Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Classe

der

k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.

Band XXVI. Jahrgang 1896.

München.
Verlag der K. Akademie.
1897.

In Commission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).

Sitzungsberichte

der

königl. bayer. Akademie der Wissenschaften.

Mathematisch-physikalische Classe.

Sitzung vom 4. Januar 1896.

1. Herr Robert Hartig bespricht: „Die Einwirkung der schwefligen Säure auf die Nadeln und die Gesundheit der Fichte.“ Die Abhandlung soll an einem anderen Ort veröffentlicht werden.

2. Herr Ferd. Lindemann legt eine Mittheilung des auswärtigen Mitgliedes der Classe, des Herrn Professors Aurel Voss in Würzburg: „Ueber die cogrediente Transformation der bilinearen Formen in sich selbst“ vor.

Ueber die cogrediente Transformation der bilinearen Formen in sich selbst.

Von A. Voss in Würzburg.

(*Eingelaufen 4. Januar.*)

Den von Herrn Lindemann[1]) in seiner Bearbeitung der Clebsch'schen Vorlesungen über Raumgeometrie für drei und vier homogene Variable bezeichneten Weg, alle linearen Transformationen einer quadratischen Form in sich zu bestimmen, hat Herr A. Loewy neuerdings in seiner Inauguraldissertation

[1]) Vgl. Vorlesungen über Geometrie von Clebsch-Lindemann, II, 1, S. 356—368; Ueber die Transformation einer quadratischen Form in sich selbst, von A. Loewy, Nova Acta der Leop. Carol. Academie, Bd. LXV.

für Formen von n Variabeln durchzuführen gesucht. Aber die so gewonnenen Formeln lassen weder die Anzahl der willkürlichen Parameter, noch die Analogie mit den Cayley'schen Formeln erkennen. Es ist daher vielleicht nicht ganz überflüssig, im Folgenden eine etwas einfachere Behandlung des Problems auszuführen, welche einerseits den Vortheil bietet, als eine unmittelbare Erweiterung der Cayley'schen Darstellung zu erscheinen, andererseits aber auch die Ausdehnung auf das allgemeinere Problem, eine bilineare Form von nicht verschwindender Determinante cogredient in sich zu transformiren, gestattet.

§ 1.

Die cogrediente Transformation der bilinearen Formen in sich selbst.

Soll eine bilineare Form von n Variabeln

1) $$\begin{gathered} x_1\ x_2\ .\ .\ .\ x_n \\ y_1\ y_2\ .\ .\ .\ y_n \\ S = \Sigma a_{ik} x_i y_k \end{gathered}$$

durch die cogrediente Transformation

2) $$\begin{aligned} \xi_i &= \Sigma c_{is} x_s \\ \eta_k &= \Sigma c_{k\sigma} y_\sigma \end{aligned}$$

in sich übergeführt werden, so sind die n^2 quadratischen Gleichungen

3) $$a_{s\sigma} = \Sigma a_{ik} c_{is} c_{\sigma k}$$

vermöge der Substitutions-Coefficienten zu erfüllen. Aus ihnen ergiebt sich, falls die Determinante Δ der Form S nicht verschwindet, — eine Voraussetzung, die im Folgenden beständig festgehalten werden soll —, dass

$$C^2 = 1$$

ist, unter C die Determinante der Substitution 2) verstanden. Die letztere heisst bekanntlich eigentlich oder uneigentlich, je nachdem C gleich $+1$ oder -1 ist. Sind also die ξ_i überhaupt lineare Functionen der x_i und genügen die Coefficienten den Bedingungen 3), so sind auch umgekehrt die x_i als lineare Functionen der ξ_i darstellbar.

Setzt man, was immer zulässig ist,

$$4)\qquad \begin{aligned} x_i &= k t_i + \lambda \tau_i \\ \xi_i &= k t_i - \lambda \tau_i \\ y_k &= k T_k + \lambda \mathsf{T}_k \\ \eta_k &= k T_k - \lambda \mathsf{T}_k \end{aligned}$$

wo t, τ, T, T, k, λ vorläufig ganz willkürliche Variable bedeuten, so ist die nothwendige und hinreichende Bedingung für das Bestehen der Gleichung

$$\Sigma a_{ik} x_i y_k = \Sigma a_{ik} \xi_i \eta_k$$

gegeben durch

$$5)\qquad \Sigma a_{ik} (t_i \mathsf{T}_k + \tau_i T_k) = 0$$

wie man sofort durch Eintragen der Ausdrücke 4) in die vorstehende Gleichung ersieht. Die Gleichung 5) ersetzt daher vollständig die sämmtlichen Transformationsbedingungen für die Coefficienten c_{ik} und es ist nicht erforderlich, nachzuweisen, dass die letzteren jene Bedingungen erfüllen.

Nun ergeben sich aus 4) und 2) die Gleichungen:

$$6)\qquad \begin{aligned} k (t_i - \Sigma c_{is} t_s) &= \lambda (\tau_i + \Sigma c_{is} \tau_s) \\ k (T_i - \Sigma c_{is} T_s) &= \lambda (\mathsf{T}_i + \Sigma c_{is} \mathsf{T}_s) \end{aligned}$$

Hieraus folgt: Verschwindet die Determinante

$$| c_{ik} + \delta_{ik} |,$$

unter dem Symbol δ_{ik} das Kronecker'sche Zeichen verstanden, welches durch die Gleichungen

$$s_{ik} = 0,\ i \gtrless k;\ \delta_{ik} = 1,\ i = k$$

definirt ist, oder anders ausgedrückt, verschwindet die charakteristische Function der Substitution nicht für

$\varrho = 1$, so sind die τ_i lineare Functionen der t_i und die T_i sind zugleich die nämlichen linearen Functionen der T_i.[1]) Und mutatis mutandis gilt dasselbe, wenn die charakteristische Function wenigstens nicht die Wurzel $\varrho = -1$ hat.

Setzt man, etwa unter der ersteren Voraussetzung,

$$\tau_i = \Sigma \beta_{is} t_s$$
$$\mathsf{T}_i = \Sigma \beta_{is} T_s,$$

so wird die Bestimmung aller Transformationen, bei denen $\varrho = 1$ nicht Wurzel der charakteristischen Function ist, da nunmehr zwischen den t_s keine linearen Gleichungen mehr auftreten dürfen, zurückgeführt auf die Lösung der n^2 linearen Gleichungen

$$7) \qquad \Sigma a_{ik} \beta_{ks} + \Sigma a_{ks} \beta_{ki} = 0$$
$$s; i = 1, 2 \ldots n$$

zwischen den n^2 Unbekannten β. Dies ist bis auf einen ganz unwesentlichen Unterschied das merkwürdige System linearer Gleichungen, das ich in einer früheren Arbeit[2]) genauer untersucht habe.

Verschwindet aber die charakteristische Function für $\varrho = -1$ und zwar so, dass auch noch ihre $\mu - 1^{\text{ten}}$ Unterdeterminanten sämmtlich mitverschwinden, die μ^{ten} Unterdeterminanten (Subdeterminanten $n - \mu^{\text{ter}}$ Ordnung) dagegen nicht mehr sämmtlich Null sind, so giebt es eine μfache Mannigfaltigkeit von Lösungen des Systemes von linearen Gleichungen

$$\Sigma \gamma_i c_{ik} = \gamma_k, \; k = 1, 2 \ldots n,$$

welche durch die Werthe

$$\gamma_1^{\varrho}, \gamma_2^{\varrho} \cdot \cdot \gamma_n^{\varrho}$$
$$\varrho = 1, 2 \ldots \mu$$

---

[1]) Unter der charakteristischen Function einer Substitution U soll hier die Determinante der Form

$$U + \varrho E$$

verstanden werden.

[2]) Ueber die cogrediente Transformation der bilinearen Formen. Abh. d. k. bayr. Academie d. Wiss. 1890.

bezeichnet werden möge. Die μ linearen Formen

$$\Gamma_\varrho = \Sigma \gamma_i^\varrho z_i$$

sind alsdann von einander unabhängig, d. h. es findet keine Relation von der Form

$$\Sigma \Gamma_\varrho h_\varrho = 0$$

statt.

Nun folgt aus 6) durch Multiplication mit den γ_i^ϱ und Summation nach i

$$2\lambda \Sigma \gamma_i^\varrho \tau_i = 0,$$

das heisst: Verschwinden noch alle $\mu-1^{\text{ten}}$ Unterdeterminanten der charakteristischen Function

$$| c_{ik} + \varrho \delta_{ik} |$$

für $\varrho = -1$ ($\varrho = +1$), so bestehen zwischen den τ (t) μ von einander unabhängige lineare Gleichungen.

Dieser Satz lässt sich in der folgenden Weise umkehren:

Giebt es bei einer Transformation, welche die Form cogredient in sich verwandelt, ein System von μ von einander unabhängigen linearen Gleichungen, denen die T (t) genügen, so muss die charakteristische Function für $\varrho = -1$ ($\varrho = +1$) mit allen $\mu-1^{\text{ten}}$ Unterdeterminanten verschwinden, während die μ^{ten} Unterdeterminanten nicht mehr sämmtlich Null sind.

Unter der Voraussetzung der Gleichung

$$\Sigma \gamma_i^\varrho \tau_i = 0$$

folgt nämlich aus 6) die Gleichung

$$\Sigma (k t_i + \lambda \tau_i) \gamma_i^\varrho - \Sigma (k t_s + \lambda \tau_s) c_{is} \gamma_i^\varrho = 0,$$

aber eine solche Gleichung kann nicht bestehen, da sonst zwischen den x_i allein schon eine Relation vorhanden sein würde. Es müssen also nothwendig alle Coefficienten in derselben gleich Null sein, d. h. es ist

$$\Sigma c_{is} \gamma_i^\varrho = \gamma_s^\varrho,$$

womit der angegebene Satz bewiesen ist.

Dieses einfache Theorem ist die Grundlage der folgenden Untersuchung. Aus demselben geht hervor, dass sich alle Transformationen der Form in sich selbst durch Annahme von linearen Relationen zwischen den t oder τ ergeben müssen.

Diese Transformationen zerfallen nun, sogar noch auf zweifache Weise, je nachdem man die Wurzel $\varrho = +1$ oder $\varrho = -1$ bevorzugt, dem Verhalten der Unterdeterminanten der charakteristischen Function entsprechend, in bestimmte Classen. Und die Aufgabe, die Transformationen jeder Classe durch die ihr entsprechende Zahl von rationalen Parametern zu bewerkstelligen, wird im Folgenden ihre Lösung finden. Dabei ist es natürlich nicht ausgeschlossen, dass die einzelnen Classen aus einander durch andere Processe, insbesondere Grenzübergänge, abgeleitet werden können.

Unter der Voraussetzung nun, dass genau $n-\mu=\sigma$ von einander unabhängige Relationen für die t und damit auch für die T bestehen, kann man setzen, unter v, w willkürliche Grössen verstanden,

$$8)\qquad \begin{aligned} t_i &= \Sigma\, \alpha_{is}\, v_s \\ T_i &= \Sigma\, \alpha_{is}\, w_s \\ s = 1, 2 \ldots \mu&;\; i = 1, 2 \ldots n \end{aligned}$$

wo die α_{is} $n\mu$ unbekannte Coefficienten sind, zwischen denen keine lineare Identität von der Form

$$p_1\, \alpha_{k1} + p_2\, \alpha_{k2} \ldots + p_\mu\, \alpha_{k\mu} = 0$$
$$k = 1, 2 \ldots n$$

besteht. Alsdann sind von den je n Gleichungen 6) für die τ, T genau μ überflüssig, und die übrigen $n-\mu$ ergeben diese Grössen als dieselben linearen Functionen der t, beziehungsweise T, wenn man μ der Grössen τ, T willkürlich annimmt. Es ist daher zu setzen

$$9)\qquad \begin{aligned} \tau_i &= \Sigma\, h_{ir}\, v_r + \lambda_1\, p_{i1} + \ldots \lambda_\sigma\, p_{i\sigma} \\ \mathsf{T}_i &= \Sigma\, h_{ir}\, w_r + \varkappa_1\, p_{i1} + \ldots \varkappa_\sigma\, p_{i\sigma} \end{aligned}$$

wo die $\lambda, \varkappa$ wieder willkürliche Parameter sind und die h_{ir}, p_{is} ebenfalls unbekannte Coefficienten bedeuten. Trägt man die Ausdrücke der t, τ, T, T aus 8) und 9) in die Gleichung 5) ein, so ergiebt sich in Folge der Willkürlichkeit der Parameter

$$v_r,\ w_r,\ \lambda_s,\ \varkappa_s$$
$$r = 1 \ldots \mu$$
$$s = 1 \ldots \sigma$$

das folgende System von Gleichungen

$$\tag{10} \begin{gathered} \Sigma a_{ik} (\alpha_{ir} h_{kl} + \alpha_{kl} h_{ir}) = 0 \\ \Sigma a_{ik} \alpha_{ir} p_{kt} = 0 \\ \Sigma a_{ik} \alpha_{kr} p_{it} = 0 \end{gathered}$$

welches für alle Werthe

$$r, t, l = 1, 2 \ldots \mu$$

erfüllt sein muss, während die Indices i, k unter dem Zeichen Σ sich von 1 bis n erstrecken.

Von der näheren Untersuchung dieses Systems von Gleichungen hängt es ab, ob die gegebene Form überhaupt congrediente Transformationen von dem angegebenen Charakter zulässt. Die hierauf bezüglichen Untersuchungen hoffe ich bei einer anderen Gelegenheit darzulegen; der Zweck der vorliegenden Mittheilung ist es, die angegebenen Gleichungen auf die beiden ein besonderes Interesse in Anspruch nehmenden Fälle der Transformation der symmetrischen und alternirenden Formen anzuwenden. Dabei würde es möglich sein, die Darstellung in eine einzige zu verschmelzen. Ich ziehe es jedoch vor, die beiden Fälle gesondert zu behandeln, theils, um eine grössere Uebersichtlichkeit zu erreichen, theils der besonderen Aufmerksamkeit wegen, die man von jeher dem ersten Falle zugewendet hat.

§ 2.

Die Transformation der symmetrischen Formen.

Ist die bilineare Form symmetrisch, so ist es bequemer, an Stelle derselben die quadratische Form

$$S = \Sigma a_{ik} x_i x_k,$$
$$a_{ik} = a_{ki}$$

zu betrachten, und die linearen Transformationen derselben in sich zu bestimmen. Ohne wesentliche Beschränkung könnte man natürlich S auch gleich als eine Summe von Quadraten der Variabeln voraussetzen.

Setzt man nun

1) $$\Sigma a_{ik} t_i = u_k$$

oder $$\varDelta t_s = \Sigma u_s A_{sk}$$

wo die A_{ik} die adjungirten Elemente der Elemente a_{ik} bedeuten, so reducirt sich die Bedingung 5) des § 1 auf die Gleichung

2) $$\Sigma u_k \tau_k = 0.$$

Bestehen nun zwischen den $t\ n-\mu$ lineare Relationen, d. h. ist $\varrho = +1$ eine Wurzel der charakteristischen Function, für die noch die $n-\mu-1^{\text{ten}}$ Unterdeterminanten etc. verschwinden, so bestehen ebensoviel linear unabhängige Gleichungen zwischen den u_k, nämlich die folgenden

$$\Sigma u_k \gamma_s^\varrho A_{sk} = 0$$
$$\varrho = 1, 2 \ldots n-\mu$$

Diese sind in der That von einander unabhängig, denn die Annahme einer Identität

$$\Sigma z_\varrho \gamma_s^\varrho A_{sk} = 0$$

würde, da die Determinante $\varDelta$ nicht verschwindet, erfordern, dass

$$\Sigma z_\varrho \gamma_s^\varrho = 0$$

ist, gegen die Voraussetzung. Setzt man nun

3) $$u_k = \Sigma \alpha_{kr} v_r$$
$$r = 1, 2 \ldots \mu$$

wobei die v unabhängige Parameter bedeuten, so existiren keine Relationen von der Form

$$p_1 \alpha_{k1} + \ldots p_\mu \alpha_{k\mu} = 0$$

dagegen gibt es $n - \mu = \nu$ Systeme von Grössen

$$x_1^\sigma, x_2^\sigma \dots x_n^\sigma$$
$$\sigma = 1, 2 \dots \nu$$

welche die Gleichungen

4) $$\Sigma \alpha_{i1} x_i^\sigma = 0, \dots \Sigma \alpha_{i\mu} x_i^\sigma = 0$$

befriedigen, und diese ν Systeme sind untereinander linear unabhängig. Um nun die Gleichung 2) zu erfüllen, setze man

5) $$\tau_k = \Sigma \beta_{k\varrho} v_\varrho + \lambda_1 x_k^1 + \dots \lambda_\nu x_k^\nu$$

wo die $\lambda_1 \dots \lambda_\nu$ wieder willkürliche Parameter sein mögen, während die erste Summe von $\varrho = 1$ bis $\varrho = \varkappa$ geht. Dabei folgt zugleich, dass $\varkappa = \mu$ sein muss. Denn wegen der Unabhängigkeit der v würde, falls in dem Ausdruck für τ_k auch $v_{\mu+q}$ vorkäme, die Gleichung 2) nur so erfüllt werden können, dass

$$\Sigma \beta_{k\,\mu+q}\, \alpha_{k1} = 0$$
$$\Sigma \beta_{k\,\mu+q}\, \alpha_{k2} = 0$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\Sigma \beta_{k\,\mu+q}\, \alpha_{k\mu} = 0$$

wäre. Aber diese Gleichungen charakterisiren jene $\beta_{k\,\mu+q}$ als lineare Functionen der x_k^σ, deren Auftreten in τ_k bereits durch die Form von 5) berücksichtigt ist; überdiess ist in § 1 die allgemeine Darstellung der τ bereits gegeben.

Die Gleichung 2) reducirt sich nun auf

$$\Sigma \alpha_{k\sigma} \beta_{ks} v_\sigma v_s = 0$$
$$\sigma, s = 1, 2 \dots \mu,$$

welche für die unabhängigen v zu befriedigen ist. Dies liefert die Gleichungen

6) $$\Sigma \alpha_{k\sigma} \beta_{ks} = p_{\sigma s}$$

in der die $p_{\sigma s}$ willkürliche Elemente einer schiefen Determinante μ^{ter} Ordnung sind. In der That kann man wegen der über die α gemachten Voraussetzung immer aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} \Sigma\, \alpha_{k1}\, \beta_{ks} &= p_{1s} \\ \Sigma\, \alpha_{k2}\, \beta_{ks} &= p_{2s} \\ \vdots\quad & \quad \vdots \\ \Sigma\, \alpha_{k\mu}\, \beta_{ks} &= p_{\mu s} \end{aligned}$$

da eine der μ reihigen Determinanten der α sicher von Null verschieden ist, die Grössen β_{ks} bestimmen. Dabei scheint es noch möglich zu sein, sogar $(n-\mu)\,\mu$ Werthe der β ganz willkürlich anzunehmen. Indessen gelingt es, die Transformationsformeln von den β überhaupt gänzlich zu befreien.

Unter den angegebenen Voraussetzungen hat man nämlich wenn zur Abkürzung

$$\begin{gathered} \frac{1}{\Delta}\, \Sigma\, A_{kl}\, \alpha_{lr} = B_{kr} \\ k = 1, 2 \ldots n \\ r = 1, 2 \ldots \mu \\ n - \mu = \nu \end{gathered}$$

gesetzt wird,

$$\text{7)} \qquad \begin{aligned} t_k &= \Sigma\, B_{kr}\, v_r \\ \tau_k &= \Sigma\, \beta_{ks}\, v_s + \lambda_1\, x_k^1 + \ldots \lambda_\nu\, x_\nu^k. \end{aligned}$$

Setzt man jetzt die gefundenen Ausdrücke in die Formeln 4) des § 1 ein, so ergeben sich durch Elimination der v, λ die Gleichungen, welche die ξ durch die x ausdrücken.

Um die Rechnung möglichst bequem auszuführen, multiplicire man die n Gleichungen

$$x_i = k\, t_i + \lambda\, \tau_i$$

mit den α_{is} und summire über i. Infolge der Gleichungen 4) werden dadurch die $\lambda_1 \ldots \lambda_\nu$ eliminirt und man erhält

$$\text{8)} \qquad \Sigma\, \alpha_{is}\, x_i = \Sigma\, (k\, B_{ir} + \lambda\, \beta_{ir})\, \alpha_{is}\, v_r\,,$$

wobei

$$\Sigma B_{ir} \alpha_{is} = \frac{1}{\Delta} \Sigma A_{il} \alpha_{lr} \alpha_{is}$$

die Elemente b_{rs} einer symmetrischen Determinante und die

$$\Sigma \beta_{ir} \alpha_{is} = p_{rs}$$

nach 6) die völlig willkürlichen Elemente einer schiefen Determinante μ^{ter} Ordnung sind.

Setzt man endlich die Determinante der $\mu + 1$ Gleichungen

$$\Sigma \alpha_{is} x_i = \Sigma (k b_{rs} + \lambda p_{rs}) v_r$$
$$x_h + \xi_h = 2 k \Sigma B_{kr} v_r$$

gleich Null, so ergiebt sich

$$0 = \begin{vmatrix} k b_{11} + \lambda p_{11} & \ldots & k b_{1\mu} + \lambda p_{1\mu} & 2 k B_{h1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ k b_{\mu 1} + \lambda p_{\mu 1} & \ldots & k b_{\mu\mu} + \lambda p_{\mu\mu} & 2 k B_{h\mu} \\ \Sigma \alpha_{i1} x_i & \ldots & \Sigma \alpha_{i\mu} x_i & x_h + \xi_h \end{vmatrix}$$

Aus dieser Formel gewinnt man die Darstellung der ξ_h durch die x_i, sobald noch vorausgesetzt wird, dass die in völliger Analogie mit den Cayley'schen Formeln auftretende schief symmetrische Determinante

9) $$\Omega = | k b_{s\sigma} + \lambda p_{s\sigma} |$$
$$s, \sigma = 1, 2 \ldots \mu, \ 0 < \mu \leqq n$$

nicht identisch verschwindet. Für den Fall $\mu = n$ ergeben sich die Cayley'schen Formeln selbst.

Zur Bestimmung der Anzahl der willkürlichen Parameter, von denen die Coefficienten der Transformation abhängen, genügt folgende einfache Betrachtung.

Die Coefficienten α_{ir}, deren Zahl $n \mu$ ist, sind zwar willkürlich, aber nicht alle wesentlich. Denn man kann durch eine lineare Transformation

$$v_r = \Sigma \gamma_{rs} w_s$$

vermöge der die Gleichungen 3) übergehen in

$$u_k = \Sigma\, \alpha_{kr}\, \gamma_{rs}\, w_s = \Sigma\, d_{ks}\, w_s,$$

bewirken, dass μ^2 der Grössen d_{rs} willkürlich, aber fest gegebene Werthe annehmen. Setzt man nämlich

$$\gamma_{1s}\, \alpha_{k1} + \ldots \gamma_{\mu s}\, \alpha_{k\mu} = d_{ks}, \tag{10}$$

so kann man für die Indices k stets solche μ Werthe

$$k_1\, k_2 \ldots k_\mu$$

auswählen, dass die Determinante der Gleichungen 10) von Null verschieden ist. Demgemäss sind von den $n\mu$ Grössen d_{ks} oder α_{ks} nur $(n-\mu)\mu$ als wirklich wesentlich anzusehen. Die Wahl dieser willkürlich bleibenden Parameter kann noch auf mannigfache Weise geschehen, insbesondere kann man z. B. die α_{kr} dem folgenden Schema entsprechend ansetzen:

$$\begin{array}{cccc}
\lambda_{11} & 0 & \cdot\,\cdot & 0 \\
\lambda_{21} & \lambda_{12} & \cdot\,\cdot & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots\,\vdots & \vdots \\
\lambda_{\nu 1} & \lambda_{\nu-1\,2} & \cdot\,\cdot & \cdot \\
0 & \lambda_{\nu 2} & \cdot\,\cdot & \cdot \\
0 & 0 & \cdot\,\cdot & \cdot \\
\vdots & \vdots & \vdots\,\vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdot\,\cdot & \lambda_{\nu\mu}
\end{array}$$

welches n horizontale und μ verticale Reihen enthält.

Hiermit ergiebt sich als Gesammtzahl der in der Transformation auftretenden Parameter

$$(n-\mu)\,\mu + \frac{\mu\,(\mu-1)}{2}$$

$$= \frac{n\,(n-1)}{2} - \frac{(n-\mu)\,(n-\mu-1)}{2}$$

welche Zahl für $\mu = n$, $\mu = n-1$ ihren grössten Werth, nämlich $\frac{n(n-1)}{2}$, annimmt.[1])

§ 3.

Die charakteristische Function der Substitution.

Die charakteristische Function

$$F(\varrho) = | c_{ik} + \varrho s_{ik} |$$

erhält man ohne weiteres aus den aufgestellten Gleichungen für die x und ξ. Hat man nämlich

$$x_i = \Sigma p_{ik} w_k$$
$$\xi_i = \Sigma q_{ik} w_k$$

wo $w_1 \ldots w_n$ irgend welche Variable sind, vermöge deren sich die ξ als Functionen der x ausdrücken lassen, und setzt man zugleich

$$\xi_i = \Sigma c_{is} x_s$$

so ist

$$\Sigma c_{is} p_{sk} = q_{ik}$$

oder

$$\Sigma (c_{is} + \varrho \delta_{is}) p_{sk} = q_{ik} + \varrho p_{ik}$$

Hieraus folgt, dass die charakteristische Function durch die Gleichung

$$F(\varrho) | p_{ik} | = | q_{ik} + \varrho p_{ik} |$$

gegeben ist. Da nun nach den Gleichungen 7) des § 2

$$x_i = k \Sigma B_{ir} v_r + \lambda \Sigma \beta_{ir} v_r + \lambda_1 y_i^1 + \ldots \lambda_\nu x_i^\nu$$
$$\xi_i = k \Sigma B_{ir} v_r - \lambda \Sigma \beta_{ir} v_r - \lambda_1 x_i^1 + \ldots - \lambda_\nu x_i^\nu$$

---

[1]) Für $\mu = 1$ erhält man z. B. die bekannte, bei geradem n uneigentliche Transformation

$$\xi_h = 2 \alpha_x \frac{\Sigma A_{hl} \alpha_l}{A} - x_h$$

wo

$$A = \Sigma A_{il} \alpha_i \alpha_k$$

zu setzen ist, mit $n-1$ willkürlichen Parametern.

ist, so wird die charakteristische Function

$$|q_{ik} + \varrho p_{ik}|$$

durch die Determinante

$$\begin{vmatrix} kB_{11}(1+\varrho)-\lambda\beta_{11}(1-\varrho), \,.\,. \, kB_{1\mu}(1+\varrho)-\lambda\beta_{1\mu}(1-\varrho), & x_1^1(\varrho-1) \,.\,. \, x_1^\nu(\varrho-1) \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad \vdots & \vdots \quad \vdots \\ kB_{n1}(1+\varrho)-\lambda\beta_{n1}(1-\varrho), \,.\,. \, kB_{n\mu}(1+\varrho)-\lambda\beta_{n\mu}(1-\varrho), & x_n^1(\varrho-1) \,.\,. \, x_n^\nu(\varrho-1) \end{vmatrix}$$

ausgedrückt. Um sie in eine einfachere Form zu bringen, multiplicirt man dieselbe mit der nicht verschwindenden Determinante

$$w_y = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & .. & \alpha_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{1\mu} & .. & \alpha_{n\mu} \\ y_1' & .. & y_n' \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^\nu & .. & y_n^\nu \end{vmatrix}$$

in der die y völlig willkürliche Grössen bedeuten. Man erhält dann, falls

$$\Sigma x_h^\varrho \, y_h^{\varrho'} = (\varrho\,\varrho')\,; \quad \varrho, \varrho' = 1, 2 \ldots \nu$$

zur Abkürzung gesetzt wird, unter Berücksichtigung der Formeln 4) des § 2 sofort die Gleichung

$$F(\varrho)\,|p_{ik}|\,w_y = (-1)^{n-\mu}\,(1-\varrho)^{n-\mu}\,w_{xy}\,H(\varrho)$$

wo unter w_{xy} die Determinante

$$\begin{vmatrix} (11) & .. & (1\nu) \\ \vdots & & \vdots \\ (\nu 1) & .. & (\nu\nu) \end{vmatrix}$$

unter $H(\varrho)$ dagegen die Determinante

$$\begin{vmatrix} k\,b_{11}\,(1+\varrho) - \lambda\,p_{11}\,(1-\varrho) & .. & k\,b_{1\mu}\,(1+\varrho) - \lambda\,p_{1\mu}\,(1-\varrho) \\ \vdots & & \\ k\,b_{\mu 1}\,(1+\varrho) - \lambda\,p_{\mu 1}\,(1-\varrho) & .. & k\,b_{\mu\mu}\,(1+\varrho) - \lambda\,p_{\mu\mu}\,(1-\varrho) \end{vmatrix}$$

zu verstehen ist, wobei die letztere aus den im § 2 eingeführten Elementen b_{rs} eines symmetrischen, sowie den willkürlichen Elementen p_{rs} eines schiefen Systems besteht.

Aus der angegebenen Formel folgt für $\varrho = \infty$

$$w_y \, | p_{is} | = w_{xy} \, \Omega$$

also endlich durch Division

$$F(\varrho) = (-1)^{n-\mu} (1-\varrho)^{n-\mu} \frac{H(\varrho)}{\Omega}$$

mithin für $\varrho = 0$ wegen $H(0) = \Omega$,

$$F_{(0)} = C = (-1)^{n-\mu}$$

Würde man übrigens die Variabeln τ anstatt der t in der ganzen Darstellung bevorzugt haben, so erhält man eine charakteristische Function $F'(\varrho)$ von der folgenden Form

$$F'(\varrho) = (1+\varrho)^{n-\mu} \frac{H'(\varrho)}{\Omega}$$

in welcher

$$H'(\varrho) = | p_{rs}(1+\varrho) - \lambda \, b_{rs}(1-\varrho) |$$

ist, so dass auch

$$F' 0 = (-1)^{\mu}$$

wird.

Hieraus folgt: D i e c h a r a k t e r i s t i s c h e F u n c t i o n $F(\varrho)$ d e r T r a n s f o r m a t i o n h a t d i e $n-\mu$ f a c h e W u r z e l $\varrho = 1$, f ü r d i e n o c h d i e $n-\mu-1^{\text{ten}}$ U n t e r d e t e r m i n a n t e n s ä m m t l i c h v e r s c h w i n d e n. Verschwindet also die Determinante B der b_{rs} nicht, was von der Wahl der Parameter α abhängt, so ist diese Wurzel auch nicht in höherer Multiplicität vorhanden, d. h. d i e z u i h r g e h ö r i g e n E l e m e n t a r t h e i l e r s i n d a l l e e i n f a c h. Wenn dagegen jene Determinante verschwindet, oder überhaupt der Wurzelfactor $1-\varrho$ in höherer Potenz auftritt, wird die Vertheilung der Elementartheiler eine andere, so lange aber überhaupt die α den angegebenen Voraussetzungen gemäss gewählt werden, kann das Verschwinden der Unterdeterminantensysteme sich nicht auf einen höheren als den angegebenen Grad erstrecken.

Die Determinante der Transformation ist $(-1)^{n-\mu}$; man erhält also uneigentliche Transformationen, so oft $n-\mu$ eine ungerade Zahl ist, also insbesondere für $\mu = n-1$ die von $\frac{n(n-1)}{2}$ Parametern abhängigen uneigentlichen Transformationen.

Es beweist zugleich die angegebene Darstellung unter Berücksichtigung der eben gemachten Bemerkungen die folgenden Sätze:

Verschwinden bei eigentlicher (uneigentlicher) Transformation die $n-\mu^{\text{ten}}$ Unterdeterminanten für die Wurzel $\varrho = 1$ nicht mehr, während alle $n-\mu-1^{\text{ten}}$ noch Null sind, so ist $n-\mu$ eine gerade (ungerade Zahl), und analog:

Verschwinden bei eigentlicher (uneigentlicher) Transformation die $n-\mu^{\text{ten}}$ Unterdeterminanten nicht mehr für die Wurzel $\varrho = -1$, so ist μ eine gerade (ungerade) Zahl.[1])

---

[1]) Ein anderer Beweis dieser Sätze, welcher sich der von Herrn Frobenius ermittelten Eigenschaften der Elementartheiler der Transformation bedient, ist folgender.

Bezeichnet man die zu $\varrho = 1$ und $\varrho = -1$ gehörenden Elementartheiler durch

$$\varkappa_1 \quad \varkappa_2 \quad \ldots \quad \varkappa_r$$
$$k_1 \quad k_2 \quad \ldots \quad k_s$$

so ist bei eigentlicher Transformation (bei uneigentlicher gelten ganz ähnliche Betrachtungen)

$$\varkappa_1 + \varkappa_2 + \ldots \varkappa_r \text{ eine gerade Zahl}$$

und $$\varkappa_1 + \varkappa_2 + \ldots \varkappa_r + k_1 + k_2 + \ldots k_s + 2m = n$$

wo m die Zahl der reciproken Wurzelpaare bedeutet. Sind nun die Elementartheiler mit ungeraden Exponenten

$$\varkappa_1, \quad \varkappa_2 \quad \ldots \quad \varkappa_\varrho$$
$$k_1 \quad k_2 \quad \ldots \quad k_\sigma$$

so ist die Anzahl der übrigen Elementartheiler $\varkappa$, k jedenfalls eine gerade. Daher ist auch ϱ eine gerade Zahl, folglich die Anzahl $\varkappa$ der Elementartheiler von der Form $\varrho - 1$ selbst eine gerade. Daraus folgt dann aber, dass auch die Anzahl der Elementartheiler k ebenfalls gerade sein muss.

Einige Bemerkungen über die im vorigen auftretenden Determinanten mögen hier noch ihren Platz finden.

Die Determinante w_{xy} ist immer von Null verschieden. Denn wenn sie verschwände, so würde bei völlig beliebigen Werthen der y der Ausdruck

$$\Sigma x_i^{\varrho} y_i^{\varrho'} \gamma_{\varrho}$$

für Werthe der γ_{ϱ} Null sein müssen, die von den y unabhängig sind; dies ist aber nur möglich wenn

$$\Sigma x_i^{\varrho} \gamma_{\varrho} = 0$$

ist, was durch den Charakter der x_i^{ϱ} ausgeschlossen ist. Versteht man unter w_x die aus w_y entspringende Determinante, welche entsteht, wenn man die ν Reihen der y durch die x^{ϱ}, $\varrho = 1 \ldots . \nu$ ersetzt, so ist

4) $$w_x w_y = Q w_{xy}$$

wenn unter Q die μ reihige Determinante der Grössen

$$\Sigma \alpha_{ir} \alpha_{is} = q_{rs}$$

verstanden wird. Und bezeichnet man mit P die aus ω_y entspringende Determinante, welche entsteht, wenn man die y durch die Grössen

$$\Sigma x_k^{\varrho} a_{ki}$$

ersetzt, so erhält man leicht die Formel

5) $$P \Delta^{\mu-1} w_y = B w_{xy}$$

wo nun B die symmetrische Determinante der b_{rs} bedeutet.

Endlich ist auch noch

6) $$P^2 \Delta^{\mu-1} = B X$$

wobei X die ν reihige Determinante der Grössen

$$\Sigma x_i^{\varrho} x_k^{\varrho'} a_{ik}$$

bedeutet. Durch Division von 5) und 6) folgt also

$$B\, w_{ky}^2 = X\, \Delta^{\mu-1}\, w_y^2$$

Hieraus ergibt sich, dass die Determinante w_x nur mit Q, und dass die symmetrische Determinante B nur mit X verschwindet.

Die im vorigen entwickelten Formeln liefern alle Parameterdarstellungen der Transformation in sich selbst ohne Grenzübergänge. Dabei ist die Variable t (τ) bevorzugt, und diesem Umstande entspricht es, dass die Wurzel $\varrho = 1$ zunächst in höherer Vielfachheit auftritt. Es ist indessen leicht, die besonderen Bedingungen anzugeben, unter denen $F(\varrho)$ auch die Wurzel $\varrho = -1$ erhält.

Nach den Bemerkungen in § 1 kann dies nur dann der Fall sein, wenn auch die τ einem System linearer Gleichungen genügen. Sind also genau $\varkappa$ von einander unabhängige Relationen

$$\Sigma\, \delta_k\, \tau_k = 0$$

vorhanden, so muss nach § 2, 7) wegen der Willkürlichkeit der v_r und λ_s

$$\Sigma\, \delta_k\, x_k' = 0 \quad \ldots \quad \Sigma\, \delta_k\, x_k^{\nu} = 0$$

$$\Sigma\, \beta_{ks}\, \delta_k = 0$$

sein. Damit ergiebt sich aber

$$\delta_k = \Sigma\, \alpha_{kr}\, h_r \qquad r = 1, 2 \ldots \mu$$

wobei die Grössen h_r nun den Gleichungen

$$\Sigma\, \beta_{ks}\, \alpha_{kr}\, h_r = 0$$

oder

$$\Sigma\, p_{rs}\, h_r = 0$$

genügen müssen. Giebt es nun $\varkappa$ von einander unabhängige Systeme der h_r, d. h. verschwinden noch die $\varkappa - 1^{\text{ten}}$ Unterdeterminanten der schiefen Determinante der p_{rs} so ist

$$h_r = h_r'\, w_1 + \ldots\, h_r^{\varkappa}\, w^{\varkappa}$$

oder

$$\delta_k = \Sigma \alpha_{kr} h_r^s w_s, \quad s = 1, \ldots . \varkappa$$

wobei die w_s willkürliche Grössen bedeuten.

Und dieser Ausdruck repräsentirt genau $\varkappa$ unabhängige Systeme von Grössen δ_k.

Bestände nämlich eine Relation

$$\Sigma \alpha_{kr} h_r^s z_s = 0$$

so wäre nach § 2, (unter 8)

$$\Sigma h_r^s z_s = 0$$

d. h. die h_r^s wären gegen die Voraussetzung nicht von einander unabhängig. Es wird also die charakteristische Function $F(\varrho)$ für $\varrho = -1$ noch mit sämmtlichen $\varkappa - 1^{\text{ten}}$ Unterdeterminanten verschwinden, wobei es von Interesse scheint, dass dieser Charakter derselben lediglich durch die Wahl der Elemente p_{rs} aufgeprägt werden kann.

Die Formeln dieses § ergeben also eine nach der Anzahl der Elementartheiler, welche zu $\varrho = +1$ ($\varrho = -1$) gehören, ausgeführte Classification der cogredienten Transformationen, und zwar so, dass innerhalb jeder Classe genau die nothwendige Anzahl willkürlicher rationaler Parameter vorhanden ist. Keine dieser Classen kann aus der anderen direct abgeleitet werden; dagegen ist dies durch Grenzübergänge immer möglich. Denn die eigentlichen Transformationen bilden ein irreducibeles System, d. h. jede noch so specielle Transformation dieser Art kann durch einen derartigen Process aus der allgemeinsten der Gattung hergeleitet werden. Setzt man andererseits irgend eine bestimmte uneigentliche Transformation mit einer anderen dieser Art zusammen, so erhält man immer eigentliche Transformationen, und hieraus folgt, dass auch alle uneigentlichen Transformationen aus der allgemeinsten ihrer Art durch Grenzübergang gefunden werden können.

§ 4.

Die cogrediente Transformation der alternirenden bilinearen Formen von nicht verschwindender Determinante in sich selbst.

Die Transformation der alternirenden Formen von nicht verschwindender Determinante lässt sich nun in vollständiger Analogie mit den Rechnungen der § 2 und 3 in wenigen Worten ausführen.

Setzt man in den Bedingungsgleichungen 10) des § 1 voraus, dass

$$a_{ik} = -a_{ki}$$

ist, und setzt man ferner

$$\Sigma\, a_{ki}\, p_{kt} = q_{it},$$

so reduciren sich die beiden letzten Gleichungen 10) auf die einzige Gleichung

$$\Sigma\, \alpha_{ir}\, q_{it} = 0, \tag{1}$$

welcher man in derselben Weise wie in § 2 durch die Annahme

$$\begin{aligned} q_{it} &= x_i^t \\ t &= 1, 2 \ldots \sigma \end{aligned} \tag{2}$$

genügt, wobei die Coefficienten α_{ir} in derselben Weise wie dort eingeführt werden. Die noch übrig bleibende Gleichung 10) § 1

$$\Sigma\,(a_{ik}\, \alpha_{ir}\, h_{kl} + a_{ik}\, \alpha_{kl}\, h_{ir}) = 0$$

sagt ferner aus, dass die Grössen

$$\Sigma\, a_{ik}\, \alpha_{ir}\, h_{kl} = s_{rl}$$

zu einer symmetrischen Form gehören, die völlig willkürlich angenommen werden kann.

Unter den angegebenen Voraussetzungen wird nach § 1, 9)

$$\begin{aligned} x_i &= \Sigma(k\, \alpha_{is} + \lambda h_{is})\, v_s + \lambda_1 p_{i1} + \ldots \lambda_\sigma p_{i\sigma} \\ \xi_i &= \Sigma(k\, \alpha_{is} + \lambda h_{is})\, v_s + \lambda_1 p_{i1} + \ldots \lambda_\sigma p_{i\sigma}. \end{aligned} \tag{3}$$

Nun ergiebt sich aus den Gleichungen 3) zunächst durch Multiplication mit a_{ik} und Summation über i

$$\Sigma x_i a_{ik} = \Sigma (k a_{ik} \alpha_{is} + \lambda a_{ik} h_{is}) v_s$$
$$+ \sum_{t=1}^{t=\sigma} \lambda_t p_{it} a_{ik}$$

oder, wenn man zur Abkürzung

$$\begin{gathered} \Sigma a_{ik} \alpha_{is} = B_{ks} \\ \Sigma a_{ik} h_{is} = l_{ks} \\ s = 1, 2 \ldots \mu \\ k = 1, 2 \ldots n \end{gathered}$$

setzt:

$$\Sigma x_i a_{ik} = \Sigma (k B_{ks} + \lambda l_{ks}) v_s + \Sigma \lambda_t p_{it} a_{is}.$$

Multiplicirt man jetzt mit den α_{kr} und summirt über k, so ergiebt sich, wenn man an Stelle von

$$\Sigma B_{ks} \alpha_{kr} = \Sigma a_{ik} \alpha_{is} \alpha_{kr}$$

die Elemente einer alternirenden Form b_{rs} setzt, während die

$$\Sigma l_{ks} \alpha_{kr} = \Sigma a_{ik} h_{is} \alpha_{kr}$$

durch die Elemente s_{rs} einer völlig willkürlichen symmetrischen Form von μ Variabeln vertreten werden, zufolge der Gleichungen, denen die p_{it} genügen müssen, das folgende System von $\mu + 1$ Gleichungen

$$\begin{gathered} \Sigma x_i a_{ik} \alpha_{kr} = \Sigma (k b_{rs} + \lambda s_{rs}) v_s \\ x_h + \xi_h = 2 k \Sigma \alpha_{hs} v_s \end{gathered}$$

aus dem man durch Elimination der v_s die Gleichung

$$\begin{vmatrix} k b_{11} + \lambda s_{11} & \ldots & k b_{1\mu} + \lambda s_{1\mu}, & - \Sigma x_i B_{i1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ k b_{\mu 1} + \lambda s_{\mu 1} & \ldots & k b_{\mu\mu} + \lambda s_{\mu\mu}, & - \Sigma x_i B_{i\mu} \\ 2 k \alpha_{h1} & \ldots & 2 k \alpha_{h\mu} \quad , & x_h + \xi_h \end{vmatrix} = 0$$

ableitet, welche die Darstellung der ξ durch die x gestattet, sobald die Determinante

$$\Omega = | k\, b_{rs} + \lambda\, c_{rs} |$$

nicht identisch verschwindet.

Die Zahl der willkürlichen Parameter ergibt sich auf demselben Wege wie in § 2 gleich

$$\frac{\mu(\mu+1)}{2} + (n-\mu)\mu$$

$$= \frac{\mu(\mu+1)}{2} - \frac{(n-\mu)(n-\mu+1)}{2}$$

und diese Zahl erreicht ihren grössten Werth für $\mu = n$, dem „allgemeinen" von Herrn Frobenius behandelten Falle [1]).

Auch die charakteristische Function erhält man in der nämlichen Weise. Unter Anwendung der nämlichen Bezeichnungen hat man

$$F(\varrho)\, \Delta\, w_y\, | p_{ik} | = (-1)^{n-\mu} (1-\varrho)^{n-\mu} H(\varrho)\, w_{xy}$$

wo

$$H(\varrho) = | k(1+\varrho)\, b_{rs} - \lambda\, s_{rs} (1-\varrho) |$$

wieder eine μ reihige schief-symmetrische Determinante ist. Hieraus folgt für $\varrho = \infty$

$$\Delta\, w_y\, | p_{ik} | = \Omega\, w_{xy}$$

mithin

$$F(\varrho) = (-1)^{n-\mu} (1-\varrho)^{n-\mu} \frac{H_{(\varrho)}}{\Omega}$$

also für $\varrho = 0$, wegen

$$H_{(0)} = (-1)^{\mu}\, \Omega$$

$$C = F_{(0)} = (-1)^{n}.$$

Die Determinante der Transformation ist daher immer gleich $+1$, d. h. die Transformation eine eigent-

---

1) Für $\mu = 1$ hat man z. B. die cogrediente Transformation

$$\xi_h = a_h \Sigma\, a_{ik}\, x_i\, a_k - x_h$$

mit den n Parametern a_h.

liche. In der That lässt ja auch eine alternirende Form von nicht verschwindender Determinante überhaupt keine uneigentlichen Transformationen in sich zu.

Man erhält auf demselben Wege, wenn man die Variable τ bevorzugt, die charakteristische Function

$$F'(\varrho) = (1+\varrho)^{n-\mu} \frac{H'(\varrho)}{\Omega}$$

wo

$$H'(\varrho) = | k\, s_{rs} (1+\varrho) - b_{rs} (1-\varrho) |.$$

Ueberhaupt kann man hier fast alle die zu Ende des § 3 gemachten Bemerkungen wiederholen. Ist z. B. μ eine gerade Zahl und verschwindet die schiefe Determinante der b_{rs} nicht, so hat die Function $F(\varrho)$ die $n-\mu$ fache Wurzel $\varrho = 1$, zu welcher nur einfache Elementartheiler gehören. Ist dagegen μ ungerade, so verschwindet jene Determinante; die Elementartheiler können daher nicht mehr sämmtlich einfach sein. Es giebt aber die Transformation der alternirenden Formen noch zu mehreren anderen Bemerkungen Veranlassung, auf die ich bei einer anderen Gelegenheit einzugehen beabsichtige.

Die symmetrischen Formen kann man stets so wählen, dass für keine derselben die Determinante verschwindet, wie der blosse Anblick des Schemas auf S. 278 zeigt. Die alternen Formen dagegen müssen bei ungeradem n immer eine verschwindende Determinante haben. Soll aber bei geradem n eine alterne Form X von nicht verschwindender Determinante vorhanden sein, so ist

$$SX = A$$

wieder eine alterne Form, also

$$S = AX^{-1},$$

d. h. die charakteristische Function von S

$$|A + \varrho X|$$

ist das Quadrat einer rationalen Function von ϱ und verschwindet für jede ihrer Wurzeln sicher mit den ersten Unterdeterminanten. Die Anzahl der Formen X beträgt also hier mindestens $\frac{1}{2}n$.

Ebenso kann jede Form S auf p^{∞} Arten durch das Produkt von zwei symmetrischen Formen dargestellt werden, von denen mindestens eine eine nicht verschwindender Determinante ist. Dagegen kann eine analoge Darstellung durch zwei alternirende Formen nur unter gewissen Bedingungen erfolgen, welche im vorigen für den Fall, dass die Determinante von S nicht Null ist, angegeben sind.

Berichtigung.

In der Arbeit „Ueber die cogrediente Transformation der bilinearen Formen in sich selbst" (diese Sitzgsb. Januar 1896) muss die Formel S. 22, Z. 8 v. o. heissen:

$$\frac{n(n+1)}{2} - \frac{(n-\mu)(n-\mu+1)}{2}.$$
