lambda_2$, differentiirbar. Die Raumcurven sollen keinen Punkt mit einander gemein haben, d. h. $\psi_1 - \varphi_1$, $\psi_2 - \varphi_2$, $\psi_3 - \varphi_3$ niemals zugleich für dieselben Werthe der $\lambda$ verschwinden. Ferner sollen niemals gleichzeitig die drei Ableitungen $\varphi_{11}$, $\varphi_{21}$, $\varphi_{31}$ der Functionen $\varphi_i(\lambda_1)$ nach $\lambda_1$ verschwinden und gleiches für die Ableitungen $\psi_{12}$, $\psi_{22}$, $\psi_{32}$ der Functionen $\psi_i\,(\lambda_2)$ nach $\lambda_2$ gelten.

Es ergiebt sich dann unmittelbar für die Windungszahl $V$ das Doppelintegral:

$$
5)\qquad V = \frac{1}{4\pi} \cdot \iint \frac{\begin{vmatrix} \psi_1 - \varphi_1 & -\varphi_{11} & \psi_{12} \\ \psi_2 - \varphi_2 & -\varphi_{21} & \psi_{22} \\ \psi_3 - \varphi_3 & -\varphi_{31} & \psi_{32} \end{vmatrix}}{\sqrt{(\psi_1 - \varphi_1)^2 + (\psi_2 - \varphi_2)^2 + (\psi_3 - \varphi_3)^2}^{\,3}} \cdot d\lambda_1\, d\lambda_2,
$$

bei welchem den obigen Voraussetzungen zufolge die Integration über die $\lambda$ an eine Grenzbedingung nicht mehr gebunden ist.

Um die Richtung für die Integration auf beiden Linien nach den in § 1 gegebenen Bestimmungen festzulegen, wählen wir an einer bestimmten (aber übrigens willkürlichen) Stelle jeder der beiden Curven diejenige Richtung für die Zählung der Bogenlängen, für welche die dem Linienelemente $d\,o_1'$ (bez. $d\,o_1''$) an dieser Stelle entsprechende Aenderung $d\lambda_1$ (bez. $\lambda_2$) positiv ist. Da nun für die Elemente der beiden Curven

---

1) So dass wir hier, was indess die Allgemeinheit der Betrachtungen nicht wesentlich beschränkt, nur von g a n z i m E n d l i c h e n gelegenen Curven reden.

$$6') \qquad do_1' = \sqrt{\varphi_{11}^2 + \varphi_{21}^2 + \varphi_{31}^2} \cdot d\lambda_1$$

beziehungsweise

$$6'') \qquad do_1'' = \sqrt{\psi_{12}^2 + \psi_{22}^2 + \psi_{32}^2} \cdot d\lambda_2$$

ist, so folgt, da wir die Quadratwurzeln positiv annehmen, dass wir für die Integration im ganzen Gebiete die Elemente $d\lambda_1$ bez. $d\lambda_2$ positiv zu nehmen haben, also, kurz ausgedrückt, dass wir im Sinne der wachsenden Werthe $\lambda_1$ und $\lambda_2$ über die Curven zu integriren haben.[1])

Aus Formel (5) für $V$ ist nun die Bedeutung der Windungszahl als Kronecker'scher Charakteristik direct zu erschliessen. Die Entwicklungen der §§ 1 und 2 der „Beiträge I" (Formel (12) auf Seite 266) ergeben nämlich unmittelbar den Satz:

Stellt man das Gauss'sche Integral für die Umschlingung zweier Raumcurven mit Hülfe einer Parameterdarstellung (4) der Curven dar, so ist die Windungszahl $V$ gleich der Kronecker'schen Charakteristik des Systems der drei Functionen:

$$7) \qquad \psi_1(\lambda_2) - \varphi_1(\lambda_1), \quad \psi_2(\lambda_2) - \varphi_2(\lambda_1), \quad \psi_3(\lambda_2) - \varphi_3(\lambda_1),$$

der zwei Variabeln $\lambda_1$, $\lambda_2$.

Deuten wir nach Formel (2) der „Beiträge I" die drei Functionen im Raume der Coordinaten $z_1$, $z_2$, $z_3$,[2])

---

1) Die Darstellung ist in dieser weitläufigen Form mit Rücksicht auf die im Folgenden enthaltenen Ausführungen gegeben.

2) Es ist absichtlich mit Rücksicht auf die folgenden Formeln die Bezeichnung der Coordinaten durch $z_i$ beibehalten; diese treten hier an die Stelle der $x_i$ der Formel (2) in den „Beiträgen I", während die in jener Formel mit $z_i$ bezeichneten Parameter hier durch die $\lambda_i$ ersetzt sind.

$$
8) \qquad \begin{aligned}
z_1 &= \psi_1(\lambda_2) - \varphi_1(\lambda_1), \\
z_2 &= \psi_2(\lambda_2) - \varphi_2(\lambda_1), \\
z_3 &= \psi_3(\lambda_2) - \varphi_3(\lambda_1),
\end{aligned}
$$

so folgt der Satz:

Die Zahl der gegenseitigen Umwindungen der in (4) dargestellten Raumcurven ist gleich der Zahl der Windungen der Fläche (8) um den Nullpunkt.

Die Fläche (8) ist dabei auf die einfachste Weise geometrisch aus den beiden Curven abzuleiten. Legt man nämlich durch den Nullpunkt des Coordinatensystems Strahlen parallel zu den zweifach unendlich vielen zwischen beiden Raumcurven zu ziehenden Sehnen und schneidet auf diesen Strahlen je die Längen dieser Sehnen (gemessen in der Richtung von der ersten zur zweiten Curve) ab, so bilden die Endpunkte dieser Strahlen eben die Fläche (8).[1])

Die Formeln (8) ergeben weiter, dass die Gestalt der Fläche von einer gegenseitigen durch Parallelverschiebung der beiden Curven hervorgerufenen Lagenveränderung

1) Man kann sich auch eine anschauliche Vorstellung von unseren Flächen dadurch verschaffen, dass man sie als „Translationsflächen“ auffasst, die sich auf eine zur $M_1'' : z_i = \psi_i(\lambda_2)$ congruente und auf eine zweite aus der $M_1'$ durch „Spiegelung am Nullpunkt“ entstandene Curve $z_i = -\varphi_i(\lambda_1)$ als Leitcurven beziehen. Herr Finsterwalder hat mehrere Modelle solcher Flächen construirt, die im Brill'schen Verlage erschienen sind. Eines derselben bezieht sich speciell auf zwei in orthogonalen Ebenen gelegenen Kreise als Leitlinien, versinnlicht also gerade den für unsere Betrachtungen elementarsten Fall der gegenseitigen Umschlingung zweier Kreise. Auch Lie, der die Theorie der Translationsflächen in Verbindung mit den entsprechenden partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung ausgebaut hat (Vergl. neben älteren Untersuchungen die zusammenfassenden Darstellungen in den Berichten der Leipziger Gesellschaft d. W. Bd. 44), veranlasste im Leipziger mathematischen Institut die Herstellung von Modellen gewisser Translationsflächen.

unabhängig ist und dabei nur die Lage der Fläche gegen den Coordinaten-Anfangspunkt geändert wird; die Windungszahlen, welche die Fläche mit Bezug auf die verschiedenen Punkte des Raumes aufweist, geben also zugleich die Windungszahlen der beiden Curven für alle möglichen durch Parallelverschiebung entstehende Lagen.

Die Entwicklungen in den „Beiträgen I" zeigen nunmehr, dass wir sofort noch zwei weitere Darstellungen für die Windungszahl $V$ bilden können, nämlich mit Hülfe eines einfachen Integrals und durch eine Summenformel. Wir betrachten noch kurz diese Darstellungen und ihre geometrische Bedeutung.

### b) Darstellung von $V$ durch ein einfaches Integral.

Die Windungszahl lässt sich (nach Formel (26) der „Beiträge I", für $k = 0$) darstellen durch das einfache Integral:

9)
$$V = \frac{1}{2\pi} \cdot \int \frac{\begin{vmatrix} 0 & -\varphi_{11} & \psi_{12} \\ \psi_2-\varphi_2 & -\varphi_{21} & \psi_{22} \\ \psi_3-\varphi_3 & -\varphi_{31} & \psi_{32} \end{vmatrix}}{((\psi_2-\varphi_2)^2+(\psi_3-\varphi_3)^2)\cdot\sqrt{\varphi_{11}^2+\psi_{12}^2}} \cdot d\,\mathfrak{o}_1,$$

ausgedehnt über

$$\psi_1-\varphi_1=0,$$

welches die Windungszahl der Schnittcurve der Fläche (8) mit der Ebene

$$z_1=\psi_1-\varphi_1=0$$

um den Nullpunkt darstellt und in welchem $d\,\mathfrak{o}_1$ ein stets positiv zu nehmendes Element bedeutet, welches den beiden Gleichungen:

10′)
$$d\,\mathfrak{o}_1 = \frac{\sqrt{\varphi_{11}^2+\psi_{12}^2}}{\varphi_{11}} \cdot d\lambda_2$$

beziehungsweise

$$d\mathfrak{o}_1 = \frac{\sqrt{\varphi_{11}^2 + \psi_{12}^2}}{\psi_{12}} \cdot d\lambda_1 \tag{10''}$$

entsprechend für die Ausführung der Integration zu verwenden ist.[1]) Es ergiebt sich dann (indem man die Determinante nach der ersten Horizontalreihe auflöst und die oben genannten Formen für $d\mathfrak{o}_1$ benützt) folgende Form des einfachen Integrals:

$$V = \frac{1}{2\pi} \cdot \int \frac{\begin{vmatrix} 0 & -d\lambda_2 & d\lambda_1 \\ \psi_2 - \varphi_2 & -\varphi_{21} & \psi_{22} \\ \psi_3 - \varphi_3 & -\varphi_{31} & \psi_{32} \end{vmatrix}}{((\psi_2 - \varphi_2)^2 + (\psi_3 - \varphi_3)^2)}. \tag{11}$$

Führen wir hier die Coordinaten $z_1', z_2', z_3'$ beziehungsweise $z_1'', z_2'', z_3''$ der beiden Raumcurven (4) ein, so können wir auch schreiben:

$$V = \frac{1}{2\pi} \cdot \int \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ z_2'' - z_2' & -dz_2' & dz_2'' \\ z_3'' - z_3' & -dz_3' & dz_3'' \end{vmatrix}}{((z_2'' - z_2')^2 + (z_3'' - z_3')^2)}, \tag{12}$$

das Integral erstreckt über $z_1'' - z_1' = 0$.

---

1) Deutet man die Parameter $\lambda_1$, $\lambda_2$ als rechtwinklige Coordinaten einer Ebene, so ist $d\mathfrak{o}_1$ nichts anderes als das Linienelement der Curve

$$\psi_1(\lambda_2) - \varphi_1(\lambda_1) = 0,$$

dargestellt durch seine Projectionen $d\lambda_1$, $d\lambda_2$ auf die Axen. — Ueber diese Deutung der $\lambda$, die ich hier nicht weiter verfolge, vergleiche man die Schlussbemerkungen des § 9.

In dieser Form lässt sich die geometrische Bedeutung dieses einfachen Integrals am leichtesten übersehen:

Man denke sich nämlich eine Gerade, stets parallel zur Ebene $z_2 z_3$ bleibend, an den beiden Curven entlang gleiten, so misst die Anzahl der vollen Umdrehungen, die diese Gerade im entgegengesetzten Sinne des Uhrzeigers bei dieser Bewegung beschreibt, die Anzahl der gegenseitigen Umwindungen beider Curven.

Man überzeugt sich von der Richtigkeit dieses Satzes sofort durch Aufstellung des die Umdrehungszahl darstellenden Integrals. Für die anschauungsmässige Verfolgung der Bewegung der Geraden ist dabei noch folgendes zu beachten: Denkt man sich durch die gleitende Gerade eine Ebene parallel zur Ebene $z_2 z_3$ gelegt, so erfährt die Gerade in dieser Ebene die zu messende, drehende Bewegung und gleichzeitig wird die Ebene selbst in Richtung der Axe $z_1$ parallel verschoben. Besondere Stellen der Bewegung sind nun: Erstens diejenigen, in welchen der Sinn jener Drehung umkehrt; diese sind durch das Verschwinden der Zählerdeterminante unseres Integrals gekennzeichnet. (Vergl. die beiden durch $\times\times$ bezeichneten Stellen in nebenstehender Figur 4.) Zweitens diejenigen, in welchen die Richtung der Parallelverschiebung der Ebene umkehrt. Die letzteren Stellen sind durch das Verschwinden von $\psi_{12}$ beziehungsweise von $\varphi_{11}$ gegeben, d. h. durch diejenigen Lagen der sich verschiebenden Ebene, in welchen sie eine der beiden Curven berührt. Berührt dabei die Ebene die zweite Curve (ist also $\psi_{12} = 0$), so gleitet die bewegliche Gerade auf dieser im Sinne ihrer augenblicklichen Bewegung fort, während die Bewegung auf der ersten Curve direct umkehrt (vergl. die beiden durch $\circ\,\circ$ bezeichneten Stellen in den nebenstehenden Figuren 3 und 4). Dem entspricht analytisch, dass aus der Formel (10') für das positiv zu nehmende Element $d\mathfrak{o}_1$:

$$d\mathfrak{o}_1 = \frac{\sqrt{\varphi_{11}^2 + \psi_{12}^2}}{\psi_{12}} \cdot d\lambda_1$$

folgt, dass mit $\psi_{12}$ gleichzeitig $d\lambda_1$ sein Zeichen wechselt. Ein Gleiches ergiebt sich bezüglich des gleichzeitigen Zeichenwechsels von $\varphi_{11}$ und $d\lambda_2$. Die beiden Curven werden also im gegenwärtigen Falle **nicht** (wie im Falle des Doppelintegrals (5)) im Sinne der wachsenden Parameter $\lambda_1$ und $\lambda_2$ durchlaufen, sondern im Sinne des positiven Elementes $d\mathfrak{o}_1$. Die nebenstehenden Figuren dienen noch zur Versinnlichung des Umstandes, dass nach dem Gesagten bei der Bewegung der gleitenden Geraden im Allgemeinen einzelne Theile der beiden Curven mehrfach in verschiedener Richtung, andere gar nicht von der Geraden überstrichen werden können.

Fig. 3.

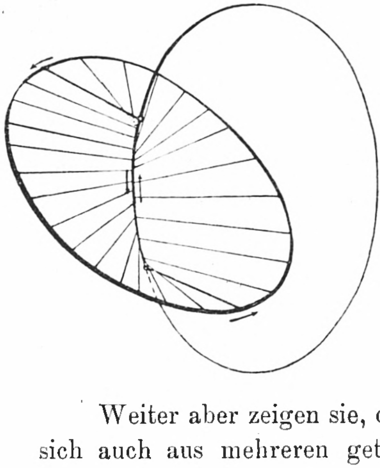
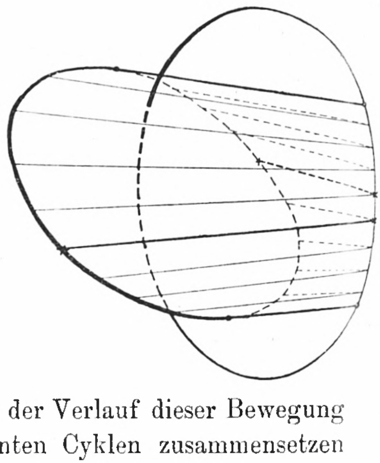


Fig. 4.



Weiter aber zeigen sie, dass der Verlauf dieser Bewegung sich auch aus mehreren getrennten Cyklen zusammensetzen kann, ohne dass darum die fraglichen Curven aus mehreren Zügen zu bestehen brauchen. Der Sinn, in welchem in diesem Falle die einzelnen Theilbewegungen zu addiren sind, wird festgelegt durch den an einer Anfangsstelle der Bewegung auf beiden Raumcurven (gemäss § 2, pag. 454) eingetragenen Richtungssinn, durch welchen auch die Richtung beim Beginne jeder in sich geschlossenen Theilbewegung der Geraden festgelegt wird.

**c) Darstellung von $V$ durch eine (Kronecker'sche) Summenformel.**

Aus Formel (13) und (14) der „Beiträge I" ergeben sich für $V$ sofort die beiden Summenformeln:

$$13\text{a)} \qquad V = \sum \text{sign.} \left\{ \begin{vmatrix} -\varphi_{11} & \psi_{12} \\ -\varphi_{21} & \psi_{22} \end{vmatrix} \right\}$$

und

$$13\text{b)} \qquad V = \frac{1}{2} \cdot \sum \text{sign.} \left\{ (\psi_3 - \varphi_3) \cdot \begin{vmatrix} -\varphi_{11} & \psi_{12} \\ -\varphi_{21} & \psi_{22} \end{vmatrix} \right\},$$

wobei die erste Summe sich erstreckt auf alle Punkte, für welche

$$\psi_1 - \varphi_1 = 0, \quad \psi_2 - \varphi_2 = 0, \quad \psi_3 - \varphi_3 > 0$$

ist, die letztere auf alle Punkte

$$\psi_1 - \varphi_1 = 0, \quad \psi_2 - \varphi_2 = 0.$$

Schreiben wir auch diese Formeln direct in den Coordinaten $z_i'$ und $z_i''$ der beiden Raumcurven, so lauten sie, wenn man rechts noch mit $d\lambda_1 \cdot d\lambda_2$ multiplicirt:

$$14\text{a)} \qquad V = \sum \text{sign.} \left\{ \begin{vmatrix} -dz_1' & dz_1'' \\ -dz_2' & dz_2'' \end{vmatrix} \right\}$$

und

$$14\text{b)} \qquad V = \frac{1}{2} \cdot \sum \text{sign.} \left\{ (z_3'' - z_3') \cdot \begin{vmatrix} -dz_1' & dz_1'' \\ -dz_2' & dz_2'' \end{vmatrix} \right\},$$

die Summen ausgedehnt über

$$z_1'' - z_1' = 0\,, \quad z_2'' - z_2' = 0\,, \quad z_3'' - z_3' > 0\,,$$

beziehungsweise über:

$$z_1'' - z_1' = 0\,, \quad z_2'' - z_2' = 0\,;$$

dabei ist zu beachten, dass hier $dz_i'$ und $dz_i''$ diejenigen Aenderungen der Coordinaten bezeichnen, welche positiven $d\lambda_1$ und $d\lambda_2$ entsprechen.

Die geometrische Bedeutung dieser Formeln ist unmittelbar ersichtlich:

Es wird die Windungszahl $V$ bestimmt durch die Punktcharakteristiken der scheinbaren Doppelpunkte, welche das System der beiden Raumcurven vom Zenith aus gesehen (vergl. Seite 452) darbietet.

Dabei ergiebt sich folgende anschauliche Deutung für das Vorzeichen der beiden in der zweiten Summenformel enthaltenen Factoren:

Der erste Factor $z_3'' - z_3'$ entscheidet durch sein Vorzeichen, ob im scheinbaren Doppelpunkt die erste der Curven unterhalb oder oberhalb der zweiten Curve verläuft.

Das Vorzeichen des zweiten Factors, der Determinante:

$$\text{15)} \qquad \begin{vmatrix} -\varphi_{11} & \psi_{12} \\ -\varphi_{21} & \psi_{22} \end{vmatrix} d\lambda_1 \cdot d\lambda_2 = \begin{vmatrix} -dz_1' & dz_2'' \\ -dz_1' & dz_2'' \end{vmatrix}$$

trennt die scheinbaren Doppelpunkte in zwei zu einander symmetrische Gattungen in folgender Weise: Man projicire die beiden Curven in der Richtung vom Zenith aus auf die Ebene $z_1\, z_2$ und trage in der Projection die auf der Curve festgesetzte Fortschreitungsrichtung ein. Unterscheidet man dann die beiden Curven wie in den obigen beiden Determinanten als erste und zweite, so entsprechen einem positiven, beziehungsweise einem negativen Werthe der Determinanten in den scheinbaren Doppelpunkten die durch Fig. 5 und 6

Fig. 5.

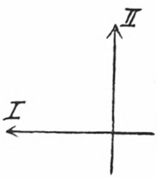
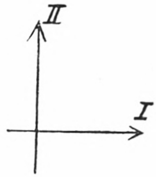



Fig. 6.




gekennzeichneten beiden Fälle. Die Determinante giebt nämlich den mit dem bekannten Möbius'schen Vorzeichen versehenen doppelten Inhalt des Dreiecks, welches durch die beiden vom scheinbaren Doppelpunkt (im positiven Richtungssinne) auslaufenden Bogenelemente bestimmt ist.

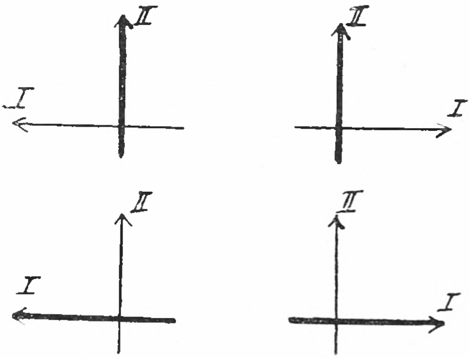
Die Formeln (14a, 14b) zählen also die Windungszahl $V$ ab gemäss der durch die folgende Figur 7 gegebenen Unterscheidung der scheinbaren Doppelpunkte, die wir in ihrer Ansicht in Richtung vom Zenith aus darstellen und wobei die stark gezeichnete Curve dem Beschauer näher liegen soll:

Fig. 7.

$$\begin{vmatrix} -dz_1' & dz_1'' \\ -dz_2' & dz_2'' \end{vmatrix} > 0 \qquad \begin{vmatrix} -dz_1' & dz_1'' \\ -dz_2' & dz_2'' \end{vmatrix} < 0$$

$z_3'' - z_3' > 0$

$z_3'' - z_3' < 0$



Die Formel (14a) erstreckt sich nur über die Punkte, für welche $z_3'' - z_3' > 0$ ist. Dabei lässt sich diese Formel unmittelbar in die andere (14b) überführen, wenn wir beachten, dass

$$16)\quad \sum \text{sign.}\left\{\begin{vmatrix} -\varphi_{11} & \psi_{12} \\ -\varphi_{21} & \psi_{22} \end{vmatrix}\right\} = \sum \text{sign.}\left\{\begin{vmatrix} -dz_1' & dz_1'' \\ -dz_2' & dz_2'' \end{vmatrix}\right\} = 0$$

ist, falls wir die Summation über alle scheinbaren Doppelpunkte (die Unterschiede im Sinne der Figuren 5 und 6 genommen) erstrecken. Es entspricht diese hier unmittelbar geometrisch einleuchtende Beziehung der allgemeinen Formel, welche Kronecker für die Vorzeichensumme aller Punktcharakteristiken eines Functionensystems aufgestellt hat (vgl. „Beiträge I", pag. 268).

## § 3.

### Formeln für die Windungszahl unter der Voraussetzung, dass die beiden Raumcurven als Schnittlinien je zweier Flächen gegeben sind.

Nimmt man die beiden Raumcurven $M_1'$ und $M_1''$ je durch zwei Gleichungen zwischen den Variabeln $z_1, z_2, z_3$ gegeben an und zwar die $M_1''$ durch:

$$17'')\quad \begin{aligned} F_0(z_1, z_2, z_3) &= 0, \\ F_1(z_1, z_2, z_3) &= 0, \end{aligned}$$

die $M_1'$ analog durch:

$$17')\quad \begin{aligned} F_2(z_1, z_2, z_3) &= 0, \\ F_3(z_1, z_2, z_3) &= 0, \end{aligned}$$

so lässt sich das Gauss'sche Doppelintegral für die Windungszahl nicht allgemein aufstellen. Dagegen treten hier direct die Formeln für die Kronecker'sche Charakteristik $K$ des Systems der vier Functionen (mit drei Variabeln)

18) $$F_0,\ F_1,\ F_2,\ F_3 \quad \text{ein.}$$

Es lässt sich aus den geometrischen Entwicklungen, die Kronecker insbesondere in den Abschnitten II und V seiner Abhandlung über Functionensysteme vom März 1869 gegeben hat und in welchen die Charakteristik als Windungszahl einer gewissen ebenen Curve um den Nullpunkt erscheint (vgl. hiezu „Beiträge I", § 3), die Bedeutung der Kronecker'schen Charakteristik als Zahl der gegenseitigen Windungen zweier Raumcurven (im Falle von drei Variabeln) herleiten. Wir gehen indess auf diese Form der Herleitung nicht näher ein, beweisen vielmehr in den folgenden §§ 4 und 5 die Uebereinstimmung der in den §§ 1 und 2 gegebenen Gauss'schen Zahl $V$ mit der im gegenwärtigen § definirten Kronecker'schen Charakteristik $K$ durch eine directe Vergleichung der für $V$ abgeleiteten Summenformel (13a) und der entsprechenden, sogleich zu erwähnenden Summenformel für $K$ (Formel (26a)).

Aus den in den „Beiträgen I" entwickelten Formeln (12), (26) und (13), (14) ergiebt sich die Darstellung der Zahl $K$ durch ein dreifaches, durch ein zweifaches und durch ein einfaches Integral, sowie durch den Kronecker'schen Summenausdruck, Formeln, die wir der Vollständigkeit halber in Kürze hierher setzen.

a) Das dreifache Integral für $K$ lautet:

19) $$K = \frac{1}{\omega_3} \cdot \int \frac{\begin{vmatrix} F & F_{01} & F_{02} & F_{03} \\ F_1 & F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_2 & F_{21} & F_{22} & F_{23} \\ F_3 & F_{31} & F_{32} & F_{33} \end{vmatrix}}{\sqrt{F_0^2 + F_1^2 + F_2^2 + F_3^2}^{\,4}} \cdot d o_3;$$

hier ist

$$do_3 = dz_1 \cdot dz_2 \cdot dz_3 \tag{20}$$

das positiv zu nehmende Element der Integration und die Integration über die Gesammtheit der reellen Werthe $z_1$, $z_2$, $z_3$ zu erstrecken.

b) Um die Darstellung durch ein zweifaches Integral zu erhalten, zeichnen wir eine der Functionen $F_i$ z. B. $F_0$ aus und es folgt dann

$$K = \frac{1}{\omega_2} \cdot \int \frac{\begin{vmatrix} 0 & F_{01} & F_{02} & F_{03} \\ F_1 & F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_2 & F_{21} & F_{22} & F_{23} \\ F_3 & F_{31} & F_{32} & F_{33} \end{vmatrix}}{\sqrt{F_1^2 + F_2^2 + F_3^2}^{\,3} \cdot \sqrt{F_{01}^2 + F_{02}^2 + F_{03}^2}} \cdot do_2, \tag{21}$$

wo $do_2$ das stets positiv zu nehmende Element der Fläche $F_0 = 0$, über welche die Integration zu erstrecken ist, bezeichnet. Für die Integration ist es zweckmässig, $do_2$ in den drei verschiedenen Formen

$$do_2 = \frac{\sqrt{F_{01}^2 + F_{02}^2 + F_{03}^2}}{F_{0i}} \cdot dz_k \cdot dz_l \tag{22}$$

$$i, k, l = 1, 2, 3$$

anzunehmen.

c) Das einfache Integral erstreckt sich über eine der in Betracht kommenden Curven, z. B. über $F_0 = 0$, $F_1 = 0$, in welchem Falle wir erhalten:

$$
23)\qquad K = \frac{1}{\omega_1} \cdot \int \frac{\begin{vmatrix} 0 & F_{01} & F_{02} & F_{03} \\ 0 & F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_2 & F_{21} & F_{22} & F_{23} \\ F_3 & F_{31} & F_{32} & F_{33} \end{vmatrix}}{\sqrt{F_2^2+F_3^2}^{\,2} \cdot \sqrt{\begin{Vmatrix} F_{01} & F_{02} & F_{03} \\ F_{11} & F_{12} & F_{13} \end{Vmatrix}^2}} \cdot do_1,
$$

wobei $do_1$ das stets positiv zu nehmende Linienelement der Curve $F_0 = 0$, $F_1 = 0$ bezeichnet, welches für die Integration (beim Auflösen der Zählerdeterminante nach den Unterdeterminanten der Matrix der ersten beiden Reihen) zweckmässig in den Formen

$$
24)\qquad do_1 = \frac{\sqrt{\begin{Vmatrix} F_{01} & F_{02} & F_{03} \\ F_{11} & F_{11} & F_{12} \end{Vmatrix}^2}}{\begin{vmatrix} F_{0k} & F_{0l} \\ F_{1k} & F_{1l} \end{vmatrix}} \cdot dz_i \qquad i, k, l = 1, 2, 3
$$

anzunehmen ist.

Die Factoren $\omega_1$, $\omega_2$, $\omega_3$ der drei Integralausdrücke sind beziehungsweise:

$$
25)\qquad \omega_3 = 2\pi^2, \qquad \omega_2 = 4\pi, \qquad \omega_1 = 2\pi.
$$

d) Als Summenformel zur Darstellung von $K$ endlich ergeben sich, wenn wir die Functionen $F_0$, $F_1$, $F_2$ vor der letzten $F_3$ auszeichnen, die Formeln:

$$
26\text{a})\qquad K = -\sum \text{sign.} \left\{ \begin{vmatrix} F_{01} & F_{02} & F_{03} \\ F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} \end{vmatrix} \right\},
$$

und

$$26\text{b)}\qquad K = \frac{1}{2}\cdot\sum \text{sign.}\left\{\begin{vmatrix} 0 & F_{01} & F_{02} & F_{03} \\ 0 & F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ 0 & F_{21} & F_{22} & F_{23} \\ F_3 & F_{31} & F_{32} & F_{33} \end{vmatrix}\right\},$$

die erstere Summe erstreckt über die Punkte, für welche

$$F_0 = 0, \qquad F_1 = 0, \qquad F_2 = 0, \qquad F_3 > 0$$

ist, die letztere ausgedehnt über die Punkte

$$F_0 = 0, \qquad F_1 = 0, \qquad F_2 = 0.$$

Man hat dabei die Relation

$$27)\qquad \sum \text{sign.}\left\{\begin{vmatrix} F_{01} & F_{02} & F_{03} \\ F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} \end{vmatrix}\right\} = 0,$$

falls die Summe über a l l e Punkte

$$F_0 = 0, \qquad F_1 = 0, \qquad F_2 = 0$$

erstreckt wird.

Bezüglich der geometrischen Bedeutung der vorstehenden Integralformeln sei auf die Entwicklungen der „Beiträge I“ verwiesen. Auf die Discussion der Summenformeln haben wir sogleich einzugehen.

## § 4.

## Ableitung einer neuen Formel für die Bestimmung der Charakteristik $K$.

Es handelt sich nunmehr in den folgenden §§ 4 und 5 darum, die Uebereinstimmung der Zahl $V$ (der §§ 1 und 2) mit der jetzt (in § 3) betrachteten Zahl $K$ zu erweisen.

Zunächst stehen, wie schon die geometrische Bedeutung der verschiedenen Ausdrücke erkennen lässt, die für beide gewonnenen Formeln in keiner directen Beziehung zu einander. Um sie mit einander in Verbindung zu bringen und ihre gegenseitige Stellung zu kennzeichnen, verfahren wir folgendermassen:

Wir knüpfen an die beiden Summenformeln (13a) und (26a) für $V$ und $K$ an und zeigen, dass die in diesen Formeln dargestellten Zahlen an denselben Stellen und in gleichem Sinne sich ändern, wenn wir die gegenseitige Lage der Curven $M_1'$ und $M_1''$ durch Bewegung derselben abändern. Nunmehr bringen wir beide Curven, ohne sie zu deformiren, in eine solche Lage, dass sie keinerlei gegenseitige Verschlingung mehr besitzen (was unter Voraussetzung von ganz im Endlichen gelegenen Curven stets möglich ist); für diese Lage ist $V$ sowohl wie $K$ gleich Null. Bewegen wir von dieser Ausgangslage der Zählung aus die Curven in ihre ursprüngliche Lage zurück, so ändern sich die beiden Zahlen in gleicher Weise und damit folgt schliesslich für die Endlage:

$$V = K. \tag{28}$$

Gleichzeitig aber gewinnen wir in dieser Abzählung der Aenderungen der Zahlen $V$, beziehungsweise $K$ im Laufe der Bewegung der Curven $M_1'$ und $M_1''$ gegen einander eine neue Methode zur Bestimmung unserer Windungszahl.[1])

---

1) Die hier angewendete Methode der Abzählung einer Charakteristik hat Kronecker ganz allgemein formulirt mittelst der Einführung willkürlicher Parameter in die Functionen des Systems; er hat bei dieser Gelegenheit auf die durch die Einführung eines Parameters gegebene Möglichkeit einer Abzählung der Charakteristik mit Hülfe des Sturm'schen Verfahrens hingewiesen. Vergl. Berliner Monatsberichte vom 21. Febr. 1878, pag. 147, 148.

Zur rechnerischen Darlegung wählen wir speciell für die Veränderung der gegenseitigen Lage der beiden Curven eine Verschiebung der Curve $M_1''$ in Richtung der Axe $z_3$, bei festgehaltener Curve $M_1'$.

Wir betrachten zunächst die Summenformel (13a)

$$13\text{a)} \qquad V = \sum \text{sign.} \left\{ \begin{vmatrix} -\varphi_{11} & \psi_{12} \\ -\varphi_{21} & \psi_{22} \end{vmatrix} \right\},$$

die Summe ausgedehnt über:

$$\psi_1 - \varphi_1 = 0, \qquad \psi_2 - \varphi_2 = 0, \qquad \psi_3 - \varphi_3 > 0.$$

Die Curve $M_1''$ sei um die Strecke $C$ in Richtung der negativen Axe $z_3$ verschoben, so dass also für die verschobene Curve

$$29) \qquad \begin{aligned} z_1 &= \psi_1, \\ z_2 &= \psi_2, \\ z_3 &= \psi_3 - C \end{aligned}$$

ist. Wählen wir nun $C$ so gross, gleich $C_0$, dass für a l l e scheinbaren Doppelpunkte $\psi_1 - \varphi_1 = 0$, $\psi_2 - \varphi_2 = 0$ der beiden Curven stets

$$(\psi_3 - C_0) - \varphi_3 < 0$$

ist, so wird die einer solchen Lage der beiden Curven entsprechende Zahl $V_{C_0} = 0$ sein, weil alle scheinbaren Doppelpunkte aus dem Bereich der Abzählung gerückt sind. Von hier ab also als Ausgangslage haben wir die Zählung zu beginnen und nunmehr $C$ von $C_0$ bis 0 abnehmen zu lassen. Passiren wir nun, die Curve $M_1''$ in der positiven Richtung der Axe $z_3$ an die feste Curve $M_1'$ heranschiebend, mit einem Zweige der $M_1''$ die $M_1'$, so tritt an einer solchen Stelle $C = \overline{C}$, für welche also

$$\psi_1 - \varphi_1 = 0, \qquad \psi_2 - \varphi_2 = 0, \qquad (\psi_3 - C) - \varphi_3 = 0$$

ist, der betreffende scheinbare Doppelpunkt in den Bereich unserer Abzählung ein, weil hier die Function $(\psi_3 - C) - \varphi_3$ von einem negativen zu einem positiven Zahlwerth übergeht. Der Werth von $V$ wird also an einer solchen Stelle:

um 1 vermehrt, wenn für diesen Punkt $\begin{vmatrix} -\varphi_{11} & \psi_{12} \\ -\varphi_{21} & \psi_{22} \end{vmatrix} > 0$

um 1 vermindert, wenn für diesen Punkt $\begin{vmatrix} -\varphi_{11} & \psi_{12} \\ -\varphi_{21} & \psi_{22} \end{vmatrix} < 0$

ist. Die im Laufe der Bewegung von $C = C_0$ mit abnehmendem $C$ bis $C = 0$ an den Durchgangspunkten der beweglichen Curve durch die feste Curve eingetretenen Aenderungen ergeben also für die Endlage der beiden Curven die Zahl $V$ ausgedrückt genau durch die obige Summenformel (13a).

Zu einer n e u e n Summenformel werden wir dagegen geführt, wenn wir dieselbe Betrachtung unter der Voraussetzung der Definition unserer Curven durch die Gleichungen $F_i = 0$ durchführen.

Es handelt sich hier um die Summenformel (26a)

26a) $$K = -\sum \operatorname{sign.} \left\{ \begin{vmatrix} F_{01} & F_{02} & F_{03} \\ F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} \end{vmatrix} \right\},$$

die Summe ausgedehnt über

$$F_0 = 0, \qquad F_1 = 0, \qquad F_2 = 0, \qquad F_3 > 0.$$

Die Verschiebung der Curve $M_1''$ in Richtung der negativen Axe $z_3$ um den Betrag $C$ giebt für die verschobene Curve die Gleichungen:

30) $$\begin{aligned} &F_0(z_1, z_2, z_3 + C) = 0, \\ &F_1(z_1, z_2, z_3 + C) = 0. \end{aligned}$$

Wählt man also, alle Flächen $F_i = 0$ als ganz im Endlichen liegend vorausgesetzt, nur $C$ gross genug, gleich $C_0$, so werden sämmtliche Punkte der verschobenen Curve $M_1''$ kleinere Ordinaten besitzen, als die Punkte der festen Fläche $F_2 = 0$ und damit auch kleinere, als die Punkte der auf ihr liegenden festen Curve $M_1'$. Dann ergiebt sich für einen solchen Werth $C_0$ von $C$ die Zahl $K_{C_0} = 0$, weil die Gleichungen

$$F_0(z_1, z_2, z_3 + C) = 0, \quad F_1(z_1, z_2, z_3 + C) = 0, \quad F_2(z_1, z_2, z_3) = 0$$

keine reellen gemeinsamen Lösungen mehr besitzen.

Von dieser Lage $C = C_0$ als Anfangslage aus verschieben wir nun wieder die Curve $M_1''$ in der Richtung der positiven Axe $z_3$; es handelt sich dann darum, zu bestimmen, an welchen Stellen $\overline{C}$ die durch die folgende Formel gegebene Zahl $K_C$ sich ändert.

$$31)\qquad K_C = -\sum \operatorname{sign.}\left\{\begin{vmatrix} F_{01}(z_1,z_2,z_3+C) & F_{02}(z_1,z_2,z_3+C) & F_{03}(z_1,z_2,z_3+C) \\ F_{11}(z_1,z_2,z_3+C) & F_{12}(z_1,z_2,z_3+C) & F_{13}(z_1,z_2,z_3+C) \\ F_{21}(z_1,z_2,z_3) & F_{22}(z_1,z_2,z_3) & F_{23}(z_1,z_2,z_3) \end{vmatrix}\right\},$$

die Summe ausgedehnt über alle Werthe

$$F_0(z_1, z_2, z_3 + C) = 0, \quad F_1(z_1, z_2, z_3 + C) = 0,$$
$$F_2(z_1, z_2, z_3) = 0, \qquad F_3(z_1, z_2, z_3) > 0.$$

Zunächst treten von $C = C_0$ an je paarweise gemeinsame Lösungen der Gleichungen

$$F_0(z_1, z_2, z_3 + C) = 0, \quad F_1(z_1, z_2, z_3 + C) = 0, \quad F_2(z_1, z_2, z_3) = 0$$

auf an den Berührungsstellen der sich verschiebenden Curve $M_1''$ mit der festen Fläche $F_2 = 0$, beziehungsweise verschwinden je zwei solche Punkte, die im Laufe der Bewegung der Curve $M_1''$ entstanden sind, wieder. An diesen Stellen ist die Determinante in der obigen Formel (31) für $K_C$ gleich

Null, während sie für die beiden im Berührungspunkte zusammenrückenden Schnittpunkte der Curve mit der Fläche $F_2 = 0$ (wenn wir von singulären Vorkommnissen, wie dies hier stets geschieht, absehen) je verschiedenes Vorzeichen aufweist. Diese Stellen üben also keinen Einfluss auf die Zahl $K_C$ aus.

Wenn dagegen ein Zweig der Curve $M_1''$ die feste Curve $M_1'$ passirt, d. h. an den Stellen, für welche die Gleichungen

$$32)\quad \begin{aligned} F_0(z_1, z_2, z_3 + C) &= 0 \\ F_1(z_1, z_2, z_3 + C) &= 0 \\ F_2(z_1, z_2, z_3) &= 0 \\ F_3(z_1, z_2, z_3) &= 0 \end{aligned}$$

gemeinsame Lösungen besitzen, tritt eine Aenderung in der Abzählung ein, insoferne ein Punkt, für welchen die drei ersten Gleichungen erfüllt sind, entweder aus einem Gebiete, in welchen $F_3 < 0$ ist, in das Gebiet $F_3 > 0$ eintritt und dadurch bei der Abzählung gemäss Formel (31) neu hinzukommt, oder umgekehrt aus $F_3 > 0$ in das Gebiet $F_3 < 0$ eintritt und dadurch für die Abzählung in Wegfall kommt. Eine solche Stelle ist also im ersten Falle mit $\mp 1$ für die Bildung der Zahl $K$ in Rechnung zu setzen je nachdem die Determinante in der Formel für $K_C$ an dieser Stelle $\gtrless 0$ ist, im zweiten Falle dagegen mit $\pm 1$.

Nun seien $\bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3$ die Coordinaten, $\bar{C}$ der Parameter in einem solchen Durchgangspunkt der beweglichen Curve $M_1''$ durch die feste Curve $M_1'$; v o r dieser Lage kommt der beweglichen Curve der Parameter $\bar{C} + dC$, n a c h derselben der Parameter $\bar{C} - dC$ zu, wo nach unserer Annahme über die Richtung der Verschiebung (von $C = C_0$ bis $C = 0$), $dC$ eine p o s i t i v e Aenderung bezeichnet. Die Coordinaten, bez. der Parameter für den gemeinschaftlichen Schnittpunkt der drei Flächen $F_0 = 0$, $F_1 = 0$, $F_2 = 0$ vor und nach dem Durchgang durch die singuläre Stelle sind

$$\bar{z}_1 \pm dz_1, \qquad \bar{z}_2 \pm dz_2, \qquad \bar{z}_3 \pm dz_3, \qquad \bar{C} \pm dC$$

wobei, wie sich direct ergiebt:

$$33) \qquad dz_1 : dz_2 : dz_3 : dC = \begin{Vmatrix} F_{01} & F_{02} & F_{03} & F_{03} \\ F_{11} & F_{12} & F_{13} & F_{13} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} & 0 \end{Vmatrix} .$$

Der Unterschied, ob beim Durchgang durch die singuläre Stelle der Schnittpunkt der drei Flächen $F_0 = 0$, $F_1 = 0$, $F_2 = 0$ aus einem Gebiet $F_3 < 0$ in ein Gebiet $F_3 > 0$ rückt oder ob das umgekehrte statthat, wird durch das positive oder negative Vorzeichen des Werthes von

$$34) \qquad -(F_{31}\, dz_1 + F_{32}\, dz_2 + F_{33}\, dz_3),$$

(die $(-dz_i)$ als die Aenderungen der $z_i$ nach dem Durchgang durch die singuläre Stelle gerechnet), entschieden, also mit Berücksichtigung der obigen Werthe für die $dz_i$ durch das Vorzeichen des Determinantenquotienten:

$$35) \qquad - \begin{vmatrix} F_{01} & F_{02} & 0 & F_{03} \\ F_{11} & F_{12} & 0 & F_{13} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} & 0 \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} & 0 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} F_{01} & F_{02} & F_{03} \\ F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} \end{vmatrix} ;$$

Nun ist aber nach Seite 473 für die Abzählung der Durchgangspunkte $\mp 1$ in Rechnung zu setzen, je nachdem der Ausdruck (35) und die Determinante in (31), d. i. die Nennerdeterminante von (35), gleiches oder ungleiches Vorzeichen haben. Die an einer solchen Stelle erfolgende Aenderung der Zahl $K_C$ ergiebt sich also zu $\pm 1$, je nachdem die Zählerdeterminante einen positiven oder negativen Werth besitzt.

Danach ergiebt sich also für die Abzählung der Zahl $K$ durch die Summation sämmtlicher Aenderungen, welche die Zahl $K_C$ von $C = C_0$ bis $C = 0$ erleidet, die folgende neue Formel:

$$36)\qquad K = \sum \text{sign.} \left\{ \begin{vmatrix} F_{01} & F_{02} & 0 & F_{03} \\ F_{11} & F_{12} & 0 & F_{13} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} & 0 \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} & 0 \end{vmatrix} \right\},$$

die Summe erstreckt über alle Punkte, für welche

$$F_0(z_1, z_2, z_3 + C) = 0, \quad F_1(z_1, z_2, z_3 + C) = 0,$$
$$F_2(z_1, z_2, z_3) = 0, \qquad F_3(z_1, z_2, z_3) = 0$$

und

$$C > 0$$

ist.

Man erkennt dabei sofort, dass $K$ sich durch diese Formel darstellt als Kronecker'sche Charakteristik des Systems der fünf Functionen

$$37)\qquad \begin{matrix} F_0(z_1, z_2, z_3 + C), & F_1(z_1, z_2, z_3 + C), & \\ F_2(z_1, z_2, z_3), & F_3(z_1, z_2, z_3), & C \end{matrix}$$

mit den vier Variabeln $z_1$, $z_2$, $z_3$, $C$, und kann sich, davon ausgehend, auch direct von der Uebereinstimmung der in den Formeln (26a) und (36) gewonnenen Zahlen überzeugen.

Man hat zu dem Ende nur die Kronecker'sche Summenformel zu bilden für die Functionen:

$$F_0 = 0, \qquad F_1 = 0, \qquad F_2 = 0, \qquad C = 0, \qquad F_3 > 0,$$

um unmittelbar Formel (26a) zu erhalten. Dabei ist für die Bestimmung des Vorzeichens die Vertauschung der Reihenfolge der Functionen $F_3$ und $C$ zu berücksichtigen.

## § 5.

### Beweis der Uebereinstimmung der Zahlen $V$ und $K$.

Mit Hülfe der neuen Formel für die Bestimmung der Zahl $K$ ist nun der Uebergang von dieser zu der aus dem System der Functionen $\psi_1 - \varphi_1$, $\psi_2 - \varphi_2$, $\psi_3 - \varphi_3$ abgeleiteten Zahl $V$ gegeben. Das Vorzeichen der Determinante

$$\text{38)} \qquad \begin{vmatrix} F_{01} & F_{02} & 0 & F_{03} \\ F_{11} & F_{12} & 0 & F_{13} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} & 0 \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} & 0 \end{vmatrix}$$

unterscheidet nämlich die scheinbaren Doppelpunkte der beiden Curven $M_1'$ und $M_1''$ (genommen in der Richtung der Axe $z_3$) in demselben Sinne, wie das Vorzeichen der Determinante

$$\text{39)} \qquad \begin{vmatrix} -\varphi_{11} & \psi_{12} \\ -\varphi_{21} & \psi_{22} \end{vmatrix},$$

von dessen Bedeutung wir in § 2 (pag. 462) gehandelt haben.

Die letztere Determinante trennt nämlich die scheinbaren Doppelpunkte nach dem Vorzeichen des kleinen Flächenelements, welches bei Projection der auf den beiden Curven im scheinbaren Doppelpunkt angenommenen Linienelemente $do_1'$ und $do_1''$ auf die Ebene $z_1\, z_2$ entsteht. Dabei sind beide Curven im Sinne der wachsenden Parameter durchlaufen angenommen. Sind nun die beiden Raumcurven durch die Gleichungen $F_i = 0$ gegeben, so hat man für die $dz_1'$, $dz_2'$, $dz_3'$ der ersten Curve

$$\text{40')} \qquad \begin{aligned} F_{21}\, dz_1' + F_{22}\, dz_2' + F_{23}\, dz_3' &= 0, \\ F_{31}\, dz_1' + F_{32}\, dz_2' + F_{33}\, dz_3' &= 0. \end{aligned}$$

und für die zweite Curve analog:

40″)
$$\begin{aligned} F_{01}\,dz_1'' + F_{02}\,dz_2'' + F_{03}\,dz_3'' &= 0, \\ F_{11}\,dz_1'' + F_{12}\,dz_2'' + F_{13}\,dz_3'' &= 0. \end{aligned}$$

Führt man diese Beziehungen ein, so folgt nach kurzer Umrechnung für den Inhalt jenes kleinen Elementes:

41)
$$\begin{vmatrix} -dz_1' & dz_1'' \\ -dz_2' & dz_2'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\varphi_{11} & \psi_{12} \\ -\varphi_{21} & \psi_{22} \end{vmatrix} \cdot d\lambda_1\, d\lambda_2$$

$$= \begin{vmatrix} F_{01} & F_{02} & 0 & F_{03} \\ F_{11} & F_{12} & 0 & F_{13} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} & 0 \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} & 0 \end{vmatrix} \cdot \frac{dz_3'}{\begin{vmatrix} F_{21} & F_{22} \\ F_{31} & F_{32} \end{vmatrix}} \cdot \frac{dz_3''}{\begin{vmatrix} F_{01} & F_{02} \\ F_{11} & F_{12} \end{vmatrix}}$$

Nun gilt aber für die positiv zu nehmenden Linienelemente beider Curven:

42′)
$$do_1' = \sqrt{\varphi_{11}^2 + \varphi_{21}^2 + \varphi_{31}^2} \cdot d\lambda_1 = \frac{\sqrt{\begin{Vmatrix} F_{21} & F_{22} & F_{23} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} \end{Vmatrix}^2}}{\begin{vmatrix} F_{21} & F_{22} \\ F_{31} & F_{32} \end{vmatrix}} \cdot dz_3',$$

42″)
$$do_1'' = \sqrt{\psi_{12}^2 + \psi_{22}^2 + \psi_{32}^2} \cdot d\lambda_2 = \frac{\sqrt{\begin{Vmatrix} F_{01} & F_{02} & F_{03} \\ F_{11} & F_{12} & F_{13} \end{Vmatrix}^2}}{\begin{vmatrix} F_{01} & F_{02} \\ F_{11} & F_{12} \end{vmatrix}} \cdot dz_3''.$$

Nehmen wir also (wie stets) die Quadratwurzeln aus den Quadratsummen positiv, so sind für die Summation zugleich mit $d\lambda_1$, beziehungsweise $d\lambda_2$ auch die beiden Ausdrücke:

$$43)\qquad \frac{dz_3'}{\begin{vmatrix} F_{21}' & F_{22}' \\ F_{31}' & F_{32}' \end{vmatrix}} \quad \text{und} \quad \frac{dz_3''}{\begin{vmatrix} F_{01}' & F_{02}' \\ F_{11}' & F_{12}' \end{vmatrix}}$$

positiv zunehmen[1]), d. h. für alle Elemente der Summation ist:

$$44)\qquad \text{sign.}\left\{\begin{vmatrix} -dz_1' & dz_1'' \\ -dz_2' & dz_2'' \end{vmatrix}\right\} = \text{sign.}\left\{\begin{vmatrix} -\varphi_{11} & \psi_{12} \\ -\varphi_{21} & \psi_{22} \end{vmatrix}\right\}$$

$$= \text{sign.}\left\{\begin{vmatrix} F_{01}' & F_{02}' & 0 & F_{03}' \\ F_{11}' & F_{12}' & 0 & F_{13}' \\ F_{21}' & F_{22}' & F_{23}' & 0 \\ F_{31}' & F_{32}' & F_{33}' & 0 \end{vmatrix}\right\}.$$

Es kommen somit für die Abzählung der Zahlen $V$ und $K$ durch die Formeln (13a) und (36) dieselben Punkte,

---

1) Man bemerkt unmittelbar, dass diese Vorzeichenbestimmung genau übereinstimmt mit der durch das Kronecker'sche „Fortgangsprincip" (Berichte der Berliner Akademie vom März 1869, pag. 160) gegebenen. Nach der Kronecker'schen Regel ist die Fortgangsrichtung auf den beiden Curven so zu wählen, dass die Ausdrücke

$$\begin{vmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 & \Phi_3 \\ F_{21}' & F_{22}' & F_{23}' \\ F_{31}' & F_{32}' & F_{33}' \end{vmatrix} \cdot d\Phi \quad \text{beziehungsweise} \quad \begin{vmatrix} F_{01}' & F_{02}' & F_{03}' \\ F_{11}' & F_{12}' & F_{13}' \\ \Phi_1 & \Phi_2 & \Phi_3 \end{vmatrix} \cdot d\Phi$$

stets positiv sind; ersetzt man für die beiden Ausdrücke die willkürliche Function $\Phi(z_1, z_2, z_3)$ durch $z_3$, so ergeben sich die obigen Bedingungen.

nämlich die bei der Bewegung von $M_1''$ gegen $M_1'$ auftretenden wirklichen Doppelpunkte, genommen beiderseits mit denselben Vorzeichen in Rechnung. Damit ist aber die Identität der nach den Formeln (13a), (26a) und (36) gewonnenen Zahlen $V$ und $K$ bewiesen.

Wir fassen das Resultat der vorliegenden Untersuchung zusammen in dem Satze:

Die Zahl der gegenseitigen Umschlingungen zweier Raumcurven im Gauss'schen Sinne ist identisch mit der Kronecker'schen charakteristischen Zahl des Functionensystems:

$$7) \quad \psi_1(\lambda_2) - \varphi_1(\lambda_1), \quad \psi_2(\lambda_2) - \varphi_2(\lambda_1), \quad \psi_3(\lambda_2) - \varphi_3(\lambda_1),$$

beziehungsweise des Functionensystems:

$$18) \quad F_0(z_1, z_2, z_3), \quad F_1(z_1, z_2, z_3), \quad F_2(z_1, z_2, z_3), \quad F_3(z_1, z_2, z_3),$$

wenn

$$4) \quad \begin{aligned} z_1 &= \varphi_1(\lambda_1), \\ z_2 &= \varphi_2(\lambda_1), \\ z_3 &= \varphi_3(\lambda_1), \end{aligned} \qquad \text{und} \qquad \begin{aligned} z_1 &= \psi_1(\lambda_2), \\ z_2 &= \psi_2(\lambda_2), \\ z_3 &= \psi_3(\lambda_2), \end{aligned}$$

beziehungsweise

$$17) \quad \begin{aligned} F_0(z_1, z_2, z_3) &= 0, \\ F_1(z_1, z_2, z_3) &= 0, \end{aligned} \qquad \text{und} \qquad \begin{aligned} F_2(z_1, z_2, z_3) &= 0, \\ F_3(z_1, z_2, z_3) &= 0 \end{aligned}$$

die zur analytischen Darstellung der beiden Curven dienenden Gleichungen sind.

## Zweiter Abschnitt.

### Theorie der gegenseitigen Umwindung $k$-dimensionaler und $n-k-1$-dimensionaler Mannigfaltigkeiten im linearen Gebiete von $n$ Dimensionen.

### § 6.

### Verallgemeinerung des Gauss'schen Integrals für Gebiete von $n$ Dimensionen.

Die Gauss'sche Formel für die Zahl der gegenseitigen Umwindungen zweier Raumcurven und ihre Darstellung als Kronecker'sche Charakteristik eines zugehörigen Functionensystems lässt nun die nachfolgende Erweiterung für höhere Mannigfaltigkeiten naturgemäss erscheinen:

Es seien im Gebiete von $n$ reellen Variabeln $z_1, z_2, \dots z_n$ die wir (zu kurzer Sprechweise) als rechtwinklige Coordinaten des linearen Raumes $L_n$ von $n$ Dimensionen bezeichnen und deuten wollen, je zwei geschlossene Mannigfaltigkeiten $M'_k$ und $M''_{n-k-1}$ von $k$, beziehungsweise von $n-k-1$ Dimensionen gegeben; so definiren wir als gegenseitige Windungszahl $V$ der beiden Mannigfaltigkeiten den Werth des Integrals:

$$V = \frac{1}{\tilde{\omega}_{n-1}} \cdot \int\limits_{M''_{n-k-1}} \int\limits_{M'_k} \frac{\begin{vmatrix} z_1''-z_1' & -\overset{(1)}{dz_1'} & -\overset{(2)}{dz_1'} \ldots -\overset{(k)}{dz_1'} & \overset{(k+1)}{dz_1''} & \overset{(k+2)}{dz_1''} \ldots \overset{(n-1)}{dz_1''} \\ z_2''-z_2' & -\overset{(1)}{dz_2'} & -\overset{(2)}{dz_2'} \ldots -\overset{(k)}{dz_2'} & \overset{(k+1)}{dz_2''} & \overset{(k+2)}{dz_2''} \ldots \overset{(n-1)}{dz_2''} \\ z_3''-z_3' & -\overset{(1)}{dz_3'} & -\overset{(2)}{dz_3'} \ldots -\overset{(k)}{dz_3'} & \overset{(k+1)}{dz_3''} & \overset{(k+2)}{dz_3''} \ldots \overset{(n-1)}{dz_3''} \\ \cdot & \cdot & \cdot \ldots \cdot & \cdot & \cdot \ldots \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \ldots \cdot & \cdot & \cdot \ldots \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \ldots \cdot & \cdot & \cdot \ldots \cdot \\ z_n''-z_n' & -\overset{(1)}{dz_n'} & -\overset{(2)}{dz_n'} \ldots -\overset{(k)}{dz_n'} & \overset{(k+1)}{dz_n''} & \overset{(k+2)}{dz_n''} \ldots \overset{(n-1)}{dz_n''} \end{vmatrix}}{\sqrt{(z_1''-z_1')^2+(z_2''-z_2')^2+(z_3''-z_3')^2+\ldots+(z_n''-z_n')^2}^{\,n}} \tag{45}$$

Die Integration erstreckt sich dabei für die Variabeln $z_1' \ldots z_n'$ über die Mannigfaltigkeit $M_k'$, für die Variabeln $z_1'' \ldots z_n''$ über die Mannigfaltigkeit $M''_{n-k-1}$. $\tilde{\omega}_{n-1}$ bezeichnet die $n-1$-dimensionale Oberfläche der „Kugel" vom Radius 1

$$z_1^2 + z_2^2 + \ldots + z_n^2 = 1.$$

Ehe wir zeigen, dass durch dieses Integral, ausgedehnt über zwei geschlossene Mannigfaltigkeiten, eine ganze Zahl dargestellt wird, betrachten wir die Bedeutung des unter dem Integralzeichen stehenden Ausdruckes.

Ausgehend vom Punkte

$$z_1', \quad z_2', \quad z_3' \quad \ldots \quad z_n'$$

der $M_k'$ sind auf dieser Mannigfaltigkeit in bestimmter Reihenfolge $k$ Nachbarpunkte:

$$z_1' + \overset{(i)}{dz_1'}, \quad z_2' + \overset{(i)}{dz_2'} \quad z_3' + \overset{(i)}{dz_3'} \ldots z_n' + \overset{(i)}{dz_n'} \quad i = 1, 2, \ldots k$$

angenommen. Ebenso, vom Punkte

$$z_1'', \quad z_2'', \quad z_3'', \quad \ldots \quad z_n''$$

der $M''_{n-k-1}$ ausgehend, auf dieser $n-k-1$ Nachbarpunkte

$$z_1'' + \overset{(j)}{dz_1''} \quad z_2'' + \overset{(j)}{dz_2''} \quad z_3'' + \overset{(j)}{dz_3''} \ldots \quad z_n'' + \overset{(j)}{dz_n''} \quad j = k+1, \ldots n-1.$$

Diese $n+1$ Punkte bilden die Eckpunkte eines dem Tetraeder im dreidimensionalen Raume analogen Körpers im $L_n$, welchen wir analog wie das Tetraeder zum Parallelepiped zu einem parallelepipedischen Element $do$, dessen Eckpunkte sich aus den oben gegebenen durch Addition der Coordinaten ergeben, ergänzen können. Der Inhalt dieses Körpers ist durch die Zählerdeterminante des unter dem Integralzeichen stehenden Ausdruckes dargestellt. Die in der $M'_k$ liegende Gruppe von $k+1$ Punkten bestimmt dabei ein parallelepipedisches Element der $M'_k$, $do'_k$, und ebenso die in der $M''_{n-k-1}$ liegende Gruppe von $n-k$ Punkten ein solches Element $do''_{n-k-1}$ dieser Mannigfaltigkeit. Im Nenner des Ausdruckes steht die (absolut zu nehmende) $n^{\text{te}}$ Potenz der Entfernung $r$ der beiden Elemente $do'_k$ und $do''_{n-k-1}$ von einander, die wir auch als den Inhalt des „$n$ dimensionalen Würfels" von der Kantenlänge $r$ deuten können.

Für die Integration über die beiden Mannigfaltigkeiten setzen wir in Analogie mit der für das Gauss'sche Integral zu beachtenden Bestimmung fest, dass die Elemente

46') $$do'_k = \sqrt{\begin{Vmatrix} \overset{(1)}{dz'_1} & \overset{(1)}{dz'_2} & \overset{(1)}{dz'_3} & \dots & \overset{(1)}{dz'_n} \\ \overset{(2)}{dz'_1} & \overset{(2)}{dz'_2} & \overset{(2)}{dz'_3} & \dots & \overset{(2)}{dz'_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \overset{(k)}{dz'_1} & \overset{(k)}{dz'_2} & \overset{(k)}{dz'_3} & \dots & \overset{(k)}{dz'_n} \end{Vmatrix}^2}$$

und

46'') $$do''_{n-k-1} = \sqrt{\begin{Vmatrix} \overset{(k+1)}{dz''_1} & \overset{(k+1)}{dz''_2} & \overset{(k+1)}{dz''_3} & \dots & \overset{(k+1)}{dz''_n} \\ \overset{(k+2)}{dz''_1} & \overset{(k+2)}{dz''_2} & \overset{(k+2)}{dz''_3} & \dots & \overset{(k+2)}{dz''_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \overset{(n-1)}{dz''_1} & \overset{(n-1)}{dz''_2} & \overset{(n-1)}{dz''_3} & \dots & \overset{(n-1)}{dz''_n} \end{Vmatrix}^2}$$

der $M_k'$ bezw. $M_{n-k-1}''$ in unserem ganzen Gebiete niemals verschwinden sollen, dass also niemals gleichzeitig die sämmtlichen Unterdeterminanten einer der Matrices Null sein sollen.[1]) (Vergl. die Bemerkung auf pag. 452).

Das Vorzeichen der Determinante im Zähler unseres Integrals unterscheidet dann in analoger Weise wie im Gebiete von drei Dimensionen zwei wesentlich verschiedene Lagen der Elemente $do_k'$ und $do_{n-k-1}''$ gegen einander, die wir in Analogie mit der dort gegebenen geometrischen Vorstellung als „im entgegengesetzten Sinne windend“ bezeichnen wollen. Wesentlich ist dabei der durch die Reihenfolge der $k$ bezw. $n-k-1$ Fortschreitungsrichtungen (die durch die $d\overset{(i)}{z}{}'$ bezw. $d\overset{(j)}{z}{}''$ definirt sind) in die Elemente $do_k'$ und $do_{n-k-1}''$ gelegte Sinn. Dieser Richtungssinn ergiebt sich für die ganze Mannigfaltigkeit $M_k'$ bezw. $M_{n-k-1}''$ in eindeutig bestimmter Weise, wenn er für ein bestimmtes, aber übrigens beliebiges Element von $M_k'$ bezw. $M_{n-k-1}''$ festgelegt ist. Man vergleiche für diese Festlegung die Formeln (49) und (64).

Durch unsere Annahmen über die Möglichkeit der eindeutigen Festlegung des Richtungssinnes schliessen wir die sogenannten „Doppelmannigfaltigkeiten“, bei welchen man in dem hier entwickelten Sinne von einer Windungszahl nicht sprechen kann, von der gegenwärtigen Betrachtung aus.

Es ist noch folgender Umstand bemerkenswerth: Wir konnten dem positiven und negativen Vorzeichen der Determinante in Formel (45) im Falle zweier Raumcurven eine ganz bestimmte Lagenbeziehung der beiden gerichteten Elemente $do_1'$ und $do_1''$ der Raumcurven an die Seite stellen

1) Es genügt übrigens schon, anzunehmen, dass die Unterdeterminanten je einer der beiden Matrices in (46') und (46'') nicht sämmtlich zugleich für Gebiete von $k-1$ bezw. von $n-k-2$ Dimensionen auf $M_k'$ bezw. $M_{n-k-1}''$ verschwinden.

(Fig. 1 und 2, pag. 452), welche gegenseitig umkehrbar war.

Im Falle zweier Mannigfaltigkeiten von $k$ bezw. $n-k-1$ Dimensionen ist diese Beziehung nicht mehr in allen Fällen eine gegenseitig umkehrbare.

Vertauschen wir nämlich in der Formel (45) die beiden Mannigfaltigkeiten $M'_k$ und $M''_{n-k-1}$ miteinander, so erhält, wenn wir die Reihenfolge der Linienelemente auf beiden festhalten, die Determinante das Vorzeichen

$$(-1)^{n \cdot n-k},$$

die Determinante behält also bei der Vertauschung das Vorzeichen, wenn

$n$ gerade, $k$ gerade oder ungerade
$n$ ungerade, $k$ ungerade

ist; d. h. in diesen Fällen ist die Windung des Elementes $do'_k$ gegen das Element $do''_{n-k-1}$ dieselbe, wie die Windung des Elementes $do''_{n-k-1}$ gegen $do'_k$. Dagegen wechselt für

$n$ ungerade, $k$ gerade

die Determinante ihr Vorzeichen, d. h. die Windung des Elementes $do'_k$ gegen $do''_{n-k-1}$ ist entgegengesetzt gleich der Windung des Elementes $do''_{n-k-1}$ gegen $do'_k$. Die Windungszahl der geschlossenen Mannigfaltigkeiten selbst wechselt also für ungerades $n$ und gerades $k$ bei der Vertauschung derselben ihr Vorzeichen.

## § 7.

### Formeln für die Windungszahl unter Voraussetzung einer Parameterdarstellung für die beiden Mannigfaltigkeiten.

Wir legen analog wie für die beiden Raumcurven jetzt für unsere Mannigfaltigkeiten $M'_k$ und $M''_{n-k-1}$ eine Parameterdarstellung zu Grunde durch die Gleichungssysteme:

$$
47') \qquad
\begin{aligned}
z_1' &= \varphi_1(\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_k),\\
z_2' &= \varphi_2(\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_k),\\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
z_n' &= \varphi_n(\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_k),
\end{aligned}
$$

beziehungsweise:

$$
47'') \qquad
\begin{aligned}
z_1'' &= \psi_1(\lambda_{k+1}, \lambda_{k+2}, \ldots \lambda_{n-1}),\\
z_2'' &= \psi_2(\lambda_{k+1}, \lambda_{k+2}, \ldots \lambda_{n-1}),\\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
z_n'' &= \psi_n(\lambda_{k+1}, \lambda_{k+2}, \ldots \lambda_{n-1}),
\end{aligned}
$$

in welchen die Functionen $\varphi$ bez. $\psi$ wieder als eindeutige reelle Functionen der reellen, von einander unabhängigen Veränderlichen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_k$; $\lambda_{k+1}, \lambda_{k+2}, \ldots \lambda_{n-1}$ vorausge-gesetzt sind.

Wählen wir jetzt zum Punkte $z_\mu'$ auf $M_k'$ gerade die $k$ Nachbarpunkte $z_\mu' + \overset{(i)}{d} z_\mu'$, welche entstehen, wenn wir nur je einen der Parameter $\lambda_\mu$ um den positiven Betrag $d\lambda_\mu$ ändern und verfahren in gleicher Weise im Punkte $z_\nu''$ auf $M_{n-k-1}''$, so setzt sich unser obiges Integral (45) direct um in die Form:

$$
48) \quad V = \frac{1}{\tilde{\omega}_{n-1}} \cdot \iint\limits_{M_{n-k-1}''\, M_k'} \frac{\begin{vmatrix}
\psi_1 - \varphi_1 & -\varphi_{11} \cdots -\varphi_{1k} & \psi_{1k+1} \cdots \psi_{1n-1}\\
\psi_2 - \varphi_2 & -\varphi_{21} \cdots -\varphi_{2k} & \psi_{2k+1} \cdots \psi_{2n-1}\\
\cdot & \cdot \ \cdots \ \cdot & \cdot \ \cdots \ \cdot\\
\cdot & \cdot \ \cdots \ \cdot & \cdot \ \cdots \ \cdot\\
\psi_n - \varphi_n & -\varphi_{n1} \cdots -\varphi_{nk} & \psi_{nk+1} \cdots \psi_{nn-1}
\end{vmatrix}}{\sqrt{(\psi_1 - \varphi_1)^2 + (\psi_2 - \varphi_2)^2 + \ldots + (\psi_n - \varphi_n)^2}^{\,n}} \cdot d\lambda_1 \ldots d\lambda_{n-1},
$$

in welcher die den $\varphi$ bez. $\psi$ angefügten zweiten Indices die nach dem entsprechenden Parameter $\lambda$ genommenen Differentialquotienten bezeichnen. Die Integration erstreckt sich dabei über die sämmtlichen absolut zu nehmenden Elemente der beiden Mannigfaltigkeiten $M'_k$ und $M''_{n-k-1}$, für welche die Formeln gelten:

$$49') \qquad d o'_k = \sqrt{\begin{vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{21} & \cdots & \varphi_{n1} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \varphi_{1k} & \varphi_{2k} & \cdots & \varphi_{nk} \end{vmatrix}^2} \cdot d\lambda_1 \, d\lambda_2 \ldots d\lambda_k,$$

beziehungsweise

$$49'') \qquad d o''_{n-k-1} = \sqrt{\begin{vmatrix} \psi_{1k+1} & \psi_{2k+1} & \cdots & \psi_{nk+1} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \psi_{1n-1} & \psi_{2n-1} & \cdots & \psi_{nn-1} \end{vmatrix}^2} \cdot d\lambda_{k+1} \, d\lambda_{k+2} \ldots d\lambda_{n-1};$$

wir verfügen dabei über die Richtung der Elemente für die Integration so, dass wir im Sinne der wachsenden $\lambda$ integriren; die $d\lambda$ sind also stets positiv. Die Integration ist an Grenzbedingungen nicht geknüpft.

Formel (48) kennzeichnet somit, nach den im I. Theil der Beiträge gegebenen Entwicklungen (Formel (12) auf pag. 266) die Zahl $V$ als Kronecker'sche Charakteristik des Systems der $n$ Functionen:

$$50) \qquad \psi_1 - \varphi_1, \quad \psi_2 - \varphi_2, \quad \ldots \quad \psi_n - \varphi_n$$

der $n-1$ Variabeln $\lambda_1, \ldots \lambda_k, \lambda_{k+1} \ldots \lambda_{n-1}$. $V$ ist daher auch stets eine ganze Zahl, die wir eben als Windungszahl bezeichnen.

Führen wir nun in Analogie mit unseren früheren Formeln (8) die durch die Gleichungen

$$51)\qquad \begin{aligned} z_1 &= \psi_1(\lambda_{k+1}, \ldots \lambda_{n-1}) - \varphi_1(\lambda_1, \ldots \lambda_k), \\ z_2 &= \psi_2(\lambda_{k+1}, \ldots \lambda_{n-1}) - \varphi_2(\lambda_2, \ldots \lambda_k), \\ &\ldots\ldots \\ z_n &= \psi_n(\lambda_{k+1}, \ldots \lambda_{n-1}) - \varphi_n(\lambda_1, \ldots \lambda_k) \end{aligned}$$

definirte $n-1$ dimensionale Mannigfaltigkeit ein,[1]) so folgt auch hier der Satz:

Die Zahl der gegenseitigen Umwindungen der in (47) dargestellten Mannigfaltigkeiten $M'_k$ und $M''_{n-k-1}$ ist gleich der Zahl der Windungen der Mannigfaltigkeit (51) um den Nullpunkt.

Die Zahl $V$ lässt sich nunmehr als Charakteristik des Functionensystems (50) im Anschluss an die in den „Beiträgen I" entwickelten Formeln weiter darstellen durch ein $n-2$-faches, $n-3$-faches, ... einfaches Integral und durch eine Summenformel, und es ergeben sich hieraus neue Methoden für die Herleitung der Windungszahl in Analogie mit den in § 2 für zwei Raumcurven gegebenen. Es ist nicht uninteressant, deren Bedeutung im Einzelnen näher zu verfolgen[2]); wir greifen aber im Gegenwärtigen von dieser

---

1) Die Mannigfaltigkeit $M_{n-1}$ (51) kann dabei analog wie die Fläche (8) in übersichtlicher Weise entstanden gedacht werden dadurch, dass man durch den Nullpunkt des Coordinatensystems Strahlen parallel zu den $(n-1)$-fach unendlich vielen zwischen den beiden Mannigfaltigkeiten zu ziehenden Sehnen zieht und auf diesen je die Längen dieser Sehnen, gemessen in der Richtung von der ersten zur zweiten Mannigfaltigkeit, abschneidet. Andererseits kann, analog wie dort, $M_{n-1}$ auch entstanden gedacht werden als „Translationsmannigfaltigkeit", die sich auf eine zur $M''_{n-k-1}: z''_i = \psi_i(\lambda_{k+1} \ldots \lambda_{n-1})$ congruente und auf eine zweite aus der $M'_k$ durch „Spiegelung am Nullpunkt" entstandene Mannigfaltigkeit $z_i = -\varphi_i(\lambda_1 \ldots \lambda_k)$ als Leitgebilde bezieht.

2) Man vergleiche für eine weitere Deutung der hierher gehörigen Formeln auch die Schlussbemerkungen des § 9.

ganzen Reihe der Darstellungen von $V$ nur das letzte Glied, die Summenformel, heraus, auf welche wir in der Folge noch einzugehen haben.

Die Summenformel, in ihrer doppelten Gestalt, lautet:

52a)
$$V=(-1)^{n-1}\sum \text{sign.}\left\{\begin{vmatrix} -\varphi_{11} & -\varphi_{12} & \cdots & -\varphi_{1k} & \psi_{1\,k+1} & \cdots & \psi_{1\,n-1} \\ -\varphi_{21} & -\varphi_{22} & \cdots & -\varphi_{2k} & \psi_{2\,k+1} & \cdots & \psi_{2\,n-1} \\ . & . & \cdots & . & . & \cdots & . \\ . & . & \cdots & . & . & \cdots & . \\ -\varphi_{n-1\,1} & -\varphi_{n-1\,2} & \cdots & -\varphi_{n-1\,k} & \psi_{n-1\,k+1} & \cdots & \psi_{n-1\,n-1} \end{vmatrix}\right\}$$

oder

52b)
$$V=(-1)^{n-1}\frac{1}{2}\sum \text{sign.}\left\{(\psi_n-\varphi_n)\cdot\begin{vmatrix} -\varphi_{11} & -\varphi_{12} & \cdots & -\varphi_{1k} & \psi_{1\,k+1} & \cdots & \psi_{1\,n-1} \\ -\varphi_{21} & -\varphi_{22} & \cdots & -\varphi_{2k} & \psi_{2\,k+1} & \cdots & \psi_{2\,n-1} \\ . & . & \cdots & . & . & \cdots & . \\ . & . & \cdots & . & . & \cdots & . \\ -\varphi_{n-1\,1} & -\varphi_{n-1\,2} & \cdots & -\varphi_{n-1\,k} & \psi_{n-1\,k+1} & \cdots & \psi_{n-1\,n-1} \end{vmatrix}\right\}$$

die erste Summe ausgedehnt über alle Punkte, für welche

$$\psi_1-\varphi_1=0,\quad \psi_2-\varphi_2=0,\ \ldots\ \psi_{n-1}-\varphi_{n-1}=0,\quad \psi_n-\varphi_n>0$$

ist, die zweite ausgedehnt über alle Punkte

$$\psi_1-\varphi_1=0,\qquad \psi_2-\varphi_2=0,\ \ldots\ \psi_{n-1}-\varphi_{n-1}=0.$$

Wir können diese Punkte in geometrischer Sprechweise bezeichnen als die scheinbaren Doppelpunkte, welche die Ansicht der beiden im linearen Raume $L_n$ der $z_1 \ldots z_n$ gelegenen Mannigfaltigkeiten $M'_k$ und $M''_{n-k-1}$ gesehen in der Richtung der Axe $z_n$ darbietet. Das Vorzeichen des Factors $(\psi_n - \varphi_n)$ an jeder dieser Stellen besagt uns, welche der beiden Mannigfaltigkeiten dort dem Beschauer, den wir wieder im Punkte $z_n = +\infty$, $z_1 = z_2 \ldots z_{n-1} = 0$ aufgestellt denken, näher liegt. Das Vorzeichen des zweiten Factors trennt die scheinbaren Doppelpunkte nach dem Sinne der $n-1$ Fortschreitungsrichtungen auf $M'_k$ bez. $M''_{n-k-1}$. Dabei gilt für die Gesammtheit aller scheinbaren Doppelpunkte die Kronecker'sche Formel:

$$53) \quad \sum \text{sign.} \left\{ \begin{vmatrix} -\varphi_{11} & \cdots & -\varphi_{1k} & \psi_{1\,k+1} & \cdots & \psi_{1\,n-1} \\ -\varphi_{21} & \cdots & -\varphi_{2k} & \psi_{2\,k+1} & \cdots & \psi_{2\,n-1} \\ . & \cdots & . & . & \cdots & . \\ . & \cdots & . & . & \cdots & . \\ -\varphi_{n-1\,1} & \cdots & -\varphi_{n-1\,k} & \psi_{n-1\,k+1} & \cdots & \psi_{n-1\,n-1} \end{vmatrix} \right\} = 0,$$

die Summe ausgedehnt über alle scheinbaren Doppelpunkte

$$\psi_1 - \varphi_1 = 0, \quad \psi_2 - \varphi_2 = 0 \ \ldots \ \psi_{n-1} - \varphi_{n-1} = 0,$$

eine Formel, welche die Ueberführung der Formeln (52a) und (52b) in einander vermittelt.

## § 8.

### Formeln für die Windungszahl der Mannigfaltigkeiten unter Voraussetzung ihrer Darstellung durch Gleichungssysteme zwischen den Coordinaten. Beweis der Uebereinstimmung der in § 7 und 8 gewonnenen Zahlen.

Gehen wir nunmehr von der Darstellung der beiden Mannigfaltigkeiten $M'_k$ und $M''_{n-k-1}$ durch Gleichungssysteme in den Coordinaten $z_i$ aus. Es sei die $M''_{n-k-1}$ gegeben durch die $(k+1)$ Gleichungen:

$$
54'')\quad
\begin{array}{l}
F_0(z_1, z_2, \ldots z_n) = 0, \\
F_1(z_1, z_2, \ldots z_n) = 0, \\
\quad \cdots\cdots \\
\quad \cdots\cdots \\
F_k(z_1, z_2, \ldots z_n) = 0,
\end{array}
$$

und analog die $M'_k$ durch die $(n-k)$ Gleichungen

$$
54')\quad
\begin{array}{l}
F_{k+1}(z_1, z_2, \ldots z_n) = 0, \\
F_{k+2}(z_1, z_2, \ldots z_n) = 0, \\
\quad \cdots\cdots \\
\quad \cdots\cdots \\
F_n\ \ (z_1, z_2, \ldots z_n) = 0.
\end{array}
$$

Es lässt sich dann auch hier, wie im Falle zweier Raumcurven das in Formel (45) gegebene Integral für die Windungszahl nicht allgemein aufstellen. Man erhält aber analog wie dort den Satz:

Die gegenseitige Windungszahl der beiden durch die Gleichungen (54″) und (54′) definirten Mannigfaltigkeiten ist gleich der Kronecker'schen Charakteristik $K$ der in dem Gleichungssystem enthaltenen $(n+1)$ Functionen

$$55)\quad F_0, F_1, F_2, \ldots F_n$$

der $n$ Variabeln $z_1, z_2, \ldots z_n$.

Der Beweis dieses Satzes ergiebt sich genau den Darlegungen des § 4 entsprechend, wenn wir anknüpfen an die Darstellung der Zahl $K$ durch die Summenformel:

$$
56)\quad K = (-1)^n \cdot \sum \text{sign.} \left\{ \begin{vmatrix}
F_{01} & F_{02} & \ldots & F_{0n} \\
F_{11} & F_{02} & \ldots & F_{1n} \\
. & . & \ldots & . \\
. & . & \ldots & . \\
F_{n-11} & F_{n-12} & \ldots & F_{n-1n}
\end{vmatrix} \right\},
$$

die Summe erstreckt über alle Punkte, für welche

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 0, \quad \ldots \quad F_{n-1} = 0, \quad F_n > 0$$

ist, und diese mit der in Formel (52a) gegebenen Darstellung der Zahl $V$ vergleichen.

Verschieben wir, etwa in Richtung der Axe $z_n$, die Mannigfaltigkeit $M''_{n-k-1}$, so ändern sich die Zahlen $V$ und $K$ sprungweise an den Stellen, in welchen die bewegte $M''_{n-k-1}$ die feste $M'_k$ durchsetzt. Wir beginnen nunmehr die Abzählung dieser Aenderungen von einer Lage der $M''_{n-k-1}$ an, in welcher diese völlig getrennt von der $M'_k$ erscheint. Es lässt sich eine solche Lage, wenn wir voraussetzen, dass beide Mannigfaltigkeiten ganz im Endlichen liegen, stets durch eine endliche Verschiebung der $M''_{n-k-1}$ (die wir hier in Richtung der negativen Axe $z_n$ vornehmen) erreichen. In dieser Anfangslage ist $V$ sowohl wie $K$ gleich Null. Die Aenderungen der Zahl $V$ zwischen der Anfangs- und Endlage führen unmittelbar zu den Formeln (52) für $V$.

Aus den Aenderungen der Zahl $K$ aber ergiebt sich (ganz entsprechend den Entwicklungen auf pag. 472–475) die folgende neue Formel:

$$57)\qquad K = (-1)^{n+1} \cdot \sum \text{sign.} \left\{ \begin{vmatrix} F_{01} & F_{02} & \ldots & F_{0\,n-1} & 0 & F_{0\,n} \\ F_{11} & F_{12} & \ldots & F_{1\,n-1} & 0 & F_{1\,n} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \cdot \\ F_{k\,1} & F_{k\,2} & \ldots & F_{k\,n-1} & 0 & F_{k\,n} \\ F_{k+1\,1} & F_{k+1\,2} & \ldots & F_{k+1\,n-1} & F_{k+1\,n} & 0 \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \cdot \\ F_{n\,1} & F_{n\,2} & \ldots & F_{n\,n-1} & F_{n\,n} & 0 \end{vmatrix} \right\},$$

die Summe erstreckt über alle Punkte, für welche

$$F_0(z_1, z_2, \ldots z_n + C) = 0,\ F_1(z_1, z_2, \ldots z_n + C) = 0, \ldots,\ F_k(z_1, z_2, \ldots z_n + C) = 0,$$
$$F_{k+1}(z_1, z_2, \ldots z_n) = 0 \ \ldots\ F_n(z_1, z_2, \ldots z_n) = 0$$

und $C > 0$ ist, eine Formel, welche $K$ als Kronecker'sche Charakteristik des Systems der Functionen

$$\text{58)} \quad \begin{array}{l} F_0(z_1, z_2, \ldots z_n + C), \ \ldots\ F_k(z_1, z_2, \ldots z_n + C), \\ F_{k+1}(z_1, z_2, \ldots z_n), \ldots \quad F_n(z_1, z_2, \ldots z_n), \quad C \end{array}$$

mit den Variabeln $z_1, z_2, \ldots z_n, C$ darstellt.

Nunmehr aber lassen sich die Formeln (52) und (57) für die Zahlen $V$ und $K$ direct mit einander vergleichen; sie beziehen sich beide auf die „scheinbaren Doppelpunkte“, welche die Mannigfaltigkeiten $M_k'$ und $M_{n-k-1}''$ gesehen in Richtung der Axe $z_n$ darbieten und unterscheiden dieselben in derselben Weise nach dem Vorzeichen der Inhaltsdeterminante:

$$\text{59)} \quad \Delta_{n-1} = \begin{vmatrix} -\overset{(1)}{dz_1'} & -\overset{(2)}{dz_1'} & \ldots & -\overset{(k)}{dz_1'} & \overset{(k+1)}{dz_1''} & \ldots & \overset{(n-1)}{dz_1''} \\ -\overset{(1)}{dz_2'} & -\overset{(2)}{dz_2'} & \ldots & -\overset{(k)}{dz_2'} & \overset{(k+1)}{dz_2''} & \ldots & \overset{(n-1)}{dz_2''} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ -\overset{(1)}{dz_{n-1}'} & -\overset{(2)}{dz_{n-1}'} & \ldots & -\overset{(k)}{dz_{n-1}'} & \overset{(k+1)}{dz_{n-1}''} & \ldots & \overset{(n-1)}{dz_{n-1}''} \end{vmatrix},$$

der linearen $n-1$-dimensionalen Configuration, welche sich aus der Projection der $k$ bez. $n-k-1$ Linienelemente der $M_k'$ bez. $M_{n-k-1}''$ in die Coordinatenmannigfaltigkeit $z_1, z_2, \ldots z_{n-1}$ (durch Orthogonalprojection in Richtung der Axe $z_n$) ergiebt.

Für die obige Inhaltsdeterminante erhält man nämlich zunächst in den $\varphi$, $\psi$ geschrieben die Formel:

$$60)\quad \Delta_{n-1} = \begin{vmatrix} -\varphi_{11} & -\varphi_{12} & \cdots & -\varphi_{1k} & \psi_{1\,k+1} & \cdots & \psi_{1\,n-1} \\ -\varphi_{21} & -\varphi_{22} & \cdots & -\varphi_{2k} & \psi_{2\,k+1} & \cdots & \psi_{2\,n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ -\varphi_{n-1\,1} & -\varphi_{n-1\,2} & \cdots & -\varphi_{n-1\,k} & \psi_{n-1\,k+1} & \cdots & \psi_{n-1\,n-1} \end{vmatrix} d\lambda_1 d\lambda_2 \ldots d\lambda_k d\lambda_{k+1} \ldots d\lambda_{n-1}.$$

Für die Umsetzung in eine in den Functionen $F$ geschriebene Formel beachte man, dass die Matrix

$$61')\quad \begin{Vmatrix} -\overset{(1)}{dz'_1} & -\overset{(1)}{dz'_2} & \cdots & -\overset{(1)}{dz'_{n-1}} & -\overset{(1)}{dz'_n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ -\overset{(k)}{dz'_1} & -\overset{(k)}{dz'_2} & \cdots & -\overset{(k)}{dz'_{n-1}} & -\overset{(k)}{dz'_n} \end{Vmatrix}$$

correspondirende Matrix ist zu

$$62')\quad \begin{Vmatrix} F_{k+1\,1}, & F_{k+1\,2} & \cdots & F_{k+1\,n-1} & F_{k+1\,n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ F_{n1} & F_{n2} & \cdots & F_{n\,n-1} & F_{nn} \end{Vmatrix}$$

und ebenso die Matrix

$$61'')\quad \left\| \begin{array}{ccccc} \overset{(k+1)}{dz_1''} & \overset{(k+1)}{dz_2''} & \dots & \overset{(k+1)}{dz_{n-1}''} & \overset{(k+1)}{dz_n''} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \overset{(n-1)}{dz_1''} & \overset{(n-1)}{dz_2''} & \dots & \overset{(n-1)}{dz_{n-1}''} & \overset{(n-1)}{dz_n''} \end{array} \right\|$$

correspondirende Matrix zu

$$62'')\quad \left\| \begin{array}{ccccc} F_{01} & F_{02} & \dots & F_{0\,n-1} & F_{0\,n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ F_{k1} & F_{k2} & \dots & F_{k\,n-1} & F_{k\,n} \end{array} \right\|.$$

Führt man dann in der Mannigfaltigkeit $M_k'$ etwa die Coordinaten $z_{i_1}, z_{i_2}, \dots z_{i_k}$, in der Mannigfaltigkeit $M''_{n-k-1}$ die Coordinaten $z_{j_1}, z_{j_2}, \dots z_{j_{n-k-1}}$ als unabhängige Variable ein, wählt die $k$, bez. $n-k-1$ Fortschreitungsrichtungen auf diesen Mannigfaltigkeiten so, dass jeweils nur eine der obigen unabhängigen Coordinaten sich ändert, während dann die abhängigen Coordinaten den Gleichungen

$$F_{\sigma i} + \sum_{\mu=i_{k+1}}^{\mu=i_n} F_{\sigma\mu} \frac{\partial z'_\mu}{\partial z'_i} = 0,$$

$$\sigma = k+1, \dots n, \qquad i = i_1, i_2, \dots i_k,$$

beziehungsweise

$$F_{\tau j} + \sum_{\nu=j_{n-k}}^{\nu=j_n} F_{\tau\nu} \frac{\partial z''_\nu}{\partial z''_j} = 0,$$

$$\tau = 0, 1, \dots k, \qquad j = j_1, j_2, \dots j_{n-k-1},$$

entsprechend sich ändern, bezeichnet endlich $D_i$ bez. $D_j$ die Determinante der $F$, welche durch Streichung der Verticalreihen $i_1, i_2 \ldots i_k$ in der Matrix (62'), beziehungsweise der Reihen $j_1, j_2 \ldots j_{n-k-1}$ in der Matrix (62") entsteht, so folgt für die $n-1$ gliedrige Determinante (59) der $dz$ in den $F$ geschrieben die Formel:

63)
$$\Delta_{n-1} = (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} F_{01} & F_{02} & \ldots & F_{0\,n-1} & 0 & F_{0n} \\ F_{11} & F_{12} & \ldots & F_{1\,n-1} & 0 & F_{1n} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \cdot \\ F_{k1} & F_{k2} & \ldots & F_{k\,n-1} & 0 & F_{kn} \\ F_{k+1\,1} & F_{k+1\,2} & \ldots & F_{k+1\,n-1} & F_{k+1\,n} & 0 \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \cdot \\ F_{n1} & F_{n2} & \ldots & F_{n\,n-1} & F_{nn} & 0 \end{vmatrix} .$$

$$\cdot \frac{dz'_{i_1}\, dz'_{i_2} \ldots dz'_{i_k}}{D_i} \cdot \frac{dz''_{j_1}\, dz''_{j_2} \ldots dz''_{j_{n-k-1}}}{D_j} .$$

Nun hat man aber für die positiv zu nehmenden Elemente der beiden Mannigfaltigkeiten die Formeln:

64')
$$do'_k = \sqrt{\begin{Vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{21} & \ldots & \varphi_{n1} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \varphi_{1k} & \varphi_{2k} & \ldots & \varphi_{nk} \end{Vmatrix}^2} \cdot d\lambda_1\, d\lambda_2 \ldots d\lambda_k =$$

$$= \sqrt{\begin{Vmatrix} F_{k+1\,1} & F_{k+1\,2} & \ldots & F_{k+1\,n} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ F_{n1} & F_{n2} & \ldots & F_{nn} \end{Vmatrix}^2} \cdot \frac{dz'_{i_1}\, dz'_{i_2} \ldots dz'_{i_k}}{D_i},$$

und

64″)
$$do''_{n-k-1} = \sqrt{\begin{vmatrix} \psi_{1\,k+1} & \psi_{2\,k+1} & \cdots & \psi_{n\,k+1} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \psi_{1\,n-1} & \psi_{2\,n-1} & \cdots & \psi_{n\,n-1} \end{vmatrix}^2} \cdot d\lambda_{k+1} \ldots d\lambda_{n-1} =$$

$$= \sqrt{\begin{vmatrix} F_{01} & F_{02} & \cdots & F_{0n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ F_{k1} & F_{k2} & \cdots & F_{kn} \end{vmatrix}^2} \cdot \frac{dz''_{j_1}\, dz''_{j_2} \ldots dz''_{j_{n-k-1}}}{D_j}.$$

Der Vergleich dieser Ausdrücke ergiebt, dass einer Summation, in welcher die Elemente $d\lambda_1 \ldots d\lambda_k$ bezw. $d\lambda_{k+1} \ldots d\lambda_{n-1}$ stets positiv genommen sind, eine Summation entspricht, für welche die Ausdrücke

$$\frac{dz'_{i_1}\, dz'_{i_2} \ldots dz'_{i_k}}{D_i} \quad \text{beziehungsweise} \quad \frac{dz''_{j_1}\, dz''_{j_2} \ldots dz''_{j_{n-k-1}}}{D_j}$$

stets positiv gerechnet werden.[1]) Hieraus aber folgt durch Vergleich der Formeln (63) und (60), dass für alle Elemente der Summation das Vorzeichen der Determinante (59) in den $dz$ übereinstimmt mit dem der Determinante (60) in den $\varphi$, $\psi$ und mit dem der Determinante (63) in den $F$.

Daraus aber folgt die Identität der durch die Formeln (52) und (57) gewonnenen Zahlen $V$ und $K$ und damit der zu Eingang des Paragraphen aufgestellte Satz.

---

1) Das aus diesen Formeln für die Mannigfaltigkeiten abzuleitende „Fortgangsprincip“ erweist sich als Verallgemeinerung des von Kronecker in der Abh. vom März 1869 (vergl. auch diese Abh. S. 473, Anm.) gegebenen, worauf ich in einer folgenden Note noch näher einzugehen gedenke.

## § 9.

### Folgerungen. Schlussbemerkungen.

Der hiermit gewonnene Satz über die Bedeutung der Kronecker'schen Charakteristik der Functionen

$$F_0, \; F_1, \; \ldots \; F_n$$

als Windungszahl zweier Mannigfaltigkeiten $M'_k$ und $M''_{n-k-1}$, die durch Nullsetzen von $n-k$ bez. von $k+1$ der obigen Functionen gewonnen werden, lässt nun die Bedeutung der Zahl $K$ für dieses Functionensystem in ganz allgemeiner Weise übersehen:

Wie wir auch das System der $n+1$ Functionen von $n$ Variabeln $z$ in zwei Theile zerlegen, stets definiren die gleich Null gesetzten Functionen der beiden Theile zwei sich ergänzende Mannigfaltigkeiten von $k$ bez. von $n-k-1$ Dimensionen, deren Windungszahl stets dieselbe, und gleich der Kronecker'schen Charakteristik $K$ des Functionensystems ist. Für $k=0$ erhalten wir ein System von Punkten in Verbindung mit einer Mannigfaltigkeit von $n-1$ Dimensionen[1]), für $k=1$ eine lineare Mannigfaltigkeit und eine $n-2$-dimensionale u. s. w.

Im zweidimensionalen Raume handelt es sich um die Windung von Linien um Punkte, im dreidimensionalen Raume um die Windung von Flächen um Punkte, von Linien um Linien, im vierdimensionalen Raume um die Windung von dreidimensionalen Räumen um Punkte, von Flächen um Linien, im fünfdimensionalen Raume um die Windung von vierdimensionalen Räumen um Punkte, von dreidimensionalen Räumen um Linien, von Flächen um Flächen u. s. w.

---

1) Es erscheint in diesem Zusammenhange sinngemäss, auch von einer Windungszahl einer $(n-1)$-dimensionalen Mannigfaltigkeit um ein Punktsystem zu sprechen.

Dabei liefern die verschiedenen Möglichkeiten, die $n+1$ Functionen des Systems zu je 1 und $n$, zu 2 und $n-1$ u. s. w. abzutheilen im Ganzen $n+1$ verschiedene Punktsysteme, $\frac{n+1 \cdot n}{1 \cdot 2}$ Linien, allgemein $\binom{n+1}{k+1}$ $k$-dimensionale Mannigfaltigkeiten in Verbindung mit ihren complementären Mannigfaltigkeiten von $n-k-1$ Dimensionen, denen sämmtlich ein und dieselbe Windungszahl zukommt.

Diesen verschiedenen Möglichkeiten, die Zahl $K$ als Windungszahl zweier durch Zerlegung des Functionensystems

$$F_0, F_1, \ldots F_k \;\|\; F_{k+1}, \ldots F_n$$

hergestellten Mannigfaltigkeiten aufzufassen, entsprechen nun paarweise die verschiedenen Arten der Darstellung von $K$ durch bestimmte Integrale 0ter (Summenformel) bis $(n+1)$ter Ordnung, von denen wir im ersten Theile dieser Beiträge gehandelt haben.

Speciell bezieht sich die dort in (14) gegebene Kronecker'sche Summenformel, und ebenso andererseits das von Kronecker abgeleitete $(n-1)$-fache über $F_0 = 0$ ausgedehnte Integral auf die Deutung der Charakteristik als Windungszahl der $(n-1)$-dimensionalen Mannigfaltigkeit $F_0 = 0$ um das Punktsystem $F_1 = 0, \ldots F_n = 0$. Allgemein giebt das in Formel (26) der Beiträge I gegebene $(n-k-1)$-fache Integral und ein correspondirendes $k$-faches die Auffassung der Zahl $K$ als Windungszahl der Mannigfaltigkeiten

$$M''_{n-k-1}: \quad F_0 = 0, \quad F_1 = 0, \quad \ldots F_k = 0$$

und

$$M'_k \quad : \quad F_{k+1} = 0, \quad F_{k+2} = 0, \ldots \quad F_n = 0.$$

Es verdient dabei in diesem Zusammenhange nochmals der dort schon erwähnte Umstand hervorgehoben zu werden, dass das zur Berechnung der Windungszahl dienende $(n-k-1)$-fache Integral sich über die $M''_{n-k-1}$ als Grenze erstreckt, während der unter dem Integralzeichen stehende Ausdruck lediglich von den zur Definition der $M'_k$ dienenden Functionen abhängt. Mit Hülfe der in den dortigen Entwicklungen zu Grunde gelegten Deutung der Functionen $F$ als Coordinaten eines $(n+1)$-dimensionalen Raumes $x_0, x_1, \ldots x_n$ erhält dabei der unter dem Integralzeichen stehende Ausdruck die gerade für die Auffassung des Integrals als Windungszahl wesentliche Bedeutung als Differential eines $(n-k-1)$-dimensionalen „räumlichen Winkels".

Das $n$-fache, in Formel (12) der „Beiträge I" gegebene Integral für $K$ hat für die hier erörterte Theilung des Functionensystems der $F$ keine unmittelbare Bedeutung. Ein Integral dieser letzteren Art hat dagegen in den auf die Parameterdarstellung der beiden Mannigfaltigkeiten $M'_k$ und $M''_{n-k-1}$ bezüglichen Formeln (§ 7) den Uebergang der an die Kronecker'sche Charakteristik anknüpfenden Integrale zu der Gauss'schen Darstellung der Windungszahl vermittelt.

Umgekehrt kann man nun auch die Deutung der Zahl $K$ als Windungszahl zweier zusammengeordneter Mannigfaltigkeiten wieder anwenden auf das aus der Parameterdarstellung (Formel 47′ und 47″) gewonnene Functionensystem

$$50)\qquad \psi_1-\varphi_1,\quad \psi_2-\varphi_2,\quad \ldots\quad \psi_n-\varphi_n\,.$$

Betrachtet man nämlich die $n-1$ Parameter $\lambda_i$ als Coordinaten eines $(n-1)$-dimensionalen Raumes, so ergeben sich auch hier durch Nullsetzen je zweier sich ergänzender Gruppen von Functionen $\psi_i-\varphi_i$ einander zugeordnete Paare von Mannigfaltigkeiten, deren gegenseitige Windungszahl eben wieder unsere Zahl $K$ ist. Ich gehe indess hier nicht näher auf diese Entstehungsweise der Zahl $K$ ein.