Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Classe

der

k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.

Band XXVI. Jahrgang 1896.

München.
Verlag der K. Akademie.
1897.

In Commission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).

Ueber die linearen Transformationen einer quadratischen Mannigfaltigkeit in sich.

Von **F. Lindemann.**

(*Eingelaufen 7. März.*)

Trotzdem von Cayley allgemeine Formeln für die Transformation einer Summe von Quadraten in sich aufgestellt waren, und trotzdem Herr Frobenius[1]) diese Formeln von der Lage des Coordinatensystems unabhängig gemacht hatte, war die Aufgabe, alle linearen Transformationen einer quadratischen Form in sich durch Parameter darzustellen, doch noch nicht erledigt, da sich die uneigentlichen Transformationen jenen Formeln entzogen. In den von mir bearbeiteten „Vorlesungen über Geometrie" habe ich diese Lücke für den Fall von vier homogenen Variabeln ausgefüllt, und Herr Löwy hat entsprechende Ueberlegungen für beliebig viele Variable angestellt.[2]) Neuerdings hat Herr A. Voss[3]) dieselbe Aufgabe in anderem Sinne gelöst; Zweck der folgenden Entwicklungen ist es, die Löwy'schen Formeln so umzugestalten, dass aus ihnen die von Herrn Voss aufgestellten Endresultate hervorgehen. Es bietet sich dabei Gelegenheit, jenen früheren Untersuchungen manche ergänzende Bemerkung hinzuzufügen. In Betreff der Litteratur sei auf jene Arbeit des Herrn Löwy verwiesen.

---

1) Crelle's Journal, Bd. 84.

2) Ueber die Transformationen einer quadratischen Form in sich selbst, Nova Acta der Kais. Leop.-Carol. Deutschen Akademie der Naturforscher, Bd. LXV, Halle 1895 (Inaugural-Dissertation der Universität München).

3) Siehe Sitzungsberichte vom 4. Januar 1896.

1. Nach der von mir angegebenen Methode ergeben sich die Cayley'schen Formeln für die eigentliche Transformation einer Fläche zweiter Ordnung in sich in der allgemeinen Frobenius'schen Form, wenn man zwei Punkte t und τ betrachtet, die harmonische Pole in Bezug auf die gegebene Fläche

$$\Sigma\Sigma\, a_{ik}\, x_i\, x_k = 0 \tag{1}$$

sind, und deren Verbindungslinie die Fläche in den Punkten x und ξ trifft, welche aus einander durch die aufzustellende Transformation hervorgehen. Die lineare Beziehung wird dadurch hergestellt, dass man t als Pol einer Ebene u in Bezug auf die Fläche (1) betrachtet, τ aber als den dieser Ebene u in einem willkürlichen linearen Complexe zugeordneten Punkt, so dass

$$t_i = A_{i1}\, u_1 + A_{i2}\, u_2 + A_{i3}\, u_3 + A_{i4}\, u_4 \tag{2}$$

$$\tau_i = \alpha_{i1}\, u_1 + \alpha_{i2}\, u_2 + \alpha_{i3}\, u_3 + \alpha_{i4}\, u_4, \tag{3}$$

wo A_{ik} die Unterdeterminanten der a_{ik} bedeuten, während mit $\alpha_{ik} = -\alpha_{ki}$ willkürliche Parameter bezeichnet werden. Die fragliche eigentliche Transformation ist dann durch die Gleichungen

$$x_i = \varkappa\, t_i + \lambda\, \tau_i, \qquad \xi_i = \varkappa\, t_i - \lambda\, \tau_i \tag{4}$$

dargestellt, aus welchen man die Grössen u_i zu eliminiren hat. Zu dem Zwecke bildet man aus (4) durch Addition:

$$x_i + \xi_i = 2\varkappa\,(A_{i1}\, u_1 + A_{i2}\, u_2 + A_{i3}\, u_3 + A_{i4}\, u_4). \tag{5}$$

Hieraus und aus den ersten vier Gleichungen (4) ergibt sich durch Elimination der u_i:

$$\begin{vmatrix} x_1 & p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ x_2 & p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ x_3 & p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} \\ x_4 & p_{41} & p_{42} & p_{43} & p_{44} \\ x_i + \xi_i & 2\varkappa A_{11} & 2\varkappa A_{12} & 2\varkappa A_{13} & 2\varkappa A_{14} \end{vmatrix} = 0. \tag{6}$$

Für $i = 1, 2, 3, 4$ sind hierdurch die ξ_i mittelst der x_i ausgedrückt; es ist $p_{ik} = \varkappa A_{ik} + \lambda \alpha_{ik}$ gesetzt. Die aufgelöste Transformation erhält man durch Ersetzen von $\varkappa A_{ik} + \lambda \alpha_{ik}$ durch $\varkappa A_{ik} - \lambda \alpha_{ik}$.

2. Während die Punkte t bisher beliebig waren, müssen sie durch lineare Bedingungen beschränkt werden, um die uneigentlichen Transformationen zu liefern. Durch diese Ueberlegung geleitet, habe ich die letzteren a. a. O. in folgender Form aufgestellt, in denen zunächst die Punkte t auf eine Ebene v, die Punkte τ auf eine conjugirte Ebene w beschränkt werden:

$$
(7) \qquad \begin{aligned}
x_i &= \varkappa \frac{1}{2} \frac{\partial \Psi}{\partial u_i} + \lambda (v\, w\, u)_i + \nu\, \eta_i, \\
\xi_i &= \varkappa \frac{1}{2} \frac{\partial \Psi}{\partial u_i} + \lambda (v\, w\, u)_i - \nu\, \eta_i.
\end{aligned}
$$

Hier ist η der Pol der Ebene v; $\Psi = 0$ ist die Gleichung der Schnittcurve dieser Ebene mit der Fläche (1) in Ebenencoordinaten u, so dass

$$
(8) \qquad \Psi = \begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & u_1 & v_1 \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & u_2 & v_2 \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & u_3 & v_3 \\
a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & u_4 & v_4 \\
u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & 0 & 0 \\
v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & 0 & 0
\end{vmatrix}
$$

Die Punkte τ erfüllen eine zu v conjugirte Ebene w, die folglich der Bedingung

$$
(9) \qquad \Sigma \Sigma A_{ik} v_i w_k = 0
$$

genügt; und $(v\, w\, u)_i$ ist der Factor von w_i in der Determinante $\Sigma \pm \omega_1 v_2 w_3 u_4$. Man könnte zunächst versuchen, die Punkte τ ganz unbeschränkt variiren zu lassen, also zu setzen:

$$
\tau_i = \mu' (v\, w'\, u)_i + \mu'' (v\, w''\, u)_i + \nu\, \eta_i.
$$

Diese Punkte liegen dann von selbst in derjenigen durch die Gleichungen

$$w_i = \mu' w_i + \mu'' w_i''.$$

bestimmten Ebene des Büschels $\mu' w' + \mu'' w''$, welche durch den Punkt η geht. Die Punkte x sind also in der That an eine feste Ebene gebunden.

Die Gleichungen (7) sind den Gleichungen (5) darin genau analog, dass die x_i und ξ_i durch Hülfsvariable u_i mit einander in Verbindung gesetzt werden. Herr Voss erstrebt a. a. O. direct die Aufstellung einer zu (6) analogen Gleichung. Eine solche ergibt sich in der That durch Elimination der u_i aus den Gleichungen (7). Ich hatte a. a. O. diese Elimination mit Hülfe derjenigen beiden Ebenen bewerkstelligt, welche dem durch die Ebenen v und w bestimmten Büschel angehören und die Fläche (1) berühren; einfacher führt der folgende Weg zum Ziele.

Setzen wir in bekannter Weise

$$\sum v_i x_i = v_x, \qquad \sum v_i \eta_i = v_\eta,$$

so ergibt sich aus (7):

$$v_x = \nu v_\eta, \tag{10}$$

denn es ist offenbar

$$\sum \frac{\partial \Psi}{\partial u_i} v_i = 0.$$

Sei ferner

$$\Psi_{ik} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial u_i \partial u_k}, \qquad q_{ik} = \frac{\partial (v w u)_i}{\partial u_k} = -q_{ki}, \tag{11}$$

so erscheinen die ersten vier Gleichungen (7) in der Form

$$x_i v_\eta - \eta_i v_x = v_\eta \sum_k (\varkappa \Psi_{ik} + \lambda q_{ik}) u_k, \tag{12}$$

und an Stelle von (5) haben wir:

$$x_i + \xi_i = 2\varkappa (\Psi_{i1} u_1 + \Psi_{i2} u_2 + \Psi_{i3} u_3 + \Psi_{i4} u_4). \tag{13}$$

Wegen der schon bei Ableitung von (12) benutzten Relationen

$$(14) \qquad \sum \Psi_{ik} v_k = 0, \qquad \sum q_{ik} v_k = 0$$

ist von den vier Gleichungen (12) eine die Folge der übrigen; aus diesen Gleichungen (12) und einer Gleichung (13) können die u_i nicht unmittelbar durch Determinantenbildung eliminirt werden. Wegen der Relationen (14) ändern sich weder die Gleichungen (12), noch (13), wenn man u_k durch $u_k + \mu v_k$ ersetzt; durch passende Wahl von μ kann man es erreichen, dass diese Ebene $u + \mu v$ durch den Pol η von v geht. Wir können daher annehmen, dass die in (12) und (13) vorkommenden Ebenen u alle durch η hindurchgehen, d. h. nur eine zweifach unendliche Mannigfaltigkeit bilden; und dann hat die Elimination keine Schwierigkeiten. Fügen wir nämlich die Bedingung

$$(15) \qquad \sum u_i \eta_i = 0$$

hinzu, so ergibt sich aus 3 Gleichungen (12) und einer Gleichung (13)

$$(16) \qquad \begin{vmatrix} x_1 v_\eta - \eta_1 v_x & \varkappa \Psi_{11} & \cdot & \cdot & \varkappa \Psi_{14} + \lambda q_{14} \\ x_2 v_\eta - \eta_2 v_x & \varkappa \Psi_{21} + \lambda q_{21} & \varkappa \Psi_{22} & \cdot & \varkappa \Psi_{24} + \lambda q_{24} \\ x_3 v_\eta - \eta_3 v_x & \varkappa \Psi_{31} + \lambda q_{31} & \cdot & \varkappa \Psi_{33} & \varkappa \Psi_{34} + \lambda q_{34} \\ v_\eta (x_i + \xi_i) & 2\varkappa \Psi_{i1} & 2\varkappa \Psi_{i2} & 2\varkappa \Psi_{i3} & 2\varkappa \Psi_{i4} \\ 0 & \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & \eta_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Indem man aus den vier Gleichungen (12), einer Gleichung (13) und aus (15) die Grössen v_x, v_η und u_i eliminirt, erhält man dasselbe Resultat in der mehr symmetrischen Gestalt:

$$(17) \qquad \begin{vmatrix} \eta_1 & x_1 & p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ \eta_2 & x_2 & p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ \eta_3 & x_3 & p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} \\ \eta_4 & x_4 & p_{41} & p_{42} & p_{43} & p_{44} \\ 0 & x_i + \xi_i & 2\varkappa \Psi_{i1} & 2\varkappa \Psi_{i2} & 2\varkappa \Psi_{i3} & 2\varkappa \Psi_{i4} \\ 0 & 0 & \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & \eta_4 \end{vmatrix} = 0,$$

wo

$$p_{ik} = \varkappa \Psi_{ik} + \lambda q_{ik}, \qquad q_{ii} = 0, \qquad q_{ik} = - q_{ki} = v_i w_k - w_i v_k.$$

Die Gleichung (16) oder (17) tritt an Stelle von (4); sie hat mit letzterer Gleichung die Eigenschaft gemein, dass in den Elementen p_{ik} die Factoren von $\varkappa$ für sich eine symmetrische, die Factoren von λ für sich eine windschiefe Determinante bilden.

3. Auf letztere Eigenschaft legt Herr Voss a. a. O. besonderes Gewicht. Um aber das gefundene Resultat in die Voss'sche Form zu bringen, sind noch einige Umformungen nöthig.

Die in (12) und (13) vorkommenden Ebenen u bilden einen Bündel, da sie an die Bedingung (15) gebunden wurden; die Coordinaten u_i können daher durch diejenigen von drei festen Ebenen w', w'', w''' und durch drei Parameter μ_1, μ_2, μ_3 (ternäre Coordinaten im Bündel) ausgedrückt werden, so dass

$$u_i = \mu_1 w'_i + \mu_2 w''_i + \mu_3 w'''_i. \tag{18}$$

Führt man diese Werthe in (12) ein, multiplicirt bezw. mit w'_i, w''_i, w'''_i und addirt, so ergeben sich die drei Gleichungen:

$$\begin{aligned} w'_x &= \mu_1 \pi_{11} + \mu_2 \pi_{12} + \mu_3 \pi_{13}, \\ w''_x &= \mu_1 \pi_{21} + \mu_2 \pi_{22} + \mu_3 \pi_{23}, \\ w'''_x &= \mu_1 \pi_{31} + \mu_2 \pi_{32} + \mu_3 \pi_{33}, \end{aligned} \tag{19}$$

wo zur Abkürzung

$$\pi_{ik} = \varkappa P_{ik} + \lambda Q_{ik}, \qquad P_{ik} = \sum \sum \Psi_{rs} w_r^{(i)} w_s^{(k)} = P_{ki}, \tag{20}$$
$$Q_{ik} = \sum \sum q_{rs} w_r^{(i)} w_s^{(k)} = - Q_{ki}, \qquad Q_{ii} = 0$$

gesetzt ist. Die Elimination der Grössen μ_1, μ_2, μ_3 aus (19) und (13) ergibt endlich:

$$\begin{vmatrix} w'_x & \pi_{11} & \pi_{12} & \pi_{13} \\ w''_x & \pi_{21} & \pi_{22} & \pi_{23} \\ w'''_x & \pi_{31} & \pi_{32} & \pi_{33} \\ (x_i + \xi_i) & \Pi_{i1} & \Pi_{i2} & \Pi_{i3} \end{vmatrix} = 0; \tag{21}$$

hierin ist: $\Pi_{ik} = 2\varkappa \sum_r \Psi_{ir} w_r^{(k)}$. Diese letzte Gleichung ist mit der von Herrn Voss für diesen Fall aufgestellten identisch. Die Elemente π_{ik} setzen sich wieder aus Elementen $P_{ik} = P_{ki}$ und Elementen $Q_{ik} = - Q_{ki}$ zusammen; von letzteren kommen nur drei (Q_{12}, Q_{13}, Q_{23}) vor, die keiner weiteren Bedingung genügen, während in (17) sechs Elemente q_{ik} auftreten, die noch an die zwischen Liniencoordinaten geltende Identität gebunden sind.

Die Gleichung (21) hängt nur scheinbar von den Grössen w_i', w_i'', w_i''' ab; man kann diese durch irgend welche lineare Combination $\nu_1 w_i' + \nu_2 w_i'' + \nu_3 w_i'''$ ersetzen, ohne das Resultat zu ändern.

Die zur Elimination angewandte Methode wird illusorisch, wenn η in der Ebene v liegt, d. h. wenn letztere Ebene die Fläche $f = 0$ berührt. Dann folgt aus (7) $\nu = \infty$; es ergibt sich also die Transformation $x_i = - \xi_i$, welche jede Fläche zweiter Ordnung in sich überführt.

Will man kanonische Formen für die einzelnen Fälle herstellen, so muss besonders berücksichtigt werden, ob die Fläche $f = 0$ von der Schnittlinie der Ebenen v und w berührt wird oder nicht (vgl. „Vorlesungen“ a. a. O. p. 369 f.).

4. Die Punkte t mögen wieder eine Ebene v erfüllen, die Punkte τ dagegen auf eine bestimmte Gerade beschränkt werden. Der Ansatz würde wieder durch (7) gegeben sein, wenn man die Annahme hinzufügt, dass zwischen λ und ν eine lineare Relation besteht. Da aber ν durch (10) bestimmt ist, so kann eine solche Relation nicht bestehen; es bleibt nur der Fall $\nu = 0$, wo alle Punkte τ mit dem Pole η zusammenfallen (vgl. die Gleichungen (23) a. a. O. p. 369).

5. Die Punkte t mögen auf eine gerade Linie beschränkt werden, also gleichzeitig in zwei Ebenen (v und w) liegen; es seien

$$q_{ik} = v_i w_k - w_i v_k \tag{22}$$

die Coordinaten der Schnittlinie beider Ebenen; die Punkte τ seien keiner Beschränkung unterworfen. Wir setzen

$$(23)\qquad \Phi = \begin{vmatrix} a_{11} & . & . & a_{14} & u_1 & v_1 & w_1 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ a_{41} & . & . & a_{44} & u_4 & v_4 & w_4 \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & 0 & 0 & 0 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & 0 & 0 & 0 \\ w_1 & w_2 & w_3 & w_4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

so dass die Gleichung $\Phi = 0$ in Ebenencoordinaten u_i die Gleichung desjenigen Punktepaares darstellt, in welchem die Fläche $f = 0$ von der Geraden q getroffen wird. Es sei t der Pol der Ebene u in Bezug auf dieses Punktepaar, also:

$$(24)\qquad t_i = \frac{1}{2}\frac{\partial \Phi}{\partial u_i}.$$

Bezeichnen wir mit η den Pol der Ebene v, mit ϑ den Pol der Ebene w, mit $(u\,v\,w)$ den Schnittpunkt der Ebenen u, v und w, so können wir

$$(25)\qquad \tau_i = \varrho_1\,\eta_i + \varrho_2\,\vartheta_i + \varrho_3\,(u\,v\,w)_i$$

setzen. Die Polarebene des Punktes t nämlich in Bezug auf die Fläche $f = 0$ geht durch die Pole η und ϑ der Ebenen v und w, in deren Schnittlinie t nach (24) liegt, und durch den vierten harmonischen Punkt von t in Bezug auf das Punktepaar $\Phi = 0$, d. h. durch den Punkt $(u\;v\;w)$; die Gleichungen (25) stellen also in der That einen beliebigen Punkt dieser Polarebene dar. Letztere dreht sich um die Gerade q, wenn u variirt; der Punkt τ nimmt also in der That alle möglichen Lagen im Raume an. Aus (24) und (25) erhalten wir nach (4) die Transformationsformeln:

$$(26)\qquad \begin{aligned} x_i &= \frac{\varkappa}{2}\frac{\partial \Phi}{\partial u_i} + \lambda (u v w)_i + \nu \eta_i + \nu' \vartheta_i, \\ \xi_i &= \frac{\varkappa}{2}\frac{\partial \Phi}{\partial u_i} - \lambda (u v w)_i - \nu \eta_i - \nu' \vartheta_i. \end{aligned}$$

Durch Addition ergibt sich

$$(27)\qquad x_i + \xi_i = \varkappa \frac{\partial \Phi}{\partial u_i} = 2\varkappa (\Phi_{i1} u_1 + \Phi_{i2} u_2 + \Phi_{i3} u_3 + \Phi_{i4} u_4),$$

ferner durch Multiplication mit v_i bez. w_i und Addition

$$v_x = \nu v_\eta + \nu' v_\vartheta, \qquad w_x = \nu w_\eta + \nu' w_\vartheta,$$

demnach durch Auflösung:

$$\nu W = v_x w_\vartheta - w_x v_\vartheta, \qquad \nu' W = - v_x w_\eta + w_x v_\eta,$$

wo:

$$W = v_\eta w_\vartheta - w_\eta v_\vartheta.$$

Dieser Ausdruck ist nur gleich Null, wenn q zur Erzeugenden der Fläche wird. In dem Falle würden alle Punkte t auf der Fläche liegen, also mit x und ξ zusammenfallen; der Fall ist also auszuschliessen. Durch Einsetzen der für ν und ν' gefundenen Werthe gehen die Gleichungen (26), wenn noch zur Abkürzung

$$(28)\qquad V_i = W x_i - \eta_i (v_x w_\vartheta - w_x v_\vartheta) + \vartheta_i (v_x w_\eta - w_x v_\eta)$$

$$= \begin{vmatrix} x_i & \eta_i & \vartheta_i \\ v_x & v_\eta & v_\vartheta \\ w_x & w_\eta & w_\vartheta \end{vmatrix}$$

gesetzt wird, über in

$$(29)\qquad V_i = \frac{\varkappa}{2}\frac{\partial \Phi}{\partial u_i} + \lambda (u v w)_i.$$

Da die Relationen $\sum V_i v_i = 0$, $\sum W_i v_i = 0$ identisch erfüllt sind, sind zwei der Gleichungen (25) eine Folge der beiden übrigen. Die Elimination der u_i wird dadurch möglich, dass sich die Gleichungen (29) nicht ändern, wenn man u_i durch $u_i + \mu v_i + \mu' w_i$ ersetzt; man kann in Folge dessen die ursprünglich willkürliche Ebene u der Bedingung unterwerfen, nur beliebige Punkte zu geben, z. B. durch die Punkte η und ϑ. Zu den Gleichungen (27) und (29) können wir somit die Gleichungen

$$(30) \qquad u_\eta = 0, \qquad u_\vartheta = 0$$

hinzufügen, und die Elimination der u führt zu den Transformationsformeln:

$$(30) \qquad \begin{vmatrix} V_1 & \varkappa \Phi_{11} & . & . & \varkappa \Phi_{14} + \lambda q_{14} \\ V_2 & \varkappa \Phi_{21} + \lambda q_{21} & . & . & \varkappa \Phi_{24} + \lambda q_{24} \\ W(x_i + \xi_i) & 2 \varkappa \Phi_{i1} & . & . & 2 \varkappa \Phi_{i2} \\ 0 & \eta_1 & . & . & \eta_4 \\ 0 & \vartheta_1 & . & . & \vartheta_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Dasselbe Resultat erhält man aus (26), (27) und (30) durch Elimination der Grössen u_i, ν, ν' in der symmetrischen Form

$$(31) \qquad \begin{vmatrix} \vartheta_1 & \eta_1 & x_1 & \varkappa \Phi_{11} & . & . & \varkappa \Phi_{14} + \lambda q_{14} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ \vartheta_4 & \eta_4 & x_4 & \varkappa \Phi_{41} + \lambda q_{41} & . & . & \varkappa \Phi_{44} \\ 0 & 0 & x_i + \xi_i & 2 \varkappa \Phi_{i1} & . & . & 2 \varkappa \Phi_{i4} \\ 0 & 0 & 0 & \eta_1 & . & . & \eta_4 \\ 0 & 0 & 0 & \vartheta_1 & . & . & \vartheta_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Um die Voss'sche Form dieser Bedingung zu erhalten, bezeichnen wir mit w' und w'' irgend zwei Ebenen, welche den Bedingungen (30) genügen (d. h. durch die conjugirte Polare der Linie q hindurchgehen). Dann ist

$$u_i = \mu_1 w_i' + \mu_2 w_i'',$$

und die Gleichungen (26) ergeben:

$$(32) \qquad w_x' = \mu_1 \pi_{11} + \mu_2 \pi_{12}, \qquad w_x'' = \mu_1 \pi_{21} + \mu_2 \pi_{22},$$

wo wieder

$$\pi_{ik} = \varkappa\, P_{ik} + \lambda\, Q_{ik},$$

und:

$$(33)\quad \begin{array}{l} P_{11} = \sum\sum \Phi_{ik} w'_i w'_k,\ P_{12} = \sum\sum \Phi_{ik} w'_i w''_k,\ P_{22} = \sum\sum \Phi_{ik} w''_i w''_k, \\ Q_{11} = 0,\ Q_{12} = -Q_{21} = \sum\sum q_{ik} w'_i w''_k = (v w w' w'') = \sum q_{ik} q'_{lm}, \end{array}$$

wenn q'_{lm} die Coordinaten der conjugirten Polare von q bedeuten.

Machen wir noch

$$\Pi_{i1} = 2\varkappa \sum \Phi_{ik} w'_k, \qquad \Pi_{i2} = 2\varkappa \sum \Phi_{ik} w''_k,$$

so ergibt sich durch Elimination der Grössen μ_1, μ_2 aus (32) und (27) das Resultat (31) in der Gestalt:

$$(34)\qquad \begin{vmatrix} w'_x & \pi_{11} & \pi_{12} \\ w''_x & \pi_{21} & \pi_{22} \\ x_i + \xi_i & \Pi_{i1} & \Pi_{i2} \end{vmatrix} = 0,$$

womit die von Voss angegebene Form hergestellt ist.

6. Da die Punkte t durch eine gerade Anzahl linearer Bedingungen ($v_t = 0$, $w_t = 0$) beschränkt werden, so stellen die Gleichungen (26), bez. (30), (31) oder (34) nach den allgemeinen Sätzen des Herrn Löwy (a. a. O. p. 23) eine eigentliche Transformation dar. In der That, sei

$$f = 2\, X_1\, X_4 + 2\, X_2\, X_3,$$

und die Ebene v möge durch $X_2 = 0$, w durch $X_3 = 0$ dargestellt werden. Es ist $\Phi = 2\, U_1\, U_4$; der Punkt η hat die Coordinaten 0, 0, 1, 0, ϑ hat die Coordinaten 0, 1, 0, 0. Man findet also aus (25):

$$\begin{array}{ll} X_1 = (\varkappa + \lambda)\, U_4, & \Xi_1 = (\varkappa - \lambda)\, U_4, \\ X_2 = \nu', & \Xi_2 = -\nu', \\ X_3 = \nu, & \Xi_3 = -\nu, \\ X_4 = (\varkappa - \lambda)\, U_1, & \Xi_4 = (\varkappa + \lambda)\, U_1, \end{array}$$

und durch Auflösung:

$$(35)\quad X_1 = \frac{k+\lambda}{k-\lambda}\,\Xi_1,\ X_2 = -\,\Xi_2,\ X_3 = -\,\Xi_3,\ X_4 = \frac{k-\lambda}{k+\lambda}\,\Xi_4.$$

Die Determinante der Gleichungen ist gleich $+1$, wie bei der allgemeinen eigentlichen Transformation. Den hier behandelten Fall hatte ich bei meiner Aufzählung der eigentlichen Substitutionen nicht explicite angegeben; Herr Löwy hat für ihn (a. a. O. p. 27) die Formeln (35) aufgestellt. Es ist dies einer der von Herrn Frobenius aufgestellten Grenzfälle; in der That ergeben sich die Formeln (35) aus der kanonischen Form der allgemeinen eigentlichen Substitution (a. a. O. p. 364):

$$X_1 = \frac{\lambda+\lambda_1}{\lambda-\lambda_1}\,\Xi_1,\ X_2 = \frac{\lambda+\lambda_3}{\lambda-\lambda_3}\,\Xi_2,\ X_3 = \frac{\lambda-\lambda_3}{\lambda+\lambda_3}\,\Xi_3,\ X_4 = \frac{\lambda-\lambda_1}{\lambda+\lambda_1}\,\Xi_4,$$

wenn man λ_3 unendlich gross werden lässt.

7. Sollen die Punkte τ eine einfach unendliche Mannigfaltigkeit erfüllen, während die Punkte t wieder auf die Gerade q beschränkt werden, so müssen die Punkte τ die conjugirte Polare der Geraden q bilden, damit die Verbindungslinie zweier Punkte t und τ die Fläche (1) in zwei zu diesen Punkten harmonischen Punkten trifft. Es ist in den vorstehenden Formeln (25) $\varrho_3 = 0$, oder in (26) $\lambda = 0$ zu setzen. Die dann aus (35) hervorgehende kanonische Form

$$X_1 = \Xi_1,\ X_2 = -\,\Xi_2,\ X_3 = -\,\Xi_3,\ X_4 = \Xi_4$$

habe ich a. a. O. bereits besonders (als eine eingentliche Transformation) erwähnt.

8. Betrachten wir jetzt eine quadratische Form von n homogenen Variabeln $x_1, x_2 \ldots . x_n$ und deren Transformation in sich. Die Gleichung

$$f = \sum\sum a_{ik}\, x_i\, x_k = 0,$$

deren Determinante nicht verschwinden möge, stellt eine in der gegebenen M_{n-1} (Mannigfaltigkeit von $n-1$ Dimensionen) gelegene $M^{(2)}_{n-2}$ dar (d. h. Mannigfaltigkeit von $n-2$ Dimensionen, die durch eine Gleichung 2^ter^ Ordnung bestimmt wird). Die allgemeinste Transformation der $M^{(2)}_{n-2}$ in sich wird dann nach Cayley und Frobenius durch die Gleichungen

$$(36) \qquad x_i = \varkappa\, t_i + \lambda\, \tau_i, \qquad \xi_i = \varkappa\, t_i - \lambda\, \tau_i,$$

dargestellt, wenn:

$$(37) \qquad t_i = \sum_k A_{ik} u_k; \qquad \tau_i = \sum_k \alpha_{ik} u_k.$$

wo A_{ik} die Unterdeterminanten der a_{ik} darstellen und wo $\alpha_{ik} = -\alpha_{ki}$: der Beweis kann in derselben Weise geometrisch geführt werden, wie ich es a. a. O. für $n = 4$ that. Ist n eine gerade Zahl, so stellen die zweiten Gleichungen (2) ein Nullsystem dar; die Punkte τ sind dann keinen Bedingungen unterworfen. Ist n eine ungerade Zahl, so verschwindet die Determinante der Coefficienten α_{ik} identisch; die Punkte τ müssen also auf eine lineare $M^{(1)}_{n-2}$ beschränkt werden, damit die Gleichungen auflösbar werden.[1])

Für jede Zahl n hat man verschiedene Fälle zu unterscheiden, je nach Lage des durch die Gleichung

$$(38) \qquad \sum \alpha_{ik} (x_i y_k - y_i x_k) = 0$$

dargestellten Gebildes zu der $M^{(2)}_{n-2}$ $f = 0$, und je nachdem die Determinante oder die ersten oder auch höhere Unterdeterminanten der Grösse α_{ik} verschwinden.

Um alle möglichen Fälle zu umfassen, sind die Gleichungen (37) durch andere zu ersetzen, deren Determinanten verschwinden. Das erste Gleichungssystem kann dabei im Uebrigen willkürlich gewählt werden; das zweite System muss der Bedingung $\sum u_i \tau_i = 0$ identisch genügen, wenn u_i die Coordinaten der Polar-$M^{(1)}_{n-2}$ von t sind. Die Punkte t werden dadurch auf eine lineare oder auf mehrere lineare Mannigfaltigkeiten beschränkt; für die Punkte τ sind alle dann noch bleibenden Möglichkeiten in's Auge zu fassen.

---

[1]) Vgl. z. B. Baltzer, Theorie der Determinanten § 8 (p. 68 der dritten Auflage).

9. Um Punkte t in allgemeinster Weise auf m lineare Mannigfaltigkeiten

$$(39) \qquad \sum v_i^{(1)} t_i = 0, \quad \sum v_i^{(2)} t_i = 0, \quad \ldots \ldots \sum v_i^{(m)} t_i = 0,$$

d. i. auf die diesen $M_{n-2}^{(1)}$ gemeinsame $M_{n-m-1}^{(1,1,\ldots,1)}$ zu beschränken, werden wir

$$(40) \qquad t_i = \frac{1}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial u_i}$$

setzen, wo:

$$(41) \qquad \Phi = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} & u_1 & v_1^{(1)} & \ldots & v_1^{(m)} \\ \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} & u_n & v_n^{(1)} & \ldots & v_n^{(m)} \\ u_1 & \ldots & u_n & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ v_1^{(1)} & \ldots & v_n^{(1)} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ v_1^{(m)} & \ldots & v_n^{(m)} & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{vmatrix}.$$

Der Punkt t ist dann der Pol der durch die Gleichungen (39) zusammen mit der Gleichung $u_x = 0$ bestimmten M_{n-m-2} in Bezug auf diejenige quadratische $M_{n-m-2}^{(2,1\ldots 1)}$, welche auf der Fläche $f = 0$ durch die linearen Mannigfaltigkeiten (39) ausgeschnitten wird.

Unter τ sollte irgend ein Punkt der Polarebene von t in Bezug auf die Fläche $f = 0$ verstanden werden. Da t auf den m linearen M_{n-2} (39) liegt, so liegen die Pole $\eta^{(1)}, \eta^{(2)}, \ldots \eta^{(m)}$ dieser Mannigfaltigkeiten auf der Polarebene von t. Sind $\zeta^{(1)}, \zeta^{(2)} \ldots\ldots \zeta^{(n-m-1)}$ irgend welche andere Punkte dieser Polarebene, so kann man daher setzen

$$\tau_i = \varrho_1 \eta_i^{(1)} + \varrho_2 \eta_i^{(2)} + \ldots\ldots + \varrho_m \eta_i^{(m)} + \varrho_{m+1} \zeta_i^{(1)} + \ldots\ldots + \varrho_{n-1} \zeta^{(n-m-1)}.$$

Der Punkt τ muss linear von den in (40) vorkommenden Hilfs-Variabeln u_i abhängen. Man wird diese Abhängigkeit am einfachsten dadurch zum Ausdrucke bringen, dass man die

Punkte $\zeta^{(l)}$ auf den m Mannigfaltigkeiten (39) wählt, gleichzeitig aber in der Mannigfaltigkeit u. Die Punkte $\zeta^{(l)}$ liegen dann von selbst in der Polar-$M^{(1)}_{n-2}$ des Punktes t, da die Mannigfaltigkeiten (39) von ihm und von der Ebene u in derselben linearen M_{n-m-2} geschnitten werden. Die Punkte $\zeta^{(i)}$ müssen also den $m+1$ Bedingungen

$$(42)\quad \sum u_i \zeta_i^{(l)} = 0, \quad \sum v_i^{(1)} \zeta_i^{(l)} = 0, \quad \sum v_i^{(2)} \zeta_i^{(l)} = 0, \ldots \sum v_i^{(m)} \zeta_i^{(l)} = 0$$

genügen. Man befriedigt dieselben in allgemeinster Weise, indem man

$$(43)\quad \begin{aligned} &\varrho_{m+1}\, \zeta_i^{(1)} + \varrho_{m+2}\, \zeta_i^{(2)} + \ldots + \varrho_{n-1}\, \zeta_i^{(n-m-1)} \\ &= (u\, v^{(1)}\, v^{(2)} \ldots v^{(m)}\, w^{(1)} \ldots w^{(n-m-2)})_i \end{aligned}$$

setzt, wenn die rechte Seite den Coefficienten von ω_i in der n-reihigen Determinante

$$(44)\quad \Omega = (\omega\, u\, v^{(1)} \ldots v^{(m)}\, w^{(1)} \ldots w^{(n-m-2)})$$

bedeutet, und wenn die $v_i^{(j)}$ wieder die Coordinaten der Mannigfaltigkeiten (39) bezeichnen, die $w_i^{(k)}$ dagegen Symbole bezeichnen, die für sich genommen keine Bedeutung haben, während erst einer $(n-m-2)$-reihigen aus den $w_i^{(k)}$ gebildeten Unterdeterminante eine wirkliche Bedeutung zukommt. Durch Einführung dieser Symbole w bedienen wir uns derselben Schreibweise, die Clebsch für die Theorie der Complexe im Raume von drei Dimensionen eingeführt hat.

Ist insbesondere $m = n-3$, so kommt nur eine Reihe von Grössen w in Betracht; diese haben dann wirkliche Bedeutung und sind die Coordinaten einer linearen $M^{(1)}_{n-2}$. Letztere enthält alle $n-3$ Punkte $\eta^{(j)}$ und die beiden Punkte $\zeta^{(1)}$, $\zeta^{(2)}$, die hier allein zu berücksichtigen sind. Die Punkte τ liegen daher für $m = n-3$ in einer festen linearen $M^{(1)}_{n-2}\, w$, welche zu den $n-3$ Mannigfaltigkeiten (39) conjugirt ist in Bezug auf die Fläche $f = 0$, sonst aber willkürlich gewählt werden kann (also noch von 2 Parametern abhängt).

Setzt man die gefundenen Werthe t_i und τ_i in die Gleichungen (36) ein, so ergibt sich

$$(45)\quad \begin{aligned} x_i &= \frac{\varkappa}{2}\frac{\partial \Phi}{\partial u_i} + \lambda (u v^{(1)} \dots . v^{(m)} w^{(1)} \dots . w^{(n-m-2)})_i + \nu_1 \eta_i^{(1)} + \dots . + \nu_m \eta_i^{(m)}, \\ \xi_i &= \frac{\varkappa}{2}\frac{\partial \Phi}{\partial u_i} - \lambda (u v^{(1)} \dots . v^{(m)} w^{(1)} \dots . w^{(n-m-2)})_i - \nu_1 \eta_i^{(1)} - \dots . - \nu_m \eta_i^{(m)}. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen stellen in allgemeinster Weise alle diejenigen linearen Transformationen der Mannigfaltigkeit f in sich dar, welche in den Gleichungen (36) und (37) nicht enthalten sind. Die Transformationsformeln ergeben sich durch Elimination der Grössen ν_j und u_i.

Für $n = 4$, $m = 1$ erhalten wir aus (45) die Formeln (7), insbesondere für $\lambda = 0$ die in Nr. 4 besprochenen Gleichungen; für $n = 4$ und $m = 2$ ergeben sich die Gleichungen (26).

Die abgeleiteten Resultate stimmen mit denen des Herrn Löwy (a. a. p. 17) im Wesentlichen überein. Wir benutzten zur Bestimmung eines Punktes τ einen Punkt, welcher in der von den Mannigfaltigkeiten $v^{(j)}$ und u gemeinsam bestimmten M_{n-m-2} liegt, sich also durch $n-m-1$ specielle solche Punkte $\zeta^{(l)}$ ausdrücken lässt, wie es in (43) geschah. Diese Punkte $\zeta^{(l)}$ genügen den Gleichungen (42). Herr Löwy benutzt statt dessen nur $n-m-2$ specielle Punkte $\zeta^{(l)}$, die denselben Gleichungen und einer willkürlich angenommenen Gleichung

$$\sum w_i \zeta_i^{(l)} = 0$$

genügen. Die Gesammtzahl der benutzten Parameter wird dadurch beeinflusst, so lange man die w_i als Constante betrachtet. Herr Löwy selbst sieht diese Grössen aber nachträglich als Functionen der u_i an und stellt dadurch die nöthige Allgemeinheit wieder her (a. a. O. p. 26 u. 49).

10. Es handelt sich jetzt darum, die Grössen u_i aus den Gleichungen (45) zu eliminiren. Um die Möglichkeit der Elimination zu zeigen, benutzt Herr Löwy a. a. O. eine Hülfsgleichung höheren Grades in der gleichen Weise, wie ich bei

$n = 4$ eine quadratische Gleichung benutzt hatte. Die Wurzeln jener Gleichung kommen im Resultate der Elimination nur symmetrisch vor, so dass das Resultat nur die Coefficienten der Hülfsgleichung enthält und auch für den Fall, wo Wurzeln zusammenfallen, in Anspruch genommen werden darf. Man kann die Elimination aber allgemein in gleicher Weise ausführen, wie dies oben in Nr. 2, 3 und 5 für $n = 4$ geschah.

Wir setzen:

$$(46)\quad V_i = \begin{vmatrix} x_i & \eta_i^{(1)} & \eta_i^{(2)} & \dots & \eta_i^{(m)} \\ v_x^{(1)} & v_{11} & v_{12} & \dots & v_{1m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \\ v_x^{(m)} & v_{m1} & v_{m2} & \dots & v_{mm} \end{vmatrix} = W x_i + W_1 \eta_i^{(1)} + \dots + W_m \eta_i^{(m)},$$

wo zur Abkürzung

$$v_{jk} = \sum_i v_i^{(j)} \eta_i^{(k)},$$

während mit W_i die ersten Unterdeterminanten bezeichnet sind; insbesondere ist

$$(47)\qquad W = \begin{vmatrix} v_{11} & v_{12} & \dots & v_{1m} \\ v_{21} & v_{22} & \dots & v_{2m} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ v_{m1} & v_{m2} & \dots & v_{mm} \end{vmatrix}.$$

Durch Multiplication der ersten n Gleichungen (45) mit $v_i^{(j)}$ und Addition erhält man für $j = 1, 2, \dots m$ ein System von m Gleichungen zur Berechnung der Grössen $\nu_1, \dots \nu_m$; es wird

$$v_x^{(j)} = \nu_1 v_{j1} + \nu_2 v_{j2} + \dots + \nu_m v_{jm};$$

und hieraus:

$$W (x_i - \nu_1 \eta_i^{(1)} - \nu_2 \eta_i^{(2)} \dots - \nu_m \eta_i^{(m)}) = V_i.$$

Die ersten n Gleichungen (45) werden daher

$$(48)\qquad V_i = \left(\frac{1}{2} \varkappa \frac{\partial \Phi}{\partial u_i} + \lambda \frac{\partial \Omega}{\partial \omega_i}\right) W,$$

wenn mit Ω die Determinante (44) bezeichnet wird. Hierzu tritt die aus (45) folgende Identität

$$(49)\qquad x_i + \xi_i = \varkappa \frac{\partial \Phi}{\partial u_i} = 2\varkappa (\Phi_{i1} u_1 + \Phi_{i2} u_2 + \ldots + \Phi_{im} u_m),$$

wo

$$\Phi_{ik} = \Phi_{ki} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u_i \partial u_k}.$$

Von den Gleichungen (48) sind m eine Folge der übrigen $n-m$; trotzdem wird die Elimination der u_i möglich; denn die Gleichungen ändern sich nicht, wenn man u_i durch

$$u_i + \mu_1 v_i^{(1)} + \mu_2 v_i^{(2)} + \ldots + \mu_m v_i^{(m)}$$

ersetzt. Wir können daher für die Mannigfaltigkeit u noch m lineare Bedingungen hinzufügen, ohne das Resultat zu beeinflussen, z. B. fordern, dass die m Pole $\eta^{(j)}$ der Mannigfaltigkeiten $v^{(j)}$ in der Mannigfaltigkeit u liegen, d. h., dass die m Gleichungen

$$(50)\qquad \sum u_i \eta_i^{(j)} = 0 \text{ für } j = 1, 2, \ldots m$$

erfüllt seien. Die Elimination der Grössen v und u aus den Gleichungen (45), (49) und (50) ergibt dann das Resultat:

$$(51)\qquad \begin{vmatrix} \eta_1^{(1)} & \ldots & \eta_1^{(m)} & x_1 & p_{11} & \ldots & p_{1n} \\ \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \eta_n^{(1)} & \ldots & \eta_n^{(m)} & x_n & p_{n1} & \ldots & p_{nn} \\ 0 & \ldots & 0 & x_i + \xi_i & 2\varkappa\Phi_{i1} & \ldots & 2\varkappa\Phi_{in} \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \eta_1^{(1)} & \ldots & \eta_n^{(1)} \\ \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \eta_1^{(m)} & \ldots & \eta_n^{(m)} \end{vmatrix} = 0;$$

hierin ist $p_{ik} = \varkappa \Phi_{ik} + \lambda q_{ik}$, wo Φ_{ik} dieselbe Bedeutung hat, wie in (49) und

$$q_{ik} = -q_{ki} = \frac{\partial^2 \Omega}{\partial u_k \partial \omega_i} = -\frac{\partial^2 \Omega}{\partial u_i \partial \omega_k}, \quad q_{ii} = 0.$$

Dieselbe Gleichung lässt sich auch in der Form schreiben:

$$
(52) \qquad \begin{vmatrix}
V_1 & p_{11} & \dots & p_{1n} \\
\cdot & \cdot & \dots & \cdot \\
V_{n-m} & p_{n-m,1} & \dots & p_{n-m,n} \\
W(x_i+\xi_i) & 2\varkappa\,\Phi_{i1} & \dots & 2\varkappa\,\Phi_{in} \\
0 & \eta_1^{(1)} & \dots & \eta_n^{(1)} \\
\cdot & \cdot & \dots & \cdot \\
0 & \eta_1^{(m)} & \dots & \eta_n^{(m)}
\end{vmatrix} = 0.
$$

Die in (51) und (52) auftretenden Determinanten kann man wieder auf Determinanten mit weniger Reihen reduciren, wenn man die durch (50) beschränkte Mannigfaltigkeit u mittelst gewisser fester Mannigfaltigkeiten $\omega^{(l)}$ und willkürlicher Parameter μ ausdrückt. Bezeichnen wir also mit $\omega_i^{(1)}, \omega_i^{(2)}, \dots \omega_i^{(n-m)}$ die Coordinaten von $n-m$ linearen, von einander unabhängigen Mannigfaltigkeiten, welche sämmtlich durch die m Pole $\eta^{(j)}$ hindurchgehen, d. h. den Gleichungen

$$\sum \omega_i^{(l)} \eta_i^{(j)} = 0$$

für

$$l = 1, 2, \dots n-m; \qquad j = 1, 2, \dots m$$

genügen (also zu jeder Mannigfaltigkeit $v^{(j)}$ in Bezug auf $f=0$ conjugirt sind), so haben wir

$$u_i = \mu_1\,\omega_i^{(1)} + \mu_2\,\omega_i^{(2)} + \dots + \mu_{n-m}\,\omega_i^{(n-m)}.$$

An Stelle der Gleichungen (19) bezw. (32) erhalten wir jetzt Relationen der Form

$$(53) \qquad \omega_x^{(l)} = \mu_1\,\pi_{l1} + \mu_2\,\pi_{l2} + \dots + \mu_{n-m}\,\pi_{l,n-m}$$

für

$$l = 1, 2, 3, \dots n-m;$$

und hierin ist

$$\pi_{ik} = \varkappa\,P_{ik} + \lambda\,Q_{ik}$$

und weiter

$$(54) \qquad P_{ik} = \sum_r \sum_s \Phi_{rs}\, \omega_r^{(i)}\, \omega_s^{(k)} = P_{ki},$$

$$(55) \qquad Q_{ik} = \sum_r \sum_s \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \omega_r\, \partial u_s}\, \omega_r^{(i)}\, \omega_s^{(k)} = -\, Q_{ki},\ Q_{ii} = 0.$$

Setzen wir endlich noch

$$\Pi_{il} = 2\varkappa \sum_k \Phi_{ik}\, \omega_k^{(l)},$$

so ergibt sich durch Elimination der Parameter μ_l aus den Gleichungen (53) und (49) die gesuchte Transformation der Mannigfaltigkeit $M^{(2)}_{n-2}$ in der Gestalt

$$(56) \qquad \begin{vmatrix} \omega_x^{(1)} & \pi_{11} & \pi_{12} & \dots & \pi_{1\nu} \\ \omega_x^{(2)} & \pi_{21} & \pi_{22} & \dots & \pi_{2\nu} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \omega_x^{(\nu)} & \pi_{\nu 1} & \pi_{\nu 2} & \dots & \pi_{\nu\nu} \\ x_i + \xi_i & \Pi_{i1} & \Pi_{i2} & \dots & \Pi_{i\nu} \end{vmatrix} = 0$$

für $i = 1, 2, 3, \dots n$; dabei ist $\nu = n - m$. Diese Gleichung hat die von Voss betonte Gestalt, indem in ihr eine Determinante mit den Elementen π_{ik} auftritt, die nach (54) und (55) sich aus Elementen $P_{ik} = P_{ki}$ und $Q_{ik} = -\, Q_{ki}$ linear zusammensetzen. Es ist indessen hervorzuheben, dass auch schon in der Gleichung (51) eine analoge Determinante benutzt wurde.

Die Gleichungen (56) stellen die ξ_i als lineare Functionen der x_i dar; die Auflösungen dieser Formeln ergeben sich, wenn man in (56) überall x mit ξ und Q_{ik} mit Q_{ki} vertauscht; denn neben (53) bestehen auch die Gleichungen:

$$\omega_\xi^{(l)} = \mu_1\, \pi'_{l1} + \mu_2\, \pi'_{l2} + \dots + \mu_{n-m}\, \pi'_{l,\,n-m},$$

wo

$$\pi'_{ik} = \varkappa\, P_{ik} - \lambda\, Q_{ik}.$$

11. In Folge unseres geometrischen Ansatzes sind wir sicher, dass die Gleichung $f = o$ durch die aufgestellten Transformationen in sich übergeführt wird; es geht daher die Form

$\sum\sum a_{ik} x_i x_k$ in $M \sum\sum a_{ik} \xi_i \xi_k$ über, wo M einen zu bestimmenden Factor bezeichnet. Diese Bestimmung, die ich a. a. O. für $n = 4$, $m = 0$ und die Herr Löwy für $m = 0$ und beliebiges n durchgeführt hatte, kann in folgender Weise geschehen. Multipliciren wir die beiden Systeme der Gleichungen (45) mit v_i und addiren, so ergibt sich

$$(57) \qquad v_x = v_1 v_{11} + v_2 v_{22} \ldots + v_m v_{mn} = - v_\xi,$$

da $\sum \frac{\partial \Phi}{\partial u_i} v_i = 0$ ist. Multipliciren wir mit a_{ik} und addiren, so folgt:

$$(58) \qquad \begin{aligned} \sum_i a_{ik} x_i &= \frac{\varkappa}{2} \sum_i \frac{\partial \Phi}{\partial u_i} a_{ik} + \lambda \sum_i \frac{\partial \Omega}{\partial \omega_i} a_{ik} + \sum_i \sum_j \nu_j v_i^{(j)} a_{ik}, \\ \sum_i a_{ik} \xi_i &= \frac{\varkappa}{2} \sum_i \frac{\partial \Phi}{\partial u_i} a_{ik} - \lambda \sum_i \frac{\partial \Omega}{\partial \omega_i} a_{ik} - \sum_i \sum_j \nu_j v_i^{(j)} a_{ik}. \end{aligned}$$

Nun erhält man sofort aus (41)

$$\frac{1}{2} \sum \frac{\partial \Phi}{\partial u_i} a_{ik} = - u_k \Psi + v_k^{(1)} \Psi_1 - v_k^{(2)} \Psi_2 + \ldots + (-1)^m v_k^{(m)} \Psi_m,$$

wenn

$$\Psi = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} & v_1^{(1)} & \ldots & v_1^{(m)} \\ \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} & v_n^{(1)} & \ldots & v_n^{(m)} \\ v_1^{(1)} & \ldots & v_n^{(1)} & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ v_1^{(m)} & \ldots & v_n^{(m)} & 0 & \ldots & 0 \end{vmatrix}$$

und

$$\Psi_j = \frac{1}{2} \sum_i \frac{\partial \Psi}{\partial v_i^{(j)}} u_i.$$

Aus (58) erhalten wir daher

$$(59) \qquad \begin{aligned} \frac{1}{2} \sum\sum a_{ik} x_k (x_i + \xi_i) = - \Psi \cdot u_x + v_x^{(1)} \Psi_1 \\ - v_x^{(2)} \Psi_2 + \ldots + (-1)^m v_x^{(m)} \Psi_m \end{aligned}$$

und ebenso:

$$\frac{1}{2}\sum\sum a_{ik}\, x_{ik}\,(x_i + \xi_i) = -\,\Psi\, u_\xi + v_\xi^{(1)}\,\Psi_1$$
$$-\,v_\xi^{(2)}\,\Psi_2 + \ldots + (-1)^m\, v_\xi^{(m)}\,\Psi_m;$$

also mit Benutzung von (57):

$$(60)\qquad \sum\sum a_{ik}\, x_i\, x_k - \sum\sum a_{ik}\,\xi_i\,\xi_k = -\,2\,\Psi\,(u_x - u_\xi).$$

Multipliciren wir die Gleichungen (45) mit u_i und summiren, so folgt wegen (50):

$$u_x = \varkappa\,\Phi = u_\xi.$$

Die rechte Seite von (60) ist also gleich Null; d. h. der Factor M ist gleich 1; die Form $f = \sum\sum a_{ik}\, x_i\, x_k$ bleibt bei unseren Transformationen absolut ungeändert.

Da die Determinante von f sich bei linearer Transformation um das Quadrat der Substitutions-Determinante ändert, so ist dieses Quadrat immer gleich 1, die Substitutions-Determinante selbst gleich ± 1. Welcher Werth zu wählen ist, hängt von der Zahl m ab. Es ergibt sich das einfach, wenn wir zuvor diejenigen linearen $M_{n-2}^{(1)}$ bestimmen, die in sich übergeführt werden.

12. Ist zunächst $m = 0$, so findet man die fest bleibenden Punkte aus den Gleichungen (36) und (37), indem man die Bedingungen

$$(61)\qquad x_i - \varrho\,\xi_i = 0$$

hinzugefügt; dies gibt die Gleichungen

$$\sum_k \left[\varkappa\,(1-\varrho)\,A_{ik} + \lambda\,(1+\varrho)\,a_{ik}\right] u_k = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots n.$$

Die fraglichen n Punkte werden daher durch die Gleichung n^{ten} Grades in μ

$$(62)\qquad \begin{vmatrix} \mu\, A_{11} + a_{11} & \ldots & \mu\, A_{1n} + a_{1n} \\ \cdot & \ldots & \cdot \\ \mu\, A_{n1} + a_{n1} & \ldots & \mu\, A_{nn} + a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

bestimmt. Wegen der Bedingungen $\alpha_{ik} = -\alpha_{ki}$ entspricht jeder Wurzel μ eine andere $-\mu$. Da nun

$$\mu = \frac{\varkappa}{\lambda} \frac{1-\varrho}{1+\varrho}$$

gesetzt wurde, so erhält man $-\mu$ aus μ, indem man ϱ mit $\frac{1}{\varrho}$ vertauscht. Die Wurzeln sind so paarweise einander zugeordnet; ist n eine ungerade Zahl, so muss folglich eine Wurzel $\varrho = +1$ sein. In der That ist in diesem Falle die Determinante der α_{ik}, d. h. das constante Glied in Gleichung (62), gleich Null, also eine Wurzel μ gleich Null. Für ein ungerades n hat daher die charakteristische Fundamentalgleichung unserer Transformation stets die Wurzel $\varrho = +1$.

Verschwindet für ein gerades n die Determinante der α_{ik}, so verschwinden auch alle ersten Unterdeterminanten. Tritt also für $n = 2\nu$ eine Wurzel $\varrho = +1$ auf, so ist dies eine Doppelwurzel, u. s. f. Die Wurzel $\varrho = -1$ dagegen kann (wenn $m = 0$) nie auftreten, wenn die Determinante der α_{ik} von Null verschieden ist; denn $\varrho = -1$ würde eine Wurzel $\mu = \infty$ bedingen. Ebenso kann für $n = 2\nu + 1$ die Wurzel $\varrho = +1$ mehrfach auftreten; verschwinden aber dann alle ersten Unterdeterminanten der α_{ik}, so verschwinden auch alle zweiten Unterdeterminanten; kommt also die Wurzel $\varrho = +1$ doppelt vor, so kommt sie auch dreifach vor, u. s. f. Bei geradem n kann die Wurzel $\varrho = +1$ in der charakteristischen Fundamentalgleichung in gerader Vielfachheit, bei ungeradem n nur in ungerader Vielfachheit auftreten.[1]) Eine analoge Ueberlegung zeigt, dass die Elementartheiler der Gleichung ebenso wie die Wurzeln einander paarweise zugeordnet, und zwar paarweise einander gleich sind.

Für die sich selbst entsprechenden Punkte gilt der Satz, dass sie auf der $M^{(2)}_{n-2}\ f = 0$ liegen, mit Ausnahme des bei ungeradem n der Wurzel $\varrho = +1$ entsprechenden Punktes, und

---

[1]) Vgl. Frobenius, a. a. O.

dass ihre Tangential-$M^{(1)}_{n-2}$ in sich übergeführt werden.[1]) Bei ungeradem n entspricht der Wurzel $\varrho = +1$ ein fester ausserhalb der $M^{(2)}_{n-2}$ $f = 0$ liegender Punkt, dessen Polar-$M^{(1)}_{n-2}$ in sich übergeführt wird.

13. Ist m von Null verschieden, so liefern die Gleichungen (57) sofort m lineare $M^{(1)}_{n-2}$, welche je in sich übergehen; und man erkennt sofort, dass zu jeder $M^{(1)}_{n-2}$ $v^{(j)}$ eine Wurzel $\varrho = -1$ der charakteristischen Fundamentalgleichung gehören muss. Die zugehörigen m Pole $\eta^{(j)}$ bleiben natürlich auch fest; sie genügen den Gleichungen (61) für $\varrho = -1$.

Die übrigen $n - m$ sich selbst zugeordneten Punkte ergeben sich aus den Gleichungen (45), bez. (48) oder (53).

In der durch die Gleichung $f = 0$ und die Gleichungen (39) bestimmten $M^{(2, 1 \ldots 1)}_{n-m-2}$ denken wir uns eine lineare Transformation der $n - m$ Parameter, welche einen Punkt linear bestimmen, derart ausgeführt, dass diese quadratische M_{n-m-2} in sich übergeführt wird. Statt der Punkte der quadratischen M_{n-m-2} können wir ihre Polar-Ebenen in Bezug auf die Gleichung $f = 0$ betrachten; wir erhalten dann eine lineare Transformation, vermöge deren die $(n-m)$ Grössen $\omega^{(l)}_x$ linear durch $\omega^{(l)}_\xi$ derartig ausgedrückt werden, dass die Gesammtheit der linearen $M^{(2)}_{n-2}$, welche durch die m Pole $\eta^{(j)}$ gehen und die $M^{(2)}_{n-2}$ $f = 0$ berühren, in sich übergeführt wird.

Diese Transformation ist uns durch die Gleichungen (53) dargestellt, wenn wir noch hinzufügen:

$$(63) \quad w^{(l)}_\xi = \mu_1 (\varkappa P_{l1} - \lambda Q_{l1}) + \ldots + \mu_{n-m} (\varkappa P_{l, n-m} - \lambda Q_{l, n-m}).$$

Die Gleichungen (53) und (63) stellen zusammen eine Transformation der Art dar, wie wir sie in Nr. 12 betrachtet haben; es ist nur n durch $n - m$ ersetzt worden. Wir können daher folgenden Satz aussprechen:

---

[1]) Vgl. Rosanes, Crelle's Journal Bd. 80; Voss, Math. Annalen Bd. 13 und Löwy a. a. O.

Ausser den m linearen Mannigfaltigkeiten $v^{(j)}$ werden in sich übergeführt:

a) wenn $n-m$ gerade ist, $n-m$ lineare Tangential-Mannigfaltigkeiten von $f=0$, die einander paarweise dadurch zugeordnet sind, dass die ihnen entsprechenden Wurzeln der Fundamentalgleichung zu einander reciproke Werthe besitzen.

b) wenn $n-m$ ungerade ist, eine lineare Mannigfaltigkeit, die im Allgemeinen nicht Tangential-Mannigfaltigkeit ist, und ausserdem $n-m-1$ Tangential-Mannigfaltigkeiten von $f=0$, die einander in gleicher Weise zugeordnet sind.

Die Gleichung vom Grade $n-m$, durch welche die zuletzt erwähnten festen $M_{n-2}^{(1)}$ bestimmt werden, d. h. welche die in den Gleichungen

$$w_x^{(l)} - \varrho^{(l)} w_\xi^{(l)} = 0$$

auftretenden Grössen $\varrho^{(l)}$ bestimmt, wird aus (63) und (53) in der Form

$$\begin{vmatrix} \pi'_{11} & \pi'_{12} & \cdots & \pi'_{1\nu} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \pi'_{\nu 1} & \pi'_{\nu 2} & \cdots & \pi'_{\nu\nu} \end{vmatrix} = 0$$

gefunden, wo $\nu = n-m$ und $\pi'_{ik} = \varkappa(1-\varrho) P_{ik} + \lambda(1+\varrho) Q_{ik}$, während P_{ik} und Q_{ik} wieder durch (54) und (55) definirt sind. Dieselbe Gleichung wird aus (45) in der Form

$$\begin{vmatrix} \eta_1^{(1)} & \cdots & \eta_1^{(m)} & p'_{11} & \cdots & p'_{1n} \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \eta_n^{(1)} & \cdots & \eta_n^{(m)} & p'_{n1} & \cdots & p'_{nn} \\ 0 & \cdots & 0 & \eta_1^{(1)} & \cdots & \eta_n^{(1)} \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & \cdots & 0 & \eta_1^{(m)} & \cdots & \eta_n^{(m)} \end{vmatrix} = 0$$

gewonnen, wo $p'_{ik} = \varkappa(1-\varrho)\,\Phi_{ik} + \lambda(1+\varrho)\,q_{ik}$. Diese Gleichung kann nie eine Wurzel $\varrho = -1$ haben, während die

Wurzel $\varrho = +1$ eine gerade oder ungerade Anzahl von Malen auftreten kann, je nachdem $n-m$ gerade oder ungerade ist. Eine Wurzel -1 könnte in der That nur auftreten, wenn die für $\lambda = 0$ entstehende Gleichung erfüllt wäre; dann aber müsste die den Gleichungen (39) gemeinsame lineare M_{n-m-1} eine Tangential-Mannigfaltigkeit von $f = 0$ sein; alle Punkte t würden in den Knotenpunkt derselben (d. i. den Berührungspunkt) zusammenfallen, und es könnte überhaupt keine Raum-Transformation entstehen.

Ist $n-m$ ungerade, so ist die Determinante der Q_{ik} identisch Null; alle Punkte ξ liegen in einer von u unabhängigen linearen $M^{(1)}_{n-2}$. Dem entsprechend kann man eine Reihe der in Ω und in (45) auftretenden Symbole w als Coordinaten dieser festen $M^{(1)}_{n-2}$ auffassen. Da die Grössen w_i durch $w_i + \sigma_1 v_i^{(1)} + \ldots + \sigma_m v_i^{(m)}$ ersetzt werden, also die Bedingungen

$$\sum w_i \eta_i^{(j)} = 0$$

hinzugefügt werden können, ohne die Gleichungen (45) zu ändern, so folgt in der That

$$\sum w_i x_i = \sum w_i \xi_i = \frac{\varkappa}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial u_i}. \tag{64}$$

Es tritt jedesmal eine Wurzel $\varrho = +1$ der Fundamentalgleichung auf, wenn eine Symbolreihe w durch wirkliche Grössen ersetzt wird. Thut man dies mit einer Reihe von Symbolen, so spielt von selbst, falls $n-m$ gerade ist, eine zweite Reihe die Rolle von wirklichen Grössen u. s. f. Ist $n-m$ ungerade, so gilt dies für eine dritte Reihe von Symbolen, sobald es für eine zweite Reihe gilt, u. s. f. Jede lineare Mannigfaltigkeit w, welche so einer Doppelwurzel $\varrho = +1$ zugehört, bleibt in sich fest, kann aber durch eine andere Mannigfaltigkeit des linearen Systems der $w^{(l)}$ ersetzt werden, insbesondere also auch durch gewisse Tangential-Mannigfaltigkeiten von $f = 0$; auf solche würde man direct geführt werden, wenn man die Doppelwurzel $\varrho = +1$ aus einem Paare einander gleich werdender reciproker Wurzeln entstehen lässt.

Herr Löwy gibt a. a. O. für jeden Fall eine lineare Mannigfaltigkeit w an, die bei der Transformation fest bleibt, d. h. der Bedingung (64) genügt; er berichtigt diese Angabe aber später selbst, indem er in gewissen Fällen die Grössen w wieder von den u_i abhängig denkt.

14. Wir sind jetzt in der Lage, die Determinante der aufgestellten Transformationen, deren Quadrat gleich $+1$ gefunden wurde, zu berechnen. Die Transformation ist dargestellt durch m Gleichungen von der Form

$$v_x^{(j)} = -v_\xi^{(j)} \quad \text{für} \quad j = 1, 2, \ldots m$$

durch μ Gleichungen von der Form

$$w_x^{(l)} = w_\xi^{(l)} \quad \text{für} \quad l = 1, 2, \ldots \mu,$$

endlich durch $\frac{1}{2}(n - m - \mu)$ Paare von Gleichungen der Form

$$\omega_x^{(k)} = \sigma\, \omega_\xi^{(k)}, \quad \omega_x^{(k+1)} = \frac{1}{\sigma}\, \omega_\xi^{(k+1)} \text{ für } k = 1, 2, \ldots \frac{n - m - \mu}{2}.$$

Führt man neue Variable X_i ein, welche gleich den links stehenden von einander unabhängigen linearen Functionen sind, und entsprechend neue Variable Ξ_i, so ist die Substitutions-Determinante gleich $(-1)^m$. Dieser Werth hat demnach allgemeine Gültigkeit. Die Determinante ist gleich $(-1)^m$, wenn m lineare Mannigfaltigkeiten $v^{(j)}$ in ausgezeichneter Weise benutzt wurden.

Je nach dem Werthe der Determinante, d. i. je nachdem m gerade oder ungerade ist, bezeichnet man bekanntlich die Transformation als eigentliche oder uneigentliche. Ist $m = 0$, so hat man die allgemeine eigentliche Transformation; ist m gerade, so hat man nach Herrn Löwy diejenigen Fälle, welche Herr Frobenius als Grenzfälle behandelt hatte, während für ein ungerades m früher keine allgemeinen Formeln aufgestellt waren.

Bekanntlich kann man für ein gerades n die eigentlichen und uneigentlichen Transformationen auch geometrisch leicht von einander unterscheiden. Bei $n = 4$ z. B. (d. h. im Raume) bleibt bei ersteren jedes System von Erzeugenden einer $M_2^{(2)}$ als solches erhalten, während durch letztere die beiden Systeme mit einander vertauscht werden. Ohne Rechnung erkennt man dies auf folgende Weise. Bei der uneigentlichen Transformation ($n = 4$, $m = 1$, $\mu = 1$) bleibt eine Ebene v und deren Pol η fest, ferner zwei Tangentenebenen, die von η ausgehen, also die Fläche in je einem Punkte der Ebene v berühren. Die von ihnen ausgeschnittenen Paare von Erzeugenden bleiben ebenfalls fest; sie bilden ein windschiefes Vierseit, dessen eine Diagonale die Berührungspunkte verbindet; auf der anderen Diagonale liegt der Pol η. Auf dieser bleiben daher das Paar der beiden Ecken fest und der Pol η; es bleibt also entweder jeder Punkt dieser Diagonale ungeändert, oder nur der Punkt η und ihr Schnittpunkt mit der Ebene v, während jene beiden Ecken und also die betr. Erzeugenden der Fläche sich mit einander vertauschen. In ersterem Falle liegt eine einfache eigentliche Transformation (mit der Determinante $+1$) vor; es bleibt also nur der andere Fall für die Determinante -1.

Aehnliche Ueberlegungen gelten für grössere gerade Zahlen n. Die Erzeugenden zerfallen hier aber nicht in vollständig getrennte Systeme, die bei uneigentlichen Transformationen vertauscht werden; sondern es wird nur von den auf zwei Weisen möglichen Arten der Anordnung dieser Erzeugenden in gewisse lineare Mannigfaltigkeiten die eine Art mit der andern Art vertauscht.[1])

Bei ungeradem n ist von solcher doppelten Anordnung nicht die Rede; dem entsprechend können auch die eigentlichen Transformationen von den uneigentlichen geometrisch nicht unterschieden werden; in der That kann jede Transformation mit der Determinante $+1$ durch die Substitution $x_i = -X_i$, welche die geometrische Bedeutung der homogenen Coordinaten nicht ändert, in eine solche mit der Determinante -1 über-

[1]) Man übersieht das am einfachsten, indem man die stereographische Abbildung der $M_{n-2}^{(2)}$ auf eine $M_{n-2}^{(1)}$ durchführt, vgl. Klein, Math. Ann., Bd. 5, p. 264.

geführt werden. Es ist aber nützlich, sich von dieser evidenten Thatsache an unseren Formeln direct Rechenschaft zu geben. Wir führen die Rechnung bei $n=3$ (d. h. am Kegelschnitte) durch.

Für $n=3$, $m=0$ haben wir nach (51) die Transformation

$$
\begin{vmatrix}
x_1 & p_{11} & p_{12} & p_{13} \\
x_2 & p_{21} & p_{22} & p_{23} \\
x_3 & p_{31} & p_{32} & p_{33} \\
x_i+\xi_i & 2\varkappa\Phi_{i1} & 2\varkappa\Phi_{i2} & 2\varkappa\Phi_{i3}
\end{vmatrix} = 0. \tag{65}
$$

Setzt man unter Anwendung der symbolischen Bezeichnungsweise

$$
f = a_x^2 = b_x^2, \quad \Phi = \frac{1}{2}(a\,b\,u)^2 = \sum\sum A_{ik}\,u_i\,u_k, \quad \Omega = (\omega\,u\,w),
$$

so ist hier $\Phi_{ik} = A_{ik}$ und:

$$
\begin{aligned}
p_{11} &= \varkappa A_{11}, & p_{12} &= \varkappa A_{12} + \lambda w_3, & p_{13} &= \varkappa A_{13} - \lambda w_2 \\
p_{21} &= \varkappa A_{21} - \lambda w_3, & p_{22} &= \varkappa A_{22}, & p_{23} &= \varkappa A_{23} + \lambda w_1 \\
p_{31} &= \varkappa A_{31} + \lambda w_2, & p_{32} &= \varkappa A_{32} - \lambda w_2, & p_{33} &= \varkappa A_{33}.
\end{aligned}
$$

Für $n=3$, $m=1$ erhalten wir nach derselben Formel

$$
\begin{vmatrix}
\eta_1 & x_1 & p'_{11} & p'_{12} & p'_{13} \\
\eta_2 & x_2 & p'_{21} & p'_{22} & p'_{23} \\
\eta_3 & x_3 & p'_{31} & p'_{32} & p'_{33} \\
0 & x_i+\xi_i & 2\varkappa\Psi_{i1} & 2\varkappa\Psi_{i2} & 2\varkappa\Psi_{i3} \\
0 & 0 & \eta_1 & \eta_2 & \eta_3
\end{vmatrix} = 0, \tag{66}
$$

und hierin ist $\sum\sum \Psi_{ik}\,u_i\,u_k = (a\,u\,v)^2$, also $\Psi_{ik} = (a\,v)_i\,(a\,v)_k$, ferner

$$
p'_{11} = \varkappa\,(av)_1^2,\ p'_{12} = \varkappa\,(av)_1\,(av)_2 + \lambda v_3,\ p'_{13} = \varkappa\,(av)_1\,(av)_3 - \lambda v_2,
$$

u. s. f. Es bezeichnet η den Pol der Linie v, also ist $v_i = c_i\,c_\eta = b_i\,b_\eta$; und es ist bekanntlich:

$$(a\,u\,b)\,(a\,u\,c)\,c_\eta\,b_\eta = \frac{1}{2}\,a_\eta^2\cdot(b\,c\,u)^2 - A\,u_\eta^2,$$[1]

wo $A = 6\,(a\,b\,c)^2$. Die Grössen p'_{11}, p'_{12}, p'_{13} sind also bez. gleich

$$\frac{\varkappa}{2}\,(b\,c)_1^2\cdot a_\eta^2 - \frac{\varkappa}{2}\,A\,\eta_1^2,\qquad \frac{\varkappa}{2}\,(b\,c)_1\,(b\,c)_2\,a_\eta^2 - \frac{\varkappa}{2}\,A\,\eta_1\,\eta_2 + \lambda\,a_\eta\,a_3,$$

$$\frac{\varkappa}{2}\,(b\,c)_1\,(b\,c)_3\,a_\eta^2 - \frac{\varkappa}{2}\,A\,\eta_1\,\eta_3 - \lambda\,a_\eta\,a_2.$$

In entsprechender Weise sind die Elemente p'_{2i} und p'_{3i} umzuformen. Multipliciren wir die Elemente der ersten Verticalreihe von (66) bez. mit $\frac{\varkappa}{2}\,A\,\eta_1$, $\frac{\varkappa}{2}\,A\,\eta_2$, $\frac{\varkappa}{2}\,A\,\eta_3$ und addiren die Producte zu den drei letzten Verticalreihen, so werden die Elemente der ersten Horizontalreihe $(A_{ik} = (b\,c)_i\,(b\,c)_k)$:

$$\eta_1,\; x_1,\; k\,A_{11},\; k\,A_{12} + \lambda\,v_3,\; k\,A_{13} - \lambda\,v_2,$$

wo $2\,k = \varkappa\,a_\eta^2$. Die Gleichung (66) geht so über in:

$$(67)\qquad \begin{vmatrix} \eta_1 & x_1 & p''_{11} & p''_{12} & p''_{13} \\ \eta_2 & x_2 & p''_{21} & p''_{22} & p''_{23} \\ \eta_3 & x_3 & p''_{31} & p''_{32} & p''_{33} \\ 0 & x_i + \xi_i & 2\,\varkappa\,B_{i1} & 2\,\varkappa\,B_{i2} & 2\,\varkappa\,B_{i3} \\ 0 & 0 & \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 \end{vmatrix} = 0,$$

wo nun $B_{ik} = \frac{1}{2}\,A_{ik}\,a_\eta^2 - A\,\eta_i\,\eta_k$ und die Elemente p''_{ik} aus den Elementen p_{ik} der Gleichung (65) hervorgehen, indem man $\varkappa$ durch k, w durch v ersetzt. Die zweite Verticalreihe in (67) stimmt mit der ersten in (65), die vorletzte Horizontalreihe mit der letzten in (65) überein. Wir multipliciren weiter die erste Verticalreihe mit A, die dritte, vierte und fünfte bez. mit v_1,

[1] Vgl. z. B. Clebsch: Vorlesungen über Geometrie, Bd. 1, p. 286.

v_2, v_3 und subtrahiren sie von der ersten. Die Elemente der letzteren werden sodann

$$0,\ 0,\ 0,\ \varkappa A\,\eta_i v_\eta,\ -v_\eta.$$

Endlich multipliciren wir die letzte Horizontalreihe, d. h. die Elemente

$$-v_\eta,\ 0,\ \eta_1,\ \eta_2,\ \eta_3$$

mit $\varkappa A\,\eta_i$ und addiren sie zur vorletzten; dann werden die Elemente der letzteren

$$0,\ x_i+\xi_i,\ 2\,k\,A_i,\ 2\,k\,A_{i2},\ 2\,k\,A_{i3};$$

und nach Absonderung des Factors v_η reducirt sich die fünfreihige Determinante auf eine vierreihige. Die Gleichung (67) entsteht so in der That aus (66), wenn man $\varkappa$ durch k, v durch w ersetzt.

In gleicher Weise werden sich diese Determinanten-Umformungen bei grösseren Werthen von n und m durchführen lassen. Werden in den Transformationen (51) m Mannigfaltigkeiten v und μ lineare Mannigfaltigkeiten so benutzt, ist also

$$p_{ik}=\frac{\varkappa}{2}\frac{\partial^2\Phi_m}{\partial u_i\,\partial u_k}+\lambda\frac{\partial^2\Omega_{m,\mu}}{\partial u_k\,\partial\omega_i},$$

(wenn mit Φ_m der Ausdruck (41) bezeichnet wird und mit $\Omega_{m,\mu}$ der Ausdruck (44), in welchem μ Reihen w wirkliche Grössen, nicht symbolische Zeichen sind), so sind diese Transformationen in obigem Sinne aequivalent mit denjenigen, für welche μ Mannigfaltigkeiten v und m Mannigfaltigkeiten w zur Bildung nöthig waren; vgl. noch die Zusammenstellung in Nr. 15.

Bei geraden Werthen von n ist eine analoge Umformung der Determinanten nicht möglich; denn z. B. für $n=4$, $m=0$, $\mu=2$ haben wir in (51):

$$\Phi=\sum\sum A_{ik}\,u_i\,u_k,\qquad \Omega=(\omega\,u\,w'\,w'').$$

Dagegen bei $n = 4$, $m = 2$, $\mu = 0$:

$$\Phi = (a\,v'\,v''\,u)^2, \qquad \Omega = (\omega\,u\,v'\,v'').$$

Beide Transformationen sind eigentliche; und die letztere ist als Grenzfall in der Transformation $m = 0$, $\mu = 0$ enthalten; vgl. oben Nr. 6.

15. Für die niedrigsten Zahlen n möge hier eine Zusammenstellung derjenigen Fälle gegeben werden, welche in Bezug auf die Vielfachheit der vorkommenden Wurzeln der Fundamentalgleichung möglich sind. Die Zahl m bedeutet überall die Anzahl der Wurzeln, welche gleich -1 sind, die Zahl μ die Anzahl der Wurzeln, welche gleich $+1$ sich ergeben.

Erstens: $n = 2$.

I. $m = 0$, $\mu = 0$. Die beiden Punkte der vorgelegten linären quadratischen Form f bleiben jeder für sich fest.

II. $m = 1$, $\mu = 1$. Es bleiben zwei einander in Bezug auf $f = 0$ conjugirte Punkte fest; der eine vertritt die Mannigfaltigkeit v, der andere die Mannigfaltigkeit w; die beiden Grundpunkte der Form f werden mit einander vertauscht.

Zweitens: $n = 3$.

I. $m = 0$, $\mu = 1$. Eine feste Linie w; in ihren Schnittpunkten mit $f = 0$ zwei feste Tangenten, denen zwei Wurzeln σ und σ^{-1} der Fundamentalgleichung entsprechen (vgl. „Vorlesungen" II, 1, p. 384). Beide Tangenten fallen zusammen für $\sigma = \sigma^{-1} = 1$ (vgl. ib. p. 385).

II. $m = 1$, $\mu = 0$. Eine feste Linie v, an welcher die Ebene in gewissem Sinne gespiegelt wird. Die Formeln (45) lauten

$$x_i = \frac{\varkappa}{2}\frac{\partial \Phi}{\partial u_i} + \lambda\,(u\,v)_i + \nu\,\eta_i,$$

$$\xi_i = \frac{\varkappa}{2}\frac{\partial \Phi}{\partial u_i} - \lambda\,(u\,v)_i - \nu\,\eta_i.$$

Macht man $f = 2x_1 x_2 + x_3^2$, $F = 2u_1 u_2 + u_3^2$, $v_1 = 0$, $v_2 = 0$, $v_3 = 1$, so ist $\Phi = 2u_1 u_2$, $\eta_1 = 0$, $\eta_2 = 0$, $\eta_3 = 1$, also:

$$x_1 = \varkappa u_2 + \lambda u_2, \qquad x_2 = \varkappa u_1 - \lambda u_1, \qquad x_3 = \nu,$$
$$\xi_1 = \varkappa u_2 - \lambda u_2, \qquad \xi_2 = \varkappa u_1 - \lambda u_1, \qquad \xi_3 = -\nu,$$

also:

$$\xi_1 = \frac{\varkappa - \lambda}{\varkappa + \lambda} x_1, \qquad \xi_2 = \frac{\varkappa + \lambda}{\varkappa - \lambda} x_2, \qquad \xi_3 = -x_3.$$

Es treten in der That zwei zu einander reciproke Wurzeln auf; dieselben können insbesondere $= 1$ werden; dann hat man eine perspectivische Transformation. Nur letzteren Fall habe ich a. a. O. p. 385 erwähnt; deshalb wiederhole ich hier die allgemeineren Formeln; die entstehende Transformation ist allerdings nach Nr. 14 mit I wesentlich identisch.

Drittens: $n = 4$.

I. 1) $m = 0$, $\mu = 0$. Zwei Paare reciproker Wurzeln (σ_1, σ_2, σ_1^{-1}, σ_2^{-1}). Linearer Complex in allgemeiner Lage zu $f = 0$; vier feste Erzeugende. Zwei von letzteren fallen zusammen, wenn $\sigma_1 = \sigma_2$; dann können ferner alle Erzeugenden einer Art je in sich transformirt werden (a. a. O. p. 361 ff. Nr. 1, 2, 5)

2) $m = 0$, $\mu = 2$. Ein Paar reciproker Wurzeln (σ, σ^{-1}). Der lineare Complex ist ein specieller in allgemeiner Lage zur Fläche. Die Axe desselben berührt die Fläche, wenn $\sigma = \sigma^{-1} = 1$. Die Axe kann dann auch zur Erzeugenden werden (a. a. O. Nr. 3, 4, 6).

II. 3) $m = 1$, $\mu = 1$. Ein paar reciproker Wurzeln (σ, σ^{-1}). Eine feste Ebene v und eine feste conjugirte Ebene w (a. a. O. Nr. 7).

4) $m = 1$, $\mu = 3$, a. a. O. Nr. 8 und 9.

III. 5) $m = 2$, $\mu = 0$. Ein Paar reciproker Wurzeln. Dieser Fall wurde oben in Nr. 6 behandelt; vgl.

die Gleichungen (35). Für $\sigma = \sigma^{-1} = 1$ entsteht der a. a. O. p. 370 und oben in Nr. 7 besprochene Fall.

Viertens: $n = 5$.

I. 1) $m = 0$, $\mu = 1$; zwei Paare reciproker Wurzeln; in Nr. 1 und 2 bei Herrn Löwy (a. a. O. p. 49).

2) $m = 0$, $\mu = 3$; ein Paar reciproker Wurzeln; Nr. 5 und 7, ebd.

II. 3) $m = 1$, $\mu = 0$; zwei Paare reciproker Wurzeln; äquivalent mit 1).

4) $m = 1$, $\mu = 2$; ein Paar reciproker Wurzeln; Nr. 3 und 4, ebd. p. 48.

III. 5) $m = 2$, $\mu = 1$; ein Paar reciproker Wurzeln; äquivalent mit 4).

IV. 6) $m = 3$, $\mu = 0$; ein Paar reciproker Wurzeln; äquivalent mit 2).

Fünftens: $n = 6$.

I. 1) $m = 0$, $\mu = 0$; drei Paare reciproker Wurzeln.

2) $m = 0$, $\mu = 0$; zwei Paare reciproker Wurzeln.

3) $m = 0$, $\mu = 4$; ein Paar reciproker Wurzeln, die auch zusammenfallen können.

II. 4) $m = 1$; $\mu = 1$; zwei Paare reciproker Wurzeln; ebd. Nr. 1, 2, 3, p. 30; eine $M_4^{(1)}\, v$ und eine $M_4^{(1)}\, w$; die reciproken Wurzeln können paarweise zusammenfallen (ebd. Nr. 9).

5) $m = 1$, $\mu = 3$; ein Paar reciproker Wurzeln; ebd. Nr. 4, 5, 6, 7, 8.

III. 6) $m = 2$, $\mu = 0$; zwei Paare reciproker Wurzeln.

7) $m = 2$, $\mu = 2$; ein Paar reciproker Wurzeln, die auch zusammenfallen können.

IV. 8) $m = 3$, $\mu = 1$; ein Paar reciproker Wurzeln (ebd. Nr. 10), die auch zusammenfallen können (ebd. Nr. 11).

Bei dieser Aufzählung sind diejenigen Specialisirungen, welche nach der Theorie der Elementartheiler durch Verschwinden von Unterdeterminanten entstehen können, nicht mit berücksichtigt. Im Falle Nr. 9 ist bei Herrn Löwy als Mannigfaltigkeit v eine Tangential-Mannigfaltigkeit von $f=0$ gewählt, in welchem Falle unsere Formeln nur ein bestimmtes Resultat geben, wenn man zuerst eine etwas verschiedene Mannigfaltigkeit zu Grunde legt und dann einen Grenzübergang ausführt (vgl. oben Nr. 3). Diese Schwierigkeit macht sich aber nur geltend, wenn man von den Gleichungen (45) Gebrauch machen will. Das Bestehen der Gleichung $v_\eta = 0$ kann im Resultate (51) ohne Störung zugelassen werden. Liegt z. B. $\eta^{(1)}$ in $v^{(1)}$, so schreiben wir $v_i^{(1)}$ an Stelle von $v_i^{(1)} + \lambda_2 v_i^{(2)} + \ldots + \lambda_m v_i^{(m)}$, wodurch (51) nicht geändert wird, und bestimmen die λ_j so, dass die neuen Grössen $v_i^{(1)}$ den Bedingungen

$$(68) \qquad \sum v_i^{(1)} \eta_i^{(j)} = 0 \quad \text{für} \quad j = 1, 2, \ldots m$$

genügen. Wir multipliciren die ersten n Horizontalreihen der Determinante (51) bez. mit $v_1^{(1)}, v_2^{(1)}, \ldots v_n^{(1)}$ und subtrahiren die Producte von der mit einem passenden Factor multiplicirten $(n+2)^{\text{ten}}$ Horizontalreihe; die Elemente der letzteren werden dann wegen (68):

$$0, \ldots 0, \; -\sum v_i^{(1)} x_i, \; 0, \; 0 \ldots 0.$$

Die Determinante reducirt sich also auf eine solche von nur $n+m$ Reihen. Bestehen die Gleichungen

$$\sum v_i^{(1)} \eta_i^{(1)} = 0, \quad \sum v_i^{(2)} \eta_i^{(2)} = 0, \ldots \sum v_i^{(s)} \eta_i^{(s)} = 0,$$

d. h. wird die $M_{n-2}^{(2)} f = 0$ von den Mannigfaltigkeiten $v^{(1)}, v^{(2)}, \ldots v^{(s)}$ berührt, so erscheinen in gleicher Weise die Transformationsgleichungen (51) in der Form

$$\begin{vmatrix} \eta_1^{(s+1)} & \ldots & \eta_1^{(m)} & x_1 & p_{11} & \ldots & p_{1n} \\ \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \eta_n^{(s+1)} & \ldots & \eta_n^{(m)} & x_n & p_{n1} & \ldots & p_{nn} \\ 0 & \ldots & 0 & x_i + \xi_i & 2\varkappa \Phi_{i1} & \ldots & 2\varkappa \Phi_{in} \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \eta_1^{(s+1)} & \ldots & \eta_n^{(s+1)} \\ \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \eta_1^{(m)} & \ldots & \eta_n^{(m)} \end{vmatrix} = 0.$$

Die Determinante enthält $n+m+1-s$ Reihen, während Φ ebenso, wie in (51), durch die $(n+m+1)$ reihige Determinante (41) definirt ist.

16. Die Anzahl der in unseren Transformationen enthaltenen Parameter ist leicht zu bestimmen. Im Falle $m=0$ ist die Anzahl der Coefficienten α_{ik} in (37) gleich $\frac{1}{2}n(n-1)$; das Resultat der Elimination ist im Zähler und Nenner homogen in diesen α_{ik} und in deren Verhältniss $\varkappa:\lambda$. Die Anzahl der Parameter ist also gleich $\frac{1}{2}n(n-1)$.

Wenn $m>0$ ist, so hängt das Resultat von den Coordinaten derjenigen linearen M_{n-m-1} ab, die von den Gleichungen (39) bestimmt wird. Die Anzahl dieser Coordinaten ist $m(n-1) - m(m-1) = m(n-m)$. In dieser M_{n-m-1} haben wir eine Verwandtschaft, die von $\frac{1}{2}(n-m)(n-m-1)$ Constanten abhängt, denn es ist jetzt n durch $n-m$ zu ersetzen. Die Gesammtheit der verfügbaren Constanten ist daher

$$\frac{1}{2}(n-m)(n-m-1)+m(n-m)=\frac{1}{2}(n-m)(n+m-1).$$

Dieselbe Zahl wird von Herrn Voss in seiner letzten Mittheilung abgeleitet; unsere Zahl $n-m$ ist dort mit μ bezeichnet.

17. Die von uns befolgte Methode wird durch das Verschwinden der Determinante von $f=0$ nicht wesentlich gestört, wie ich a. a. O. für den Fall $n=4$ (Transformation des imaginären Kugelkreises oder eines Punktepaares in sich) bereits ausgeführt habe. Dadurch wird es möglich, auch die Transformationen einer bilinearen Form in sich allgemein aufzustellen, insbesondere diejenigen einer alternirenden Form. Waren im Vorstehenden die a_{ik} gegeben und die $\alpha_{ik}\,(=-\alpha_{ki})$ als Parameter aufzufassen, so sind bei der alternirenden Form umgekehrt die α_{ik} gegeben und die a_{ik} sind die Parameter, wobei aber die Fälle, wo Determinanten und Unterdeterminanten von $f=0$ verschwinden, mit in Betracht gezogen werden müssen; auch dieses habe ich für $n=4$ a. a. O. dargelegt.