Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Classe

der

k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.

Band XXVI. Jahrgang 1896.

München.
Verlag der K. Akademie.
1897.

In Commission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).

Ueber den Feuerbach'schen Kreis und eine Steiner'sche Curve vierter Ordnung und dritter Klasse.

Von **W. Godt** in Lübeck.

(*Eingelaufen 7. März.*)

Der Feuerbach'sche Satz von den Berührungskreisen der Seiten eines Dreiecks ist vielfach verifiziert, seltener wesentlich bereichert worden. Bezüglich der umfangreichen Litteratur kann auf die gründliche Arbeit von Prof. Dr. Julius Lange: Geschichte des Feuerbach'schen Kreises. Berlin 1894. Beilage zum Jahresbericht der Friedrichs-Werder'schen Oberrealschule zu Berlin verwiesen werden. Im Folgenden ist auf selbständige und wie Verf. glaubt neue Weise das Problem behandelt und aus seiner bisherigen Vereinzelung in einen grösseren Zusammenhang gerückt. Trotz strenger Beschränkung auf solche Elemente, die in vielfacher Beziehung merkwürdig sind, wird die Figur ziemlich verwickelt. Freunde des Gegenstandes können vom Verf. eine Reihe hinreichend genau ausgeführter Blätter zur Ansicht erhalten.

Hervorgehoben sei noch, dass sich im Laufe der Darstellung von selbst die Beweise zu einer Reihe von Sätzen ergeben, welche Steiner in Betreff „einer besonderen Curve dritter Klasse (und vierten Grades)" ohne Beweis mitgetheilt hat (1856, Gesammelte Werke, Bd. 2, p. 641 ff.). Ein Theil dieser Sätze, soweit sich dieselben nämlich aus den allgemeinen Sätzen über Curven dritter Ordnung oder dritter Klasse ableiten lassen, ist schon von Cremona in diesem Sinne behandelt (Sur l'hypocycloide à trois rebroussements, Crelle's Journal, Bd. 64). Der Zusammenhang des Feuerbach'schen Kreises mit den Steiner'schen Sätzen scheint bisher nicht erkannt zu sein.

I. Ueber die Geometrie auf einem Kreise.

1. Behufs der Geometrie auf einem Kreise vom Radius 1 kann man in folgender Weise verfahren: Man wähle in der Peripherie einen beliebigen festen Punkt 0 und eine bestimmte Umlaufsrichtung, etwa die, wobei man die innere Kreisfläche zur Linken hat, als positive und lege einem Punkte X den halben Bogen $0X$ als Parameter bei. Dann gehört jedem beliebigen positiven oder negativen Parameter nur ein einziger bestimmter Punkt der Peripherie zu, einem beliebigen Punkte aber gehören unendlich viele Parameter zu, die sich um ganze Vielfache von π von einander unterscheiden.

2. Sind α und β die Parameter von zwei Punkten, so ist ihr Abstand gleich dem absoluten Werte von $\sin(\alpha - \beta)$. Sind $\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta$ die Parameter von vier Punkten, so spricht die Identität:

$$\sin(\alpha-\delta)\sin(\beta-\gamma)+\sin(\beta-\delta)\sin(\gamma-\alpha)+\sin(\gamma-\delta)\sin(\alpha-\beta)=0$$

den sogen. Lehrsatz des Ptolemäus aus und zwar in allgemein gültiger Form für beliebige Lagen der Punkte.

3. Sind $\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta$ die Parameter von vier Punkten, so ist das Doppelverhältnis des Paares $\alpha\,\beta$ getrennt durch $\gamma\,\delta$

$$\frac{\sin(\alpha-\gamma)}{\sin(\gamma-\beta)}:\frac{\sin(\alpha-\delta)}{\sin(\delta-\beta)}=-\frac{\sin(\beta-\delta)\sin(\gamma-\alpha)}{\sin(\alpha-\delta)\sin(\beta-\gamma)}$$

Die sechs verschiedenen Doppelverhältnisse, die man durch verschiedene Anordnung der Punkte desselben Quadrupels erhält, sind bezüglich den negativen Werten der sechs Quotienten gleich, die aus den drei Gliedern der Identität in 2. sich bilden lassen.

4. Seien $\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta$ zwischen 0 und π, der Grösse nach geordnet, Parameter von vier Punkten und P der Schnittpunkt der Geraden $\alpha\,\beta$ und $\gamma\,\delta$, so ist ersichtlich das Teilungsverhältnis

$$\frac{\alpha P}{P\beta}=-\frac{\triangle\alpha\gamma\delta}{\triangle\beta\gamma\delta}=-\frac{\sin(\gamma-\alpha)\sin(\delta-\alpha)}{\sin(\gamma-\beta)\sin(\delta-\beta)}$$

und diese Gleichung bleibt bestehen, wenn sich die Parameter beliebig verändern. Es wird also allgemein die Strecke $\alpha\beta$ von der Geraden $\gamma\delta$ geteilt nach dem Verhältnisse

$$-\frac{\sin(\alpha-\gamma)\sin(\alpha-\delta)}{\sin(\beta-\gamma)\sin(\beta-\delta)}$$

5. Seien α_1 und β_1, α_2 und β_2, α_3 und β_3 die Parameter dreier Paare von Punkten, so ist es leicht, die Bedingung anzugeben, dass die drei durch sie bestimmten Geraden einen gemeinsamen Schnittpunkt haben. Nach 4. ist dazu nämlich im allgemeinen erforderlich und ausreichend, dass

$$-\frac{\sin(\alpha_2-\alpha_1)\sin(\beta_2-\alpha_1)}{\sin(\alpha_2-\beta_1)\sin(\beta_2-\beta_1)}=-\frac{\sin(\alpha_3-\alpha_1)\sin(\alpha_3-\alpha_1)}{\sin(\alpha_3-\beta_1)\sin(\beta_3-\beta_1)}$$

oder in Determinantenform

$$\begin{vmatrix} \sin(\alpha_2-\alpha_1)\sin(\beta_2-\alpha_1) & \sin(\alpha_3-\alpha_1)\sin(\beta_3-\alpha_1) \\ \sin(\alpha_2-\beta_1)\sin(\beta_2-\beta_1) & \sin(\alpha_3-\beta_1)\sin(\beta_3-\beta_1) \end{vmatrix}=0$$

6. Diese Relation muss ihrem Sinne nach gegen Vertauschungen der Indizes 1, 2, 3 invariant sein. Um dies auch in der Form zum Ausdruck zu bringen, kann man die links stehende Determinante, sie heisse für den Augenblick D, umgestalten. Mit Auflösung der Sinusprodukte erhält man zunächst

$$4D=\begin{vmatrix} \cos(\alpha_2+\beta_2-2\alpha_1)-\cos(\alpha_2-\beta_2) & \cos(\alpha_3+\beta_3-2\alpha_1)-\cos(\alpha_3-\beta_3) \\ \cos(\alpha_2+\beta_2-2\beta_1)-\cos(\alpha_2-\beta_2) & \cos(\alpha_3+\beta_3-2\beta_1)-\cos(\alpha_3-\beta_3) \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} \cos(\alpha_2+\beta_2-2\alpha_1) & \cos(\alpha_3+\beta_3-2\alpha_1) & 1 \\ \cos(\alpha_2+\beta_2-2\beta_1) & \cos(\alpha_3+\beta_3-2\beta_1) & 1 \\ \cos(\alpha_2-\beta_2) & \cos(\alpha_3-\beta_3) & 1 \end{vmatrix}$$

Multipliziert man nun kolonnenweise mit

$$\begin{vmatrix} \cos 2\beta_1 & \sin 2\beta_1 & 0 \\ -\cos 2\alpha_1 & -\sin 2\alpha_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=-\sin(2\alpha_1-2\beta_1)$$

so wird

$$-4D\cdot\sin(2\alpha_1-2\beta_1)$$

$$=\begin{vmatrix}\sin(\alpha_2+\beta_2)\sin(2\alpha_1-2\beta_1) & \sin(\alpha_3+\beta_3)\sin(2\alpha_1-2\beta_1) & \cos 2\beta_1-\cos 2\alpha_1\\ \cos(\alpha_2+\beta_2)\sin(2\beta_1-2\alpha_1) & \cos(\alpha_3+\beta_3)\sin(2\beta_1-2\alpha_1) & \sin 2\beta_1-\sin 2\alpha_1\\ \cos(\alpha_2-\beta_2) & \cos(\alpha_3-\beta_3) & 1\end{vmatrix}$$

oder

$$4D=\begin{vmatrix}\sin(\alpha_2+\beta_2) & \sin(\alpha_3+\beta_3) & \cos 2\beta_1-\cos 2\alpha_1\\ \cos(\alpha_2+\beta_2) & \cos(\alpha_3+\beta_3) & -\sin 2\beta_1+\sin 2\alpha_1\\ \cos(\alpha_2-\beta_2) & \cos(\alpha_3-\beta_3) & \sin(2\alpha_1-2\beta_1)\end{vmatrix}$$

oder endlich, wenn man die letzte Kolonne umgestaltet, den Faktor $2\sin(\alpha_1-\beta_1)$ absondert und wegen des Folgenden die Anordnung ändert

$$-2D=\sin(\alpha_1-\beta_1)\begin{vmatrix}\cos(\alpha_1+\beta_1) & \sin(\alpha_1+\beta_1) & \cos(\alpha_1-\beta_1)\\ \cos(\alpha_2+\beta_2) & \sin(\alpha_2+\beta_2) & \cos(\alpha_2-\beta_2)\\ \cos(\alpha_3+\beta_3) & \sin(\alpha_3+\beta_3) & \cos(\alpha_3-\beta_3)\end{vmatrix}$$

Die Determinante rechts werde zur Abkürzung auch mit $\Delta(\alpha_1, \beta_1;\ \alpha_2, \beta_2;\ \alpha_3, \beta_3)$ oder mit Δ bezeichnet.

7. Wie in 5. bemerkt, ist $D=0$ nur im allgemeinen die Bedingung dafür, dass die drei Geraden durch einen Punkt gehen, denn die Ableitung setzt voraus, dass die Parameter α_1 und β_1 verschiedenen Punkten angehören und nicht etwa demselben. Sollte dies nämlich einmal der Fall sein, so könnte von einem bestimmten Teilungsverhältnis der Strecke $\alpha_1\,\beta_1$ nicht geredet werden, das einen bestimmten Punkt charakterisierte. $D=0$ würde dann über die zweite und dritte Gerade überhaupt nichts aussagen. Die genaue Bedingung, dass drei Gerade durch einen Punkt gehen, ist vielmehr stets das Verschwinden von Δ, wenn man nur unter der Geraden α, α oder $\alpha, n\pi+\alpha$ die Kreistangente in dem Punkte mit dem Parameter α versteht. So soll es im folgenden geschehen.

8. Soll eine Gerade nicht nur ihrer Lage, sondern auch ihrer Richtung nach in Betracht gezogen werden, so dass sie als in einem bestimmten Sinne zu durchlaufen vorgestellt wird

und die Ebene in ein linkes und ein rechtes oder ein positives und ein negatives Gebiet zerlegt, so mag sie ein **Laufstrahl** heissen. Zwei Parameter α und β legen zwei Punkte und damit eine Gerade und in noch bestimmterem Sinne einen Laufstrahl fest. Bei stetiger Aenderung von β dreht sich nämlich die Gerade $\alpha\beta$ um den Punkt α und wir können festsetzen, dass sie als Laufstrahl $\alpha\beta$ in demjenigen Sinne zu verstehen sei, bei dem, wenn β mit α gleich geworden ist, ihr linkes Ufer im Berührungspunkte mit dem linken Ufer des Kreises zusammenfällt. So verstanden kann man α und β als Koordinaten eines Laufstrahls auffassen und etwa Kreiskoordinaten desselben nennen. Aendert sich eine Kreiskoordinate eines Laufstrahls um π, so fällt er in die entgegengesetzte Richtung derselben Geraden. Die Kreiskoordinaten $\alpha + \pi$ und $\beta + \pi$ legen also denselben Laufstrahl fest wie α und β, die Kreiskoordinaten $\alpha + \pi$ und β oder α und $\beta + \pi$ aber den entgegengesetzten.

9. Durch den Mittelpunkt des Kreises legen wir ein rechtwinkliges Achsenkreuz und zwar wählen wir für die Richtung der X-Achse den Laufstrahl mit den Kreiskoordinaten 0 und $-\frac{\pi}{2}$, für die Richtung der Y-Achse den Laufstrahl mit den Kreiskoordinaten $\frac{\pi}{4}$ und $-\frac{\pi}{4}$. Sind dann α und β die Parameter zweier Punkte, so lautet die Gleichung der hindurchgelegten Geraden in rechtwinkligen Koordinaten und in der Normalform

$$x \cos(\alpha + \beta) + y \sin(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = 0$$

und dabei giebt der Ausdruck $\cos(\alpha - \beta)$ nicht nur durch seinen absoluten Wert die Länge des vom Mittelpunkt auf die Gerade $\alpha\beta$ gefällten Lotes an, sondern durch sein Vorzeichen auch, auf welcher Seite des Laufstrahls $\alpha\beta$, der positiven oder negativen, linken oder rechten, der Mittelpunkt liegt.

Schneidet oder berührt ein Laufstrahl den Kreis, so sind seine Kreiskoordinaten reell, trifft er den Kreis nicht, ist aber reell, so sind dieselben konjugiert komplex.

Aus der Gleichung der Geraden in rechtwinkligen Koordinaten ergiebt sich die Bedingung, dass drei Gerade durch einen Punkt gehen, in Kreiskoordinaten ausgedrückt ohne weiteres in der Form $\Delta = 0$ von 7.

10. Die Gerade S_i habe die Kreiskoordinaten α_i und β_i, so hat ihr Pol P_i, wie leicht zu sehen, die rechtwinkligen Koordinaten

$$x_i = \frac{\cos(\alpha_i + \beta_i)}{\cos(\alpha_i - \beta_i)} \quad \text{und} \quad y_i = \frac{\sin(\alpha_i + \beta_i)}{\cos(\alpha_i - \beta_i)}$$

Hieraus ergiebt sich, dass die aus den Kreiskoordinaten dreier Geraden gebildete Determinante Δ in naher Beziehung zu dem Inhalt Δ_P des Dreiecks steht, dessen Ecken die Pole der Geraden sind. Es ist nämlich

$$\Delta = 2\Delta_P \cdot \cos(\alpha_1 - \beta_1)\cos(\alpha_2 - \beta_2)\cos(\alpha_3 - \beta_3)$$

Bezeichnet man den Inhalt des von den drei Geraden selber gebildeten Dreiecks mit Δ_S, seine drei Höhen mit h_1, h_2, h_3, die Koordinaten seiner Eckpunkte mit $\xi_1\,\eta_1$, $\xi_2\,\eta_2$, $\xi_3\,\eta_3$, so erhält man, da

$$\begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 & -1 \\ \xi_2 & \eta_2 & -1 \\ \xi_3 & \eta_3 & -1 \end{vmatrix} = 2\Delta_S$$

durch Multiplikation dieser Gleichung mit der vorigen

$$h_1 h_2 h_3 = 4\Delta_S \Delta_P \cdot \cos(\alpha_1 - \beta_1)\cos(\alpha_2 - \beta_2)\cos(\alpha_3 - \beta_3)$$

11. Obwohl es mit dem eigentlichen Thema dieses Aufsatzes nicht näher zusammenhängt, mag noch Folgendes bemerkt werden. Sollen zwei Gerade konjugiert sein, das heisst, soll die eine durch den Pol der anderen gehen, so ist nach 9. und 10. die Bedingung

$$\frac{\cos(\alpha_2+\beta_2)}{\cos(\alpha_2-\beta_2)}\cos(\alpha_1+\beta_1)+\frac{\sin(\alpha_2+\beta_2)}{\cos(\alpha_2-\beta_2)}\sin(\alpha_1+\beta_1)-\cos(\alpha_1-\beta_1)=0$$

oder

$$\cos(\alpha_2 + \beta_2 - \alpha_1 - \beta_1) = \cos(\alpha_2 - \beta_2)\cos(\alpha_1 - \beta_1)$$

woraus man deutlich die Gegenseitigkeit dieser Beziehung ersieht.

Ebenso symmetrisch drückt sich die Bedingung, dass drei Gerade ein Polardreieck des Kreises bilden, durch die drei Gleichungen aus:

$$\cos(\alpha_1 + \beta_1 - \alpha_2 - \beta_2) = \cos(\alpha_1 - \beta_1)\cos(\alpha_2 - \beta_2)$$
$$\cos(\alpha_2 + \beta_2 - \alpha_3 - \beta_3) = \cos(\alpha_2 - \beta_2)\cos(\alpha_3 - \beta_3)$$
$$\cos(\alpha_3 + \beta_3 - \alpha_1 - \beta_1) = \cos(\alpha_3 - \beta_3)\cos(\alpha_1 - \beta_1)$$

12. Die Bedingung, dass drei Gerade durch einen Punkt gehen, in Kreiskoordinaten kann man noch in einer anderen Form erhalten, die später nützlich und an sich interessant ist. Die Punkte, deren Parameter α_1, α_2 und α_3 sind, fasse man als Ecken eines Dreiecks auf, so sind die Teilverhältnisse von

Seite $\alpha_1\alpha_2$ durch Gerade $\alpha_3\beta_3 = -\dfrac{\sin(\alpha_1 - \alpha_3)\sin(\alpha_1 - \beta_3)}{\sin(\alpha_2 - \alpha_3)\sin(\alpha_2 - \beta_3)}$

Seite $\alpha_2\alpha_3$ durch Gerade $\alpha_1\beta_1 = -\dfrac{\sin(\alpha_2 - \alpha_1)\sin(\alpha_2 - \beta_1)}{\sin(\alpha_3 - \alpha_1)\sin(\alpha_3 - \beta_1)}$

Seite $\alpha_3\alpha_1$ durch Gerade $\alpha_2\beta_2 = -\dfrac{\sin(\alpha_3 - \alpha_2)\sin(\alpha_3 - \beta_2)}{\sin(\alpha_1 - \alpha_2)\sin(\alpha_1 - \beta_2)}$

Die drei Geraden gehen nun durch einen Punkt, wenn das Produkt der drei Teilverhältnisse gleich 1 ist, also, wenn

$$\frac{\sin(\alpha_1 - \beta_3)\cdot\sin(\alpha_2 - \beta_1)\sin(\alpha_3 - \beta_2)}{\sin(\alpha_2 - \beta_3)\cdot\sin(\alpha_3 - \beta_1)\sin(\alpha_1 - \beta_2)} = 1$$

oder wenn

$$\sin(\alpha_1-\beta_2)\sin(\alpha_2-\beta_3)\sin(\alpha_3-\beta_1)-\sin(\alpha_1-\beta_3)\sin(\alpha_3-\beta_2)\sin(\alpha_2-\beta_1)=0$$

und in der That kann man sich durch Entwicklung und Vergleichung leicht überzeugen, dass identisch

$$\sin(\alpha_1 - \beta_2)\sin(\alpha_2 - \beta_3)\sin(\alpha_3 - \beta_1)$$
$$-\sin(\alpha_1 - \beta_3)\sin(\alpha_3 - \beta_2)\sin(\alpha_2 - \beta_1) = \frac{1}{2}\Delta$$

Vielleicht ist die linke Seite noch übersichtlicher in der Form:

$$\sin(\alpha_1-\beta_2)\sin(\alpha_2-\beta_3)\sin(\alpha_3-\beta_1)+\sin(\beta_1-\alpha_2)\sin(\beta_2-\alpha_3)\sin(\beta_3-\alpha_1)$$

Ableitung und letzte Gleichung lehren dabei, dass dieser Ausdruck seinen Wert nicht ändert, wenn man irgend ein α mit dem entsprechenden β vertauscht. Zugleich ergiebt sich der einfache geometrische Satz: Wenn bei einem Sechseck im Kreise die drei Verbindungslinien von je zwei gegenüberliegenden Ecken (Hauptdiagonalen) durch einen Punkt gehen, so sind die beiden Produkte aus je drei nicht aneinander hängenden Seiten gleich.

13. Wir stellen die unter 12. und 6. gefundenen Identitäten noch einmal zur Bequemlichkeit zusammen. Ist

$$\begin{vmatrix} \cos(\alpha_1+\beta_1) & \sin(\alpha_1+\beta_1) & \cos(\alpha_1-\beta_1) \\ \cos(\alpha_2+\beta_2) & \sin(\alpha_2+\beta_2) & \cos(\alpha_2-\beta_2) \\ \cos(\alpha_3+\beta_3) & \sin(\alpha_3+\beta_3) & \cos(\alpha_3-\beta_3) \end{vmatrix} = \varDelta$$

so hat man identisch

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\varDelta = {} & \sin(\alpha_1-\beta_2)\sin(\alpha_2-\beta_3)\sin(\alpha_3-\beta_1) \\ & + \sin(\beta_1-\alpha_2)\sin(\beta_2-\alpha_3)\sin(\beta_3-\alpha_1)\end{aligned}$$

und

$$-\frac{1}{2}\sin(\alpha_1-\beta_1)\cdot\varDelta$$

$$= \begin{vmatrix} \sin(\alpha_2-\alpha_1)\sin(\beta_2-\alpha_1) & \sin(\alpha_3-\alpha_1)\sin(\beta_3-\alpha_1) \\ \sin(\alpha_2-\beta_1)\sin(\beta_2-\beta_1) & \sin(\alpha_3-\beta_1)\sin(\beta_3-\beta_1) \end{vmatrix}$$

14. Aehnlich wie wir jeder Geraden ein Paar Parameter als Kreiskoordinaten beigelegt haben, können wir dies auch bei jedem Punkte ausführen. Wir setzen fest, dass als Kreiskoordinaten eines Punktes diejenigen seiner Polare genommen werden. Sind dann $a\,b$ zwei solche Kreiskoordinaten eines Punktes, so sind seine Cartesischen Koordinaten $\dfrac{\cos(a+b)}{\cos(a-b)}$ und $\dfrac{\sin(a+b)}{\cos(a-b)}$

Setzt man diese Werte für x und y in die linke Seite der auf Null gebrachten Gleichung eines Laufstrahles $\alpha\beta$ ein, so erhält man den Ausdruck $\frac{\cos(a+b-\alpha-\beta)}{\cos(a-b)} - \cos(\alpha-\beta)$, d. h. wenn unter $E_{\alpha\beta}^{ab}$ die Entfernung des Punktes ab von dem Laufstrahl $\alpha\beta$ verstanden wird und zwar positiv oder negativ gerechnet, je nachdem der Punkt auf der positiven oder negativen Seite des Strahls liegt, so ist

$$-E_{\alpha\beta}^{ab} = \frac{\cos(a+b-\alpha-\beta)}{\cos(a-b)} - \cos(\alpha-\beta)$$

Werden α und β als Variable angesehen, so ist diese Gleichung als Gleichung des Büschels der Tangenten eines Kreises aufzufassen ausgedrückt in Kreiskoordinaten der Strahlen. Hierbei ist beachtenswert, dass dabei die Tangenten in bestimmtem Sinne als Laufstrahlen genommen sind oder mit anderen Worten:

Sind a und b die Kreiskoordinaten eines Punktes, α und β die Kreiskoordinaten eines Laufstrahls und ist r eine absolute Zahl, so sagt die Gleichung

$$\frac{\cos(a+b-\alpha-\beta)}{\cos(a-b)} - \cos(\alpha-\beta) = -r \quad (\text{resp. } = +r)$$

aus, dass der Laufstrahl $\alpha\beta$ den um ab mit r geschlagenen Kreis berührt und zu seiner linken (resp. rechten) Seite lässt.

15. Die obigen Bemerkungen lassen sich nach verschiedenen Seiten weiterführen und verallgemeinern, es ist mir nicht unwahrscheinlich, dass Steiner mehrfach ähnliche Wege betreten hat.

II. Ueber den Feuerbach'schen Kreis.

16. Wir betrachten ein vollständiges Viereck $J_0 J_1 J_2 J_3$, dessen Gegenseiten zu einander senkrecht stehen. Die Seiten $J_0 J_1$ und $J_2 J_3$ schneiden sich in A, $J_0 J_2$ und $J_3 J_1$ in B, $J_0 J_3$ und $J_1 J_2$ in C. Die Mitten der sechs Seiten des Vierecks heissen M_{01}, M_{02} u. s. w. Sieht man irgend drei unter den

vier Punkten J als Ecken eines Dreiecks an, so hat dasselbe allemal den vierten Punkt J zum Höhenschnittpunkt und A B und C zu Höhenfusspunkten. Die drei Punkte A B C und die sechs Punkte M liegen in der Peripherie eines Kreises Φ, dieser ist Feuerbach'scher Kreis für jedes der vier aus den Punkten J zu bildenden Dreiecke und spielt in den folgenden Ueberlegungen eine fundamentale Rolle. Wir wählen auf Φ einen Anfangspunkt 0 und eine Umlaufsrichtung, so hat nach 1. jeder Punkt von Φ seinen bis auf Vielfache von π bestimmten Parameter; die Parameter von M_{23}, M_{31} und M_{12} seien α, β und γ. Wir nehmen ferner an, der Punkt 0 werde so gewählt, dass die Summe $\alpha+\beta+\gamma$ einem Vielfachen von π gleich wird. Es giebt drei solche Punkte und sie bilden die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks. Unter α, β und γ können wir dann der Einfachheit wegen sogar solche Werte verstehen, deren Summe gleich Null ist. Da die Sehne $A\,M_{23}$ parallel mit der Sehne $M_{31}\,M_{12}$ ist, hat A zum Parameter den Wert $-\alpha+\beta+\gamma=-2\,\alpha$ und ebenso sind $-2\,\beta$ und $-2\,\gamma$ Parameter von B und C. Zu Parametern der Punkte M_{01} M_{02} M_{03} ferner kann man nach bekannten Beziehungen $\alpha\pm\frac{\pi}{2}$, $\beta\pm\frac{\pi}{2}$, $\gamma\pm\frac{\pi}{2}$ nehmen.

17. Wo kein Missverständnis zu besorgen ist, können wir, wie schon früher, einem Punkte von Φ und seinem Parameter die gleiche Bezeichnung geben.

Durch die Gleichung

$$\sin(p_0-\alpha)+\sin(p_0-\beta)+\sin(p_0-\gamma)=0$$

wird ein Parameter p_0 bis auf Vielfache von π, der Punkt p_0 also völlig bestimmt. Nun ist identisch

$$\sin(p_0-\alpha)\sin(\beta-\gamma)+\sin(p_0-\beta)\sin(\gamma-\alpha)$$
$$+\sin(p_0-\gamma)\sin(\alpha-\beta)=0$$

also folgt, dass

$$-\varrho_0 \sin(p_0-\alpha) = \sin(\alpha-\beta) - \sin(\gamma-\alpha)$$
$$-\varrho_0 \sin(p_0-\beta) = \sin(\beta-\gamma) - \sin(\alpha-\beta)$$
$$-\varrho_0 \sin(p_0-\gamma) = \sin(\gamma-\alpha) - \sin(\beta-\gamma)$$

worin ϱ_0 ein noch näher zu bestimmender Faktor.

Ferner folgt

$$-\varrho_0(\sin(p_0-\alpha)+\sin(p_0-\beta)) = \sin(\beta-\gamma)-\sin(\gamma-\alpha)$$

oder

$$-\varrho_0\cdot 2\sin\left(p_0-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\frac{\beta-\alpha}{2} = 2\cos\frac{\beta-\alpha}{2}\sin\frac{\beta-2\gamma+\alpha}{2}$$

oder wegen $\alpha+\beta+\gamma=0$

$$\varrho_0\sin\left(p_0+\frac{\gamma}{2}\right) = \sin\frac{3\gamma}{2}$$

Quadriert man diese Gleichung und führt Kosinusse ein, so kommt

$$\varrho_0^2(1-\cos(2p_0+\gamma)) = 1-\cos 3\gamma$$

oder

$$\varrho_0^2\cos(2p_0+\gamma)-\cos 3\gamma = \varrho_0^2-1$$

und ebenso ergiebt sich auch

$$\varrho_0^2\cos(2p_0+\alpha)-\cos 3\alpha = \varrho_0^2-1$$
$$\varrho_0^2\cos(2p_0+\beta)-\cos 3\beta = \varrho_0^2-1$$

Diese drei Gleichungen lassen nun auf Grund von 14) eine bemerkenswerte geometrische Deutung zu. Sie zeigen nämlich, dass die vier Laufstrahlen mit den Kreiskoordinaten α und -2α, β und -2β, γ und -2γ, p_0 und p_0 einen und denselben Kreis berühren und zwar ihn alle auf der gleichen Seite haben, dessen Radius dem absoluten Werte von ϱ_0^2-1 gleich ist. Die Cartesischen Koordinaten seines Mittelpunktes sind $\varrho_0^2\cos 2p_0$ und $\varrho_0^2\sin 2p_0$, er berührt also Φ im Punkte p_0. Hiermit haben wir den von Feuerbach und Steiner, der ihn digne de remarque nennt, gefundenen Satz:

Die vier Berührungskreise eines Dreiecks berühren auch den Kreis, der durch die Seitenmitten und Höhenfusspunkte geht.

18. Aus der Definitionsgleichung für p_0

$$\sin(p_0 - \alpha) + \sin(p_0 - \beta) + \sin(p_0 - \gamma) = 0$$

folgt, wenn man die Sinus auflöst und einen Faktor f einführt:

$$f \cdot \sin p_0 = \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma$$
$$f \cdot \cos p_0 = \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma$$

und weiter

$$f \cdot \sin(p_0 + x) = \sin(\alpha + x) + \sin(\beta + x) + \sin(\gamma + x)$$

für jeden Wert von x. Setzt man $-\alpha$ für x ein, so zeigt ein Vergleich mit 17., dass $f = \varrho_0$ ist. Es ist also für jeden Wert von x

$$\varrho_0 \sin(p_0 + x) = \sin(\alpha + x) + \sin(\beta + x) + \sin(\gamma + x)$$

insbesondere wird z. B. für $x = \frac{\pi}{2} - p_0$

$$\varrho_0 = \cos(p_0 - \alpha) + \cos(p_0 - \beta) + \cos(p_0 - \gamma)$$

Um ϱ_0 durch α, β, γ ausgedrückt zu erhalten, bilde man:

$$\begin{aligned} \varrho_0^2 &= \varrho_0^2 \sin^2 p_0 + \varrho_0^2 \cos^2 p_0 \\ &= 3 + 2\cos(\alpha - \beta) + 2\cos(\beta - \gamma) + 2\cos(\gamma - \alpha) \end{aligned}$$

Nun ist allgemein, wie leicht zu prüfen,

$$\begin{aligned} &\cos a + \cos b + \cos c + \cos(a + b + c) \\ &= 4\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{b+c}{2}\cos\frac{c+a}{2} \end{aligned}$$

also wird:

$$\varrho_0^2 = 1 + 8\cos\frac{\alpha - \beta}{2}\cos\frac{\beta - \gamma}{2}\cos\frac{\gamma - \alpha}{2}$$

Das Vorzeichen von ϱ_0 würde erst bestimmt werden, wenn wir verfügten, welcher der möglichen Werte für p zu nehmen sei.

19. Um auch die den drei übrigen Berührungskreisen des Dreiecks $J_1 J_2 J_3$ zugehörigen Werte zu erhalten, hat man nur jedesmal je zwei von den Parametern der Punkte $M_{23}\, M_{31}\, M_{12}$ zu verändern, einen um $+\pi$, einen um $-\pi$, und zwar setzen wir

$$\begin{aligned}
\varrho_1 \sin(p_1 + x) &= \sin(\alpha + x) - (\beta + x) - \sin(\gamma + x)\\
\varrho_2 \sin(p_2 + x) &= -\sin(\alpha + x) + (\beta + x) - \sin(\gamma + x)\\
\varrho_3 \sin(p_3 + x) &= -\sin(\alpha + x) - (\beta + x) + \sin(\gamma + x)
\end{aligned}$$

wo also alle drei Gleichungen für jeden Wert von x gelten. Die Punkte p mögen Feuerbach'sche Punkte des Dreiecks $J_1 J_2 J_3$ heissen, die Tangenten von Φ in diesen Punkten Feuerbach'sche Linien.

20. Aus den so gewonnenen Gleichungen lassen sich manche, wie es scheint noch nicht bemerkte, Folgerungen ziehen. Setzt man zur Abkürzung

$$\sin(\beta - \gamma) = s_1 \qquad \sin(\gamma - \alpha) = s_2 \qquad \sin(\alpha - \beta) = s_3$$

so folgt aus 18. und 19.

$$\begin{array}{lll}
\varrho_0 \sin(p_0 - \alpha) = s_2 - s_3 & \varrho_0 \sin(p_0 - \beta) = s_3 - s_1 & \varrho_0 \sin(p_0 - \gamma) = s_1 - s_2\\
\varrho_1 \sin(p_1 - \alpha) = -s_2 + s_3 & \varrho_1 \sin(p_1 - \beta) = s_3 + s_1 & \varrho_1 \sin(p_1 - \gamma) = -s_1 - s_2\\
\varrho_2 \sin(p_2 - \alpha) = -s_2 - s_3 & \varrho_2 \sin(p_2 - \beta) = -s_3 + s_1 & \varrho_2 \sin(p_2 - \gamma) = s_1 + s_2\\
\varrho_3 \sin(p_3 - \alpha) = s_2 + s_3 & \varrho_3 \sin(p_3 - \beta) = -s_3 - s_1 & \varrho_3 \sin(p_3 - \gamma) = -s_1 + s_2
\end{array}$$

Die Strecke $M_{31}\, M_{12}$ wird also nach 4. von der Geraden $p_3\, p_2$ geteilt nach dem Verhältnis

$$-\frac{\sin(\beta - p_3)\sin(\beta - p_2)}{\sin(\gamma - p_3)\sin(\gamma - p_2)} = \frac{s_2^3 - s_1^2}{s_1^2 - s_2^2}$$

und von der Geraden $p_0\, p_1$ nach dem Verhältnis

$$-\frac{\sin(\beta - p_0)\sin(\beta - p_1)}{\sin(\gamma - p_0)\sin(\gamma - p_1)} = \frac{s_3^2 - s_1^2}{s_1^2 - s_3^2}$$

d. h. der Schnittpunkt der Geraden $p_0\, p_1$ und $p_2\, p_3$ liegt auf $M_{31}\, M_{12}$ und teilt die Strecke nach dem Verhältnis $\dfrac{s_3^2 - s_1^2}{s_1^2 - s_2^2}$.

In ausführlicherer Bezeichnung hat man für dies Verhältnis

$$\frac{\sin^2(\alpha-\beta)-\sin^2(\beta-\gamma)}{\sin^2(\beta-\gamma)-\sin^2(\gamma-\alpha)}=\frac{\sin(\alpha-\gamma)\sin(\alpha-2\beta+\gamma)}{\sin(\beta-\alpha)\sin(\beta-2\gamma+\alpha)}=\frac{\sin(\gamma-\alpha)\sin 3\beta}{\sin(\alpha-\beta)\sin 3\gamma}$$

Für die Teilung der Strecke $M_{31}M_{12}$ durch die Gerade BC hat man nach 4.

$$-\frac{\sin(\beta+2\beta)\sin(\beta+2\gamma)}{\sin(\gamma+2\beta)\sin(\gamma+2\gamma)}=\frac{\sin(\gamma-\alpha)\sin 3\beta}{\sin(\alpha-\beta)\sin 3\gamma}$$

also wieder dasselbe Verhältnis, d. h. die vier Geraden

$$M_{31}M_{12} \qquad BC \qquad p_0 p_1 \qquad p_2 p_3$$

gehen durch einen Punkt, etwa X_{01}. Ebenso ergiebt sich

$M_{12}M_{23}$ CA $p_0 p_2$ $p_1 p_3$ gehen durch Punkt X_{02}
$M_{23}M_{31}$ AB $p_0 p_3$ $p_1 p_2$ „ „ „ X_{03}

Die Schnittpunkte der Gegenseiten des Feuerbach'schen Vierecks für ein Dreieck sind die Punkte, in denen die Seiten des Dreiecks der Seitenmitten von den entsprechenden Seiten des Dreiecks der Höhenfusspunkte getroffen werden.

21. Die Seite $p_0 p_1$ geht durch zwei Punkte, in denen die zu p_0 und p_1 gehörenden Berührungskreise von einem Kreise, nämlich Φ, berührt werden, also durch einen ihrer Aehnlichkeitspunkte, der als Fusspunkt einer Winkelhalbierenden des Dreiecks $J_1 J_2 J_3$ leicht zu bestimmen ist. Daher kann man die Feuerbach'schen Punkte auf folgende einfache Weise konstruiren: Man verbinde die Punkte $X_{01}\,X_{02}\,X_{03}$ bez. mit den Fusspunkten der Winkelhalbierenden auf der entsprechenden Seite von $J_1 J_2 J_3$, so schneiden sich die drei so erhaltenen Paare von Geraden zu je dreien in vier Punkten und diese sind die Feuerbach'schen Punkte des Dreiecks $J_1 J_2 J_3$.

Auf ähnlich einfache Weise kann man auch die Feuerbach'schen Tangenten finden. Die Feuerbach'schen Tangenten in p_0 und p_1 schneiden sich im Pol von X_{01}, also auf der

Geraden $X_{02} X_{03}$, sie schneiden sich aber auch, weil die betreffenden Berührungskreise in p_0 und p_1 von einem Kreise, nämlich Φ, berührt werden, auf der Potenzlinie dieser beiden Kreise, die, wie man leicht erkennt, Winkelhalbierende des Mittendreiecks ist. Die genauere Zuweisung der Elemente mag der Kürze halber übergangen werden, es findet sich: Die drei Paar Winkelhalbierenden des Dreiecks $M_{23} M_{31} M_{12}$ treffen die korrespondirenden Seiten des Dreiecks $X_{01} X_{02} X_{03}$ in drei Punktepaaren und diese sind die drei Paar Gegenecken des vollständigen Vierseits der Feuerbach'schen Tangenten von Dreieck $J_1 J_2 J_3$.

22. Als Diagonaldreieck eines in Φ einbeschriebenen Vierecks ist das Dreieck $X_{01} X_{02} X_{03}$ ein Polardreieck von Φ. Es giebt daher eine einfach unendliche Reihe von Vierecken in Φ, die alle dieselben Punkte zum Diagonaldreieck haben und unter diesen zeichnen sich die beiden aus, die bez. $M_{23} M_{31} M_{12}$ und $A B C$ enthalten, ihre vierten Ecken mögen Q_0 und R_0 heissen, oder mit andern Worten: Die drei Geraden $X_{01} M_{23}$, $X_{02} M_{31}$ und $X_{03} M_{12}$ gehen durch einen Punkt Q_0 auf Φ; die drei Geraden $X_{01} A$, $X_{02} B$, $X_{03} C$ gehen durch einen Punkt R_0 auf Φ.

Es ist nun von Interesse, die Lage der Punkte Q_0 und R_0 gegen $A B C$ näher zu betrachten. Da $B C$ von $A R_0$ und $M_{31} M_{12}$ in demselben Punkte X_{01} getroffen wird, so hat man nach 4.

$$-\frac{\sin(-2\beta+2\alpha)\sin(-2\beta-R_0)}{\sin(-2\gamma+2\alpha)\sin(-2\gamma-R_0)} = -\frac{\sin(-2\beta-\beta)\sin(-2\beta-\gamma)}{\sin(-2\gamma-\beta)\sin(-2\gamma-\gamma)}$$

oder wegen $\alpha + \beta + \gamma = 0$

$$\frac{\sin(R_0+2\beta)}{\sin(R_0+2\gamma)} = \frac{\sin 3\beta \sin(\alpha-\beta)\sin(2\gamma-2\alpha)}{\sin 3\gamma \sin(\gamma-\alpha)\sin(2\alpha-2\beta)}$$

$$= \frac{\sin 3\beta \cos(\gamma-\alpha)}{\sin 3\gamma \cos(\alpha-\beta)} = \frac{\sin(2\beta-2\alpha)+\sin(2\beta-2\gamma)}{\sin(2\gamma-2\beta)+\sin(2\gamma-2\alpha)}$$

Setzen wir zur Abkürzung

$$\sin(2\beta-2\gamma)=\sigma_1 \qquad \sin(2\gamma-2\alpha)=\sigma_2 \qquad \sin(2\alpha-2\beta)=\sigma_3$$

so haben wir

$$\frac{\sin(R_0 + 2\beta)}{\sin(R_0 + 2\gamma)} = \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{\sigma_1 - \sigma_2}$$

Ebenso wird

$$\frac{\sin(R_0 + 2\gamma)}{\sin(R_0 + 2\alpha)} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_2 - \sigma_3}$$

daher kann mit einem Faktor r_0 geschrieben werden:

$$r_0 \sin(R_0 + 2\alpha) = \sigma_2 - \sigma_3 \quad r_0 \sin(R_0 + 2\beta) = \sigma_3 - \sigma_1 \quad r_0 \sin(R_0 + 2\gamma) = \sigma_1 - \sigma_2$$

Die hieraus folgende Gleichung

$$\sin(R_0 + 2\alpha) + \sin(R_0 + 2\beta) + \sin(R_0 + 2\gamma) = 0$$

lässt eine einfache geometrische Deutung zu. Nach 17. folgt nämlich:

R_0 ist ein Feuerbach'scher Punkt für dasjenige Dreieck, welches seine Seitenmitten in ABC hat, es heisse $A B \Gamma$.

23. Da BC von $M_{23} Q_0$ und $M_{31} M_{12}$ in demselben Punkte X_{01} getroffen wird, so hat man nach 4.

$$-\frac{\sin(-2\beta - \alpha)\sin(-2\beta - Q_0)}{\sin(-2\gamma - \alpha)\sin(-2\gamma - Q_0)} = -\frac{\sin(-2\beta - \beta)\sin(-2\beta - \gamma)}{\sin(-2\gamma - \beta)\sin(-2\gamma - \gamma)}$$

oder wegen $\alpha + \beta + \gamma = 0$

$$\frac{\sin(Q_0 + 2\beta)}{\sin(Q_0 + 2\gamma)} = \frac{\sin 3\beta \sin(\alpha - \beta)}{\sin 3\gamma \sin(\gamma - \alpha)}$$

Ebenso wird

$$\frac{\sin(Q_0 + 2\gamma)}{\sin(Q_0 + 2\alpha)} = \frac{\sin 3\gamma \sin(\beta - \gamma)}{\sin 3\alpha \sin(\alpha - \beta)}$$

Daher kann mit einem Faktor q_0 geschrieben werden:

$$q_0 \sin(Q_0 + 2\alpha) = -\frac{\sin 3\alpha}{\sin(\beta - \gamma)} \quad q_0 \sin(Q_0 + 2\beta) = -\frac{\sin 3\beta}{\sin(\gamma - \alpha)}$$

$$q_0 \sin(Q_0 + 2\gamma) = -\frac{\sin 3\gamma}{\sin(\alpha - \beta)}$$

So brauchbar auch diese Ausdrücke schon sind, ziehen wir es doch vor, sie umzugestalten durch Erweiterung der Quotienten. Es ist

$$\frac{-\sin 3\alpha}{\sin(\beta-\gamma)} = \frac{-2\sin 3\alpha\cos(\beta-\gamma)}{2\sin(\beta-\gamma)\cos(\beta-\gamma)} = \frac{\sigma_2-\sigma_3}{\sigma_1}$$

also haben wir auch

$$q_0\sin(Q_0+2\alpha) = \frac{\sigma_2-\sigma_3}{\sigma_1} \qquad q_0\sin(Q_0+2\beta) = \frac{\sigma_3-\sigma_1}{\sigma_2}$$

$$q_0\sin(Q_0+2\gamma) = \frac{\sigma_1-\sigma_2}{\sigma_3}$$

Es mag hier bemerkt werden, dass die Grössen s und σ nicht nur eingeführt sind der Abkürzung wegen, sondern weil sie eine einfache geometrische Deutung zulassen. Sie sind nämlich den Seiten der Dreiecke $M_{23}M_{31}M_{12}$ und ABC abgesehen vom Vorzeichen proportional. Gerade durch diesen Umstand empfehlen sie sich aber, denn bei den mannigfachen und ziemlich verwickelten Beziehungen, die noch betrachtet werden sollen, würde der Versuch, die absoluten Werte der Seiten mit expliciten Vorzeichen in der gewöhnlichen Weise zu benutzen, alsbald auf eine unübersehbare Menge von verschiedenen Fällen führen, während man auf unserem Wege aller mühsamen Unterscheidungen überhoben bleibt.

24. In 20. ergab sich

$$\frac{M_{31}X_{01}}{X_{01}M_{12}} = \frac{s_3^2-s_1^2}{s_1^2-s_2^2} \qquad \frac{M_{12}X_{02}}{X_{02}M_{23}} = \frac{s_1^2-s_2^2}{s_2^2-s_3^2} \qquad \frac{M_{23}X_{03}}{X_{03}M_{31}} = \frac{s_2^2-s_3^2}{s_3^2-s_1^2}$$

also ist

$$\frac{M_{31}X_{01}}{X_{01}M_{12}} = \frac{M_{23}M_{12}}{M_{12}X_{02}} = \frac{X_{03}M_{31}}{M_{31}M_{23}}$$

und wenn man auf den Seiten des Dreiecks $M_{23}M_{31}M_{12}$ die unendlich fernen Punkte für den Augenblick mit $\infty_1\ \infty_2\ \infty_3$ bezeichnet, so sind die Punktgruppen

$$M_{31}\, X_{01}\, M_{12}\, \infty_1$$
$$M_{23}\, M_{12}\, X_{02}\, \infty_2$$
$$X_{03}\, M_{31}\, M_{23}\, \infty_3$$

projektivisch und mithin sind z. B.

$$M_{31}\, X_{01}\, M_{12}\, \infty_1 \quad \text{und} \quad M_{31}\, X_{03}\, \infty_3\, M_{23}$$

zu einander perspektivisch gelegen und zwar von J_2 aus. So findet sich:

Die Seiten des Dreiecks $X_{01} X_{02} X_{03}$ gehen durch die entsprechenden Ecken des Dreiecks $J_1 J_2 J_3$.

Hieraus lassen sich Folgerungen ziehen, die zweckmässig durch eine allgemeinere Betrachtung vorbereitet werden.

25. Die in dieser Nummer zu benutzenden Bezeichnungen gelten nur hier. In der Ebene eines Dreiecks $A_1 A_2 A_3$ mit den Seiten $a_1\, a_2\, a_3$ liegen vereinigt Punkt O und Gerade o. Von O nach $A_1 A_2 A_3$ gehen die Geraden $\partial_1 \partial_2 \partial_3$, o schneidet $a_1\, a_2\, a_3$ in $D_1\, D_2\, D_3$. Wir bestimmen Strahl e_1 harmonisch zu ∂_1 bezüglich a_2 und a_3, ebenso e_2 und e_3; ferner Punkt E_1 harmonisch zu D_1 bezüglich A_2 und A_3 und ebenso E_2 und E_3. Dann gehen

$$\begin{array}{llll} \partial_1\, e_2\, e_3 & \text{durch einen Punkt} & & F_1 \\ \partial_2\, e_3\, e_1 & \text{„} & \text{„} \quad \text{„} & F_2 \\ \partial_3\, e_1\, e_2 & \text{„} & \text{„} \quad \text{„} & F_3 \end{array}$$

und liegen

$$\begin{array}{llll} D_1\, E_2\, E_3 & \text{in einer Geraden} & & f_1 \\ D_2\, E_3\, E_1 & \text{„} & \text{„} \quad \text{„} & f_2 \\ D_3\, E_1\, E_2 & \text{„} & \text{„} \quad \text{„} & f_3 \end{array}$$

und es liegt F_1 mit f_1, F_2 mit f_2, F_3 mit f_3 vereinigt.

Ein Kegelschnitt $K^{(2)}$ geht durch $A_1\, A_2\, A_3$ und berührt daselbst $e_1\, e_2\, e_3$.

Ein Kegelschnitt $k^{(2)}$ berührt $a_1\, a_2\, a_3$ und zwar in $E_1 E_2 E_3$.

Die Geraden $A_1 E_1$ und $A_2 E_2$ und $A_3 E_3$ gehen durch einen Punkt A von $K^{(2)}$.

Die Schnittpunkte $a_1 e_1$ und $a_2 e_2$ und $a_3 e_3$ liegen in einer Geraden a_1 Tangente von $k^{(2)}$.

Die Schnittpunkte $e_1 f_1 = U_1$ und $e_2 f_2 = U_2$ und $e_3 f_3 = U_3$ liegen in einer Geraden e_1 der Tangente von $K^{(2)}$ in A, die Geraden $E_1 F_1 = u_1$ und $E_2 F_2 = u_2$ und $E_3 F_3 = u_3$ gehen durch einen Punkt E, den Berührungspunkt von a mit $k^{(2)}$.

$G_1\, G_2\, G_3\, O$ sind Pole von $\partial_1\, \partial_2\, \partial_3\, a$ bez. $K^{(2)}$.

$g_1\, g_2\, g_3\, o$ sind Polaren von $D_1\, D_2\, D_3\, A$ bez. $k^{(2)}$.

Je zwei mit gleichen Buchstaben, gross und klein, bezeichnete Elemente sind polar bez. eines dritten Kegelschnitts, der also insbesondere $f_1 f_2 f_3$ und o in $F_1 F_2 F_3$ und O berührt, $A_1 A_2 A_3$ zum Polardreieck hat u. s. w.

26. Die Beziehungen von 25. finden sich in unserer Hauptfigur zweimal verwirklicht, an die Stelle von

$$A_1\; A_2\; A_3\; F_1\; F_2\; F_3\; E_1\; E_2\; E_3\; A$$

treten einmal

$$M_{23}\; M_{31}\; M_{12}\; J_1\; J_2\; J_3\; X_{01}\; X_{02}\; X_{03}\; Q_0$$

das andere Mal

$$A\; B\; C\; J_1\; J_2\; J_3\; X_{01}\; X_{02}\; X_{03}\; R_0$$

Aus der Menge von Sätzen, die sich hieraus ergeben, heben wir nur einige hervor.

Der Kegelschnitt, der die Seiten des Dreiecks $J_1 J_2 J_3$ in den Mitten berührt (Steiner'sche Ellipse von $J_1 J_2 J_3$), schneidet Φ in Q_0.

Der Kegelschnitt, der die Seiten des Dreiecks $J_1 J_2 J_3$ in den Höhenfusspunkten berührt, schneidet Φ in R_0.

Die drei Punkte, in denen sich entsprechende Seiten der Dreiecke $J_1 J_2 J_3$ und $X_{01} X_{02} X_{03}$ begegnen, liegen in einer Geraden, dieselbe geht durch Q_0 und

R_0 und berührt daselbst die eben genannten Kegelschnitte.

Die drei Punkte, in denen sich entsprechende Seiten der Dreiecke $M_{23}\,M_{31}\,M_{12}$ und $X_{01}\,X_{02}\,X_{03}$ begegnen, liegen in einer Geraden, dieselbe geht durch den Schwerpunkt des Dreiecks $J_1\,J_2\,J_3$.

Die drei Punkte, in denen sich entsprechende Seiten der Dreiecke $A\,B\,C$ und $X_{01}\,X_{02}\,X_{03}$ begegnen, liegen in einer Geraden, dieselbe geht durch den Höhenschnittpunkt des Dreiecks $J_1\,J_2\,J_3$.

Die Seiten des Dreiecks $M_{23}\,M_{31}\,M_{12}$ werden in den Punkten $X_{01}\,X_{02}\,X_{03}$ von einem Kegelschnitt berührt und zwar von einer Parabel. Die Geraden $J_1\,X_{01}$ und $J_2\,X_{02}$ und $J_3\,X_{03}$ sind einander parallel und geben die Richtung der Achse der Parabel an. Die Parabel hat ihren Brennpunkt in R_0.

Die letzte Bemerkung bestätigt sich am einfachsten, wenn man die ähnlichen Punktreihen auf den Tangenten über R_0 nach Φ projiziert, denn dann erkennt man, dass die projizierenden Strahlbüschel kongruent sind.

27. Wir machen nunmehr, wie es durch die Bezeichnungen schon vorbereitet ist, das Dreieck $A\,B\,C$ oder das Dreieck $A\,B\,\Gamma$, das in $A\,B\,C$ seine Seitenmitten hat, zum Kerne einer reichen Gruppe von Beziehungen. Die Ueberlegungen, die an das Dreieck $J_1\,J_2\,J_3$ angeknüpft wurden, lassen sich auch auf die Dreiecke $J_0\,J_2\,J_3$, $J_1\,J_0\,J_3$ und $J_1\,J_2\,J_0$ anwenden. Um sogleich die fertigen Resultate zu erhalten, hat man bei J, M, X, Q und R die

Indizes	0	mit	1	und	gleichzeitig	B	mit	C
oder	0	„	2	„	„	C	„	A
„	0	„	3	„	„	A	„	B

zu vertauschen und in den Formeln ist die gleiche Indizesvertauschung an q und r zu verbinden mit der Ersetzung von

$$\begin{array}{llll} & \alpha & \beta & \gamma \\ \text{durch} & \alpha & \gamma + \frac{\pi}{2} & \beta - \frac{\pi}{2} \\ & \gamma - \frac{\pi}{2} & \beta & \alpha + \frac{\pi}{2} \\ & \beta + \frac{\pi}{2} & \alpha - \frac{\pi}{2} & \gamma \end{array}$$

woraus sich das Nötige für die s und σ ergiebt.

28. Die Punkte $R_0\,R_1\,R_2\,R_3$ bilden das Feuerbach'sche Viereck für Dreieck $AB\Gamma$, es gilt für sie:

$$r_0 \sin(R_0 + 2\alpha) = \sigma_2 - \sigma_3 \qquad r_0 \sin(R_0 + 2\beta) = \sigma_3 - \sigma_1$$
$$r_0 \sin(R_0 + 2\gamma) = \sigma_1 - \sigma_2$$

$$r_1 \sin(R_1 + 2\alpha) = -\sigma_2 + \sigma_3 \qquad r_1 \sin(R_1 + 2\beta) = \sigma_3 + \sigma_1$$
$$r_1 \sin(R_1 + 2\gamma) = -\sigma_1 - \sigma_2$$

$$r_2 \sin(R_2 + 2\alpha) = -\sigma_2 - \sigma_3 \qquad r_2 \sin(R_2 + 2\beta) = -\sigma_3 + \sigma_1$$
$$r_2 \sin(R_2 + 2\gamma) = \sigma_1 + \sigma_2$$

$$r_3 \sin(R_3 + 2\alpha) = \sigma_2 + \sigma_3 \qquad r_3 \sin(R_3 + 2\beta) = -\sigma_3 - \sigma_1$$
$$r_3 \sin(R_3 + 2\gamma) = -\sigma_1 + \sigma_2$$

woraus alle entsprechenden Folgerungen zu ziehen sind, wie aus den Gleichungen in 20.

Die Punkte $Q_0\,Q_1\,Q_2\,Q_3$ bilden ein dem Feuerbach'schen beigeordnetes ausgezeichnetes Viereck für Dreieck $AB\Gamma$, es gilt für sie:

$$q_0 \sin(Q_0 + 2\alpha) = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{\sigma_1} \qquad q_0 \sin(Q_0 + 2\beta) = \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{\sigma_2}$$
$$q_0 \sin(Q_0 + 2\gamma) = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_3}$$

$$q_1 \sin(Q_1 + 2\alpha) = \frac{-\sigma_2 + \sigma_3}{\sigma_1} \qquad q_1 \sin(Q_1 + 2\beta) = \frac{-\sigma_3 - \sigma_1}{\sigma_2}$$
$$q_1 \sin(Q_1 + 2\gamma) = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{\sigma_3}$$

$$q_2 \sin(Q_2 + 2\alpha) = \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{\sigma_1} \qquad q_2 \sin(Q_2 + 2\beta) = \frac{-\sigma_3 + \sigma_1}{\sigma_2}$$

$$q_2 \sin(Q_2 + 2\gamma) = \frac{-\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_3}$$

$$q_3 \sin(Q_3 + 2\alpha) = \frac{-\sigma_2 - \sigma_3}{\sigma_1} \qquad q_3 \sin(Q_3 + 2\beta) = \frac{\sigma_3 + \sigma_1}{\sigma_2}$$

$$q_3 \sin(Q_3 + 2\gamma) = \frac{-\sigma_1 + \sigma_2}{\sigma_3}$$

29. Wir benennen die Höhenfusspunkte von Dreieck $A B \Gamma$ mit $A^1 B^1 C^1$, diese sind Seitenmitten für ein neues Dreieck, wir nennen es $A^1 B^1 \Gamma^1$. Die Höhenfusspunkte in diesem bilden ein neues Dreieck $A^2 B^2 C^2$, welches wieder Seitenmittendreieck für ein anderes $A^2 B^2 \Gamma^2$ ist u. s. w. Dann sind die Parameter von A^1, B^1, C^1, bez. 4α, 4β, 4γ; von A^2, B^2, C^2 bez. -8α, -8β, -8γ u. s. w. Hat dann ein Punkt zum Dreieck $A^1 B^1 C^1$ dieselbe Beziehung wie z. B. Q zu $A B C$, so können wir dies dadurch ausdrücken und aussprechen, dass wir ihn Q^1 mit einem oberen Index nennen.

Das vollständige Viereck $J_0 J_1 J_2 J_3$ ist gebildet von den drei Paar Winkelhalbierenden des Dreiecks $A B C$, so würde das aus den Winkelhalbierenden von Dreieck $A^1 B^1 C^1$ gebildete vollständige Viereck $J^1_0 J^1_1 J^1_2 J^1_3$ zu nennen sein. Wir haben soeben drei von seinen Ecken mit $A B \Gamma$ bezeichnet und ziehen dies hier vor, während die andere Bezeichnung da zweckmässiger wäre, wo wir die vier in $J^1_0 J^1_1 J^1_2 J^1_3$ enthaltenen Dreiecke gleichzeitig zu betrachten wünschten. Diese Betrachtung soll aber nur an dem Viereck $J_0 J_1 J_2 J_3$ wirklich durchgeführt werden.

30. Ueber das Viereck $R_0 R_1 R_2 R_3$ erhält man durch Wiederholung als bemerkenswertheste Eigenschaften:

$R_0 R_1$ und $R_2 R_3$ schneiden sich in R_a
$R_0 R_2$ „ $R_1 R_3$ „ „ „ R_b
$R_0 R_3$ „ $R_1 R_2$ „ „ „ R_c

$R_a\, R_b\, R_c$ sind die Schnittpunkte entsprechender Seiten der Dreiecke $A\, B\, C$ und $A^1\, B^1\, C^1$.

Die Seiten von Dreieck $R_a\, R_b\, R_c$ gehen durch die entsprechenden Ecken von $A\, B\, \Gamma$.

Die Geraden $R_a\, A$ und $R_b\, B$ und $R_c\, C$ gehen durch denselben Punkt von Φ. Dieser ist zu nennen Q^1 und liegt auf dem Kegelschnitt, der die Seiten von $A\, B\, \Gamma$ in $A\, B\, C$ berührt.

Die Geraden $R_a\, A^1$ und $R_b\, B^1$ und $R_c\, C^1$ gehen durch denselben Punkt von Φ und dieser ist zu nennen R^1 und liegt auf dem Kegelschnitt, der die Seiten von $A\, B\, \Gamma$ in $A^1\, B^1\, C^1$ berührt.

Die Seiten von Dreieck $R_a\, R_b\, R_c$ begegnen den entsprechenden Seiten von $A\, B\, \Gamma$ in drei Punkten einer Geraden und diese berührt die beiden Kegelschnitte in Q^1 und R^1.

Die beiden Kegelschnitte und Φ haben $R_a\, R_b\, R_c$ zum gemeinsamen Polardreieck.

31. Ueber das Viereck $Q_0\, Q_1\, Q_2\, Q_3$ ergiebt sich aus 28. leicht, dass die Schnittpunkte der Gegenseiten $Q_a\, Q_b\, Q_c$ in die entsprechenden Seiten von Dreieck $A B C$ fallen und ferner: Die Geraden $Q_a\, A$ und $Q_b\, B$ und $Q_c\, C$ gehen durch denselben Punkt von Φ und zwar durch den Punkt R^1.

32. Auch über die gegenseitige Lage des Q- und des R-Vierecks folgen aus den Gleichungen in 28. einfache Relationen. Durch Anwendung von 4. findet man:

$R_0\, Q_1$ und $R_1\, Q_0$ treffen $B\, C$ in demselben Punkte G_{01} und teilen es nach dem Verhältnis

$$\frac{\sigma_3^2 - \sigma_1^2}{\sigma_2} : \frac{\sigma_1^2 - \sigma_2^2}{\sigma_3}$$

$R_2\,Q_3$ und $R_3\,Q_2$ treffen $B\,C$ in demselben Punkte G_{23} und teilen es nach dem Verhältnis

$$-\frac{\sigma_3^2-\sigma_1^2}{\sigma_2}:\frac{\sigma_1^2-\sigma_2^2}{\sigma_3}$$

Das Punktepaar $G_{01}\,G_{23}$ ist also harmonisch zum Paar $B\,C$.

Ebenso findet man: Die Schnittpunkte $(R_0\,Q_2,\;R_2\,Q_0)=G_{02}$ und $(R_1\,Q_3,\;R_3\,Q_1)=G_{13}$ liegen auf $C\,A$ und bilden ein harmonisches Paar zu $C\,A$; die Schnittpunkte $(R_0\,Q_3,\;R_3\,Q_0)=G_{03}$ und $(R_1\,Q_2,\;R_2\,Q_1)=G_{12}$ liegen auf $A\,B$ und bilden ein harmonisches Paar zu $A\,B$.

33. Stellen wir die Teilungsverhältnisse auf den Seiten von $A\,B\,C$ durch die Punkte G übersichtlich zusammen, so kommt:

$$\frac{B\,G_{01}}{G_{01}\,C}=\frac{\sigma_3^2-\sigma_1^2}{\sigma_2}:\frac{\sigma_1^2-\sigma_2^2}{\sigma_3}=-\frac{B\,G_{23}}{G_{23}\,C}$$

$$\frac{C\,G_{02}}{G_{02}\,A}=\frac{\sigma_1^2-\sigma_2^2}{\sigma_3}:\frac{\sigma_2^2-\sigma_3^2}{\sigma_1}=-\frac{C\,G_{13}}{G_{13}\,A}$$

$$\frac{A\,G_{03}}{G_{03}\,B}=\frac{\sigma_2^2-\sigma_3^2}{\sigma_1}:\frac{\sigma_3^2-\sigma_1^2}{\sigma_2}=-\frac{A\,G_{12}}{G_{12}\,B}$$

Drei Punkte, bei denen das Produkt der Teilverhältnisse gleich -1 ist, liegen aber in einer Geraden und es ist $G_{ik}=G_{ki}$, also finden wir, die Punkte

$$G_{12}\,G_{23}\,G_{31}$$
$$G_{23}\,G_{30}\,G_{03}$$
$$G_{30}\,G_{01}\,G_{13}$$
$$G_{01}\,G_{12}\,G_{20}$$

liegen je in einer Geraden oder: Die drei Punktepaare G_{01} und G_{23}, G_{02} und G_{13}, G_{03} und G_{12} sind die Gegeneckenpaare eines vollständigen Vierseits, die Seiten sollen heissen $g_0\,g_1\,g_2\,g_3$.

34. Die Schnittpunkte von BC mit $J_0 J_1$ u. $J_2 J_3$ heissen H_{01} u. H_{23}
„ „ „ CA „ $J_0 J_2$ „ $J_1 J_3$ „ H_{02} „ H_{13}
„ „ „ AB „ $J_0 J_3$ „ $J_1 J_2$ „ H_{03} „ H_{12}

Wir finden dann folgende Werte von Doppelverhältnissen:

$$(BC,\ G_{01} H_{23}) = (BC,\ G_{23} H_{01}) = -\frac{\sigma_3^2 - \sigma_1^2}{\sigma_1^2 - \sigma_2^2}$$

$$(CA,\ G_{02} H_{13}) = (CA,\ G_{13} H_{02}) = -\frac{\sigma_1^2 - \sigma_2^2}{\sigma_2^2 - \sigma_3^2}$$

$$(AB,\ G_{03} H_{12}) = (AB,\ G_{12} H_{03}) = -\frac{\sigma_2^2 - \sigma_3^2}{\sigma_3^2 - \sigma_1^2}$$

oder wie hieraus folgt:

$$(BC,\ G_{01} H_{23}) = (C H_{13},\ A G_{02}) = (A G_{03},\ H_{12} B)$$
$$= (BC,\ G_{23} H_{01}) = (C H_{02},\ A G_{13}) = (A G_{12},\ H_{03} B)$$

Aus den zahlreichen geometrischen Beziehungen, die hierin stecken, greifen wir nur eine heraus. Die Punktreihen $B C G_{01} H_{23}$ und $B H_{12} G_{03} A$ sind projektivisch und weil sie das Element B entsprechend gemein haben, perspektivisch und zwar über J_2, also geht die Gerade $G_{01} G_{03}$ durch J_2. Fügen wir die entsprechenden Schlüsse hinzu, so ergiebt sich:

Die Seiten $g_0\ g_1\ g_2\ g_3$ des Vierseits in 33. gehen bezüglich durch $J_0\ J_1\ J_2\ J_3$.

Dabei ordnen sich die Strahlen g so ein, dass mit leicht verständlicher Bezeichnung die Strahlbüschel

$$J_0\,(ABCg_0) \barwedge J_1\,(ABCg_1) \barwedge J_2\,(ABCg_2) \barwedge J_3\,(ABCg_3)$$

projektivisch sind.

35. Unter Benutzung von 4. kann man die Lage von R^1 gegen ABC ausdrücken durch die Proportion:

$$\sin(A - R^1) : \sin(B - R^1) : \sin(C - R^1) = \frac{\sigma_2^2 - \sigma_3^2}{\sigma_1} : \frac{\sigma_3^2 - \sigma_1^2}{\sigma_2} : \frac{\sigma_1^2 - \sigma_2^2}{\sigma_3}$$

Ziehen wir nun hier noch die Gleichungen in 33. hinzu, so finden wir leicht die geometrische Beziehung:

Die drei Kreise, die über den Strecken $G_{01}\,G_{23}$ und $G_{02}\,G_{13}$ und $G_{03}\,G_{12}$ als Durchmessern errichtet werden und daher zu Φ orthogonal sind, berühren sich gegenseitig in einem Punkte und zwar in R^1.

Bekanntlich bilden die über den Diagonalen eines Vierseits als Durchmesser geschlagenen Kreise im allgemeinen ein Büschel mit getrennten Grundpunkten, also haben wir hier eine charakteristische Eigenschaft, durch die das Vierseit der g sich auszeichnet.

III. Ueber das Steiner'sche Büschel dritter Klasse.

36. Der Punkt R^1 ist nur ein ganz bestimmter von den vier Feuerbach'schen Punkten, die dem Dreieck $A^1\,B^1\,\Gamma^1$ zugehören. Wie dieser aus dem Dreieck $A\,B\,\Gamma$ abgeleitet ist, ebenso würden wir die drei anderen aus den Dreiecken $B\,\Gamma\,\Delta$, $\Gamma\,\Delta\,A$, $\Delta\,A\,B$ erhalten, wenn Δ der Höhenschnittpunkt von $A\,B\,\Gamma$ ist. In der That haben wir das analoge Verfahren schon bei Dreieck $A\,B\,\Gamma$ eingeschlagen und seine vier Feuerbach'schen Punkte aus den vier in $J_0\,J_1\,J_2\,J_3$ enthaltenen Dreiecken entspringen lassen. Gleiche Ueberlegungen können wir aber auch auf die Dreiecke $A^2\,B^2\,\Gamma^2$ und sofort und rückwärts auf jedes der Dreiecke $J_1\,J_2\,J_3$, $J_2\,J_3\,J_0$, $J_3\,J_0\,J_1$, $J_0\,J_1\,J_2$ und so fort anwenden und werden so veranlasst, eine Reihe von vollständigen Vierecken ins Auge zu fassen, die im allgemeinen vorwärts und rückwärts ins Unendliche verlängert werden kann, bei jedem Schritte vorwärts eindeutig, rückwärts vierdeutig Die Diagonalecken aller dieser Vierecke liegen auf Φ und die Mitten der je sechs Seiten ebenfalls. Sind $U\,V\,W$ drei Punkte von Φ, deren Parameter die Summe Null haben, so sind die drei Paar Winkelhalbierenden des Dreiecks $U\,V\,W$ die drei Paar Gegenseiten eines solchen vollständigen Vierecks.

37. Jede Seite eines der vollständigen Vierecke schneidet Φ in zwei Punkten, der eine ist die Mitte der Seite, der andere ihr Schnittpunkt mit der Gegenseite und zwar stehen beide Seiten senkrecht zu einander. Sind die Parameter der Punkte bez. u und v, so ist jedesmal $2u + v = 0$ falls ganze Vielfache von π, wie es hier erlaubt ist, vernachlässigt werden. Es gehören daher die Seiten aller der vollständigen Vierecke einem und demselben bestimmten Strahlbüschel Σ an, als dessen Gleichung in Kreiskoordinaten man die Gleichung $2u + v = 0$ auffassen kann.

Nach 9. wird das Büschel Σ durchlaufen von der Geraden

$$x \cos u - y \sin u = \cos 3u$$

wenn man u sich ändern lässt. Das Büschel ist, wie diese Gleichung lehrt, von der dritten Klasse und nichts anderes als die von Steiner behandelte besondere Kurve dritter Klasse und vierter Ordnung, vgl. Steiner's ges. Werke Bd. II, pag. 641. Die a. a. O. mitgeteilten Eigenschaften des Büschels ergeben sich hier grossenteils von selbst und sollen so weit nicht wiederholt werden. Die Pole der Strahlen von Σ bezüglich Φ bilden eine Kurve dritter Ordnung mit isoliertem Doppelpunkt im Mittelpunkt von Φ, deren reelle Wendepunkte auf der unendlich fernen Geraden liegen.

38. Sollen drei Strahlen des Büschels, deren Mitten die Parameter $u_1\, u_2\, u_3$ haben, durch einen Punkt gehen, so ist die Bedingung dafür:

$$\begin{vmatrix} \cos u_1 & \sin u_1 & \cos 3u_1 \\ \cos u_2 & \sin u_2 & \cos 3u_2 \\ \cos u_3 & \sin u_3 & \cos 3u_3 \end{vmatrix} = 0$$

Die links stehende Determinante geht durch Spezialisierung der Determinante Δ in 13. zunächst über in den Ausdruck:

$$-2\{\sin(u_1 + 2u_2)\sin(u_2 + 2u_3)\sin(u_3 + 2u_1)$$
$$+ \sin(-2u_1 - u_2)\sin(-2u_2 - u_3)\sin(-2u_3 - u_1)\}$$

und lässt sich weiter durch einige Rechnung umformen zu

$$-4\cos(u_1+u_2+u_3)\sin(u_1-u_2)\sin(u_2-u_3)\sin(u_3-u_1)$$

Drei verschiedene Strahlen des Büschels Σ gehen also dann und nur dann durch einen Punkt, wenn die Summe der Parameter ihrer Mitten gleich $\frac{\pi}{2}$ ist, abgesehen von ganzen Vielfachen von π. Den Parameter der Mitte eines Strahls können wir auch diesem selber beilegen und sagen: Drei Strahlen des Büschels Σ gehen durch einen Punkt, wenn die Summe ihrer Parameter ein ungerades Vielfaches von $\frac{\pi}{2}$ ist.[1])

39. Den Fusspunkt auf einem Strahl von Σ oder den zweiten Schnittpunkt mit Φ nennen wir nach Steiner auch seinen Scheitel, zwei Strahlen, die den Scheitel gemein haben, also aufeinander senkrecht stehen, ebenfalls nach Steiner, kurz ein Paar.

Die Strahlen des Büschels Σ umhüllen eine Kurve, die auch Σ heissen mag. Der Berührungspunkt des Strahls u ist sein Schnittpunkt mit dem Nachbarstrahl $u + du$, daher gelten für ihn die Gleichungen

$$\begin{cases} x\cos u - y\sin u = \cos 3u \\ x\sin u + y\cos u = 3\sin 3u \end{cases}$$

aus denen folgt

$$\begin{cases} x = -\cos 4u + 2\cos 2u \\ y = \sin 4u + 2\sin 2u \end{cases}$$

und hierin hat man eine einfache Parameterdarstellung der Kurve Σ. Die Elimination von u liefert die Gleichung der Kurve Σ, man kann derselben die Form geben

$$(K-6L)^2+4L^3=0$$

1) Es liegt hier ein besonderer Fall der von Clebsch eingeführten Parameter-Darstellung einer Curve vom Geschlechte Null vor, vergl. Clebsch, Vorlesungen über Geometrie, I, p. 897. In Betreff der Hypozykloide vgl. besonders Crelle's Journal, Bd. 64.

worin

$$K = x^2 + y^2 - 9 \quad \text{und} \quad L = 2x - 3$$

$K = 0$ ist also die Gleichung des Kreises durch die drei Spitzen der Kurve und $L = 0$ die Gleichung einer Geraden durch zwei Spitzen.

Durchläuft ein Strahl das Büschel Σ, so durchläuft sein Scheitel die Kreislinie Φ doppelt so rasch wie seine Mitte in umgekehrter Richtung; hieraus geometrisch oder aus der Parameterdarstellung ersieht man mit Leichtigkeit, dass die Kurve Σ eine Hypozykloide ist, der feste Kreis ist $K = 0$, der rollende gleich Φ.

40. Nach 39. geht die Gerade

$$x \sin u + y \cos u = 3 \sin 3u$$

durch den Berührungspunkt des Strahles u, sie steht aber auch zu demselben senkrecht, ist also Normale der Kurve Σ. Nun hat der Strahl von Σ mit dem Parameter $u + \frac{\pi}{2}$ die Gleichung

$$x \cos\left(u + \frac{\pi}{2}\right) - y \sin\left(u + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(3u + \frac{3\pi}{2}\right)$$

oder

$$-x \sin u - y \cos u = \sin 3u$$

Denkt man sich also diesen um den Mittelpunkt von Φ um 180^0 gedreht und dann von da aus dreifach vergrössert, so wird seine Gleichung auch

$$x \sin u + y \cos u = 3 \sin 3u$$

d. h. die Normalen der Kurve Σ umhüllen eine ähnliche Kurve, die ihre drei Scheitel in den Spitzen von Σ hat.

Legt man den Normalen von Σ als Strahlen des zweiten Büschels entsprechend Parameter bei wie den Strahlen von Σ, so erhält die im Berührungspunkt des Strahles u von Σ errichtete Normale den Parameter $u + \frac{\pi}{2}$, also bekommt man den

Satz: Ist die Summe der Parameter von drei Strahlen in Σ ein Vielfaches von π, so gehen die drei in ihren Berührungspunkten errichteten Normalen durch einen Punkt.

41. Der Strahl α des Büschels Σ, dessen Mitte und Scheitel $\mathfrak{m}_1$ und $\mathfrak{s}_1$ also die Parameter α und -2α haben, werde vom Strahl u in $\mathfrak{p}_1$ geschnitten; so ist nach 4.

$$\frac{\mathfrak{m}_1\,\mathfrak{p}_1}{\mathfrak{p}_1\,\mathfrak{s}_1} = -\frac{\sin(\alpha-u)\sin(\alpha+2u)}{\sin(-2\alpha-u)\sin(-2\alpha+2u)}$$

$$= \frac{\sin(\alpha+2u)}{2\sin(-2\alpha-u)\cos(\alpha-u)} = \frac{\sin(\alpha+2u)}{-\sin(\alpha+2u)-\sin 3\alpha}$$

mithin:

$$\frac{\mathfrak{m}_1\,\mathfrak{p}_1}{\mathfrak{m}_1\,\mathfrak{s}_1} = \frac{\sin(\alpha+2u)}{-\sin 3u}$$

Rechnen wir nun Abstände auf dem Strahl α positiv, wenn sie in dem Sinn zu nehmen sind, der ihm nach 8. als Laufstrahl zukommt, so wird $\mathfrak{m}_1\,\mathfrak{s}_1 = -2\sin 3u$ und daher $\mathfrak{m}_1\,\mathfrak{p}_1 = 2\sin(\alpha+2u)$. Lassen wir $u=\alpha$ werden, so rückt $\mathfrak{p}_1$ in den Berührungspunkt $\mathfrak{t}_1$ des Strahles α, dabei wird $\mathfrak{m}_1\,\mathfrak{t}_1 = 2\sin 3\alpha$: Scheitelpunkt und Berührungspunkt eines Strahles liegen gleich weit von seiner Mitte. Der mit Strahl u ein Paar bildende Strahl gehört zum Parameter $u \pm \frac{\pi}{2}$. Jedes Paar schneidet also auch jeden Strahl von Σ in zwei Punkten, die gleich weit von seiner Mitte abstehen. Insbesondere sind auch die Schnittpunkte des Strahles α mit der Kurve Σ von der gleichen Art, denn sie werden ausgeschnitten von dem Paare mit den Parametern $-\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}$ und $-\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{4}$ oder mit anderen Worten: Die Kurve Σ schneidet aus jeder ihrer Tangenten ein Stück von der gleichen Länge 2 heraus, der Halbierungspunkt desselben liegt auf Φ und ist der als Mitte des Strahls bezeichnete Punkt, die Tangenten in den

Schnittpunkten bilden ein Paar. Allgemeiner ergiebt sich: Stehen zwei Punkte eines Strahles α von Σ gleich weit von seiner Mitte ab, so gehen durch jeden noch zwei weitere Strahlen des Büschels, die zwei Paare bilden, sie bestimmen ausser ihren Scheiteln noch zwei weitere Schnittpunkte und die Gerade durch diese beiden ist auch ein Strahl von Σ und bildet mit dem Strahl α ein Paar. Oder: Durch jeden Punkt gehen drei Strahlen von Σ, nimmt man die drei mit ihnen Paare bildenden hinzu, so hat man die Seiten eines vollständigen Vierecks.

Die drei Paar Winkelhalbierenden jedes Dreiecks $A^i B^i C^i$ in 29. bilden je ein solches Viereck.

42. Die Gleichung $\mathfrak{m}_1 \mathfrak{p}_1 = 2 \sin(\alpha + 2u)$ der vorigen Nummer lässt bei variablem u den Punkt $\mathfrak{p}_1$ auffassen als Projektion eines anderen, der einen Kreis mit dem Radius 2 durchläuft. Dies führt zu folgender Ueberlegung.

Es seien $\alpha \beta \gamma$ drei Parameter und zwar $\alpha + \beta + \gamma = 0$, so legen sie auf Φ drei Punkte $\mathfrak{m}_1 \mathfrak{m}_2 \mathfrak{m}_3$ fest. $L_1 L_2 L_3$ seien die Strahlen des Büschels Σ in dem Sinne als Laufstrahlen genommen, wie er durch die Kreiskoordinaten α, -2α bezw. β, -2β und γ, -2γ vorgeschrieben wird, ihre Schnittpunkte $\mathfrak{i}_1 \mathfrak{i}_2 \mathfrak{i}_3$. Dann sind $\mathfrak{m}_1 \mathfrak{m}_2 \mathfrak{m}_3$ die Seitenmitten für Dreieck $\mathfrak{i}_1 \mathfrak{i}_2 \mathfrak{i}_3$, denn nach voriger Nummer ist $\mathfrak{m}_1 \mathfrak{i}_2 = 2 \sin(\alpha + 2\gamma)$ und $\mathfrak{m}_1 \mathfrak{i}_3 = 2 \sin(\alpha + 2\beta)$, also $\mathfrak{m}_1 \mathfrak{i}_2 + \mathfrak{m}_1 \mathfrak{i}_3 = 0$. Legen wir durch $\mathfrak{i}_1 \mathfrak{i}_2 \mathfrak{i}_3$ den Kreis Ω, so hat er den Radius 2 und wir können vermöge des gemeinsamen Schwerpunkts der Dreiecke $\mathfrak{m}_1 \mathfrak{m}_2 \mathfrak{m}_3$ und $\mathfrak{i}_1 \mathfrak{i}_2 \mathfrak{i}_3$ als Aehnlichkeitspunkt über die Punkte von Ω eine Parameterverteilung vornehmen, bei der $\mathfrak{i}_1 \mathfrak{i}_2 \mathfrak{i}_3$ die Parameter $\alpha \beta \gamma$ erhalten. Verschieben wir nun einen Laufstrahl parallel mit sich von L_1 aus, bis er Φ mit Uebereinstimmung im Sinn berührt, so hat der Berührungspunkt in Φ den Parameter $-\frac{\alpha}{2}$, verschieben wir ihn aber, bis er Ω einstimmend berührt, so hat der Berührungspunkt in Ω den Parameter $-\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{2}$. Nehmen wir also in Ω irgend einen Punkt P

mit dem Parameter $u + \frac{\pi}{2}$, so ist der Bogen vom Berührungspunkte bis P gleich $\alpha + 2u$ und für $\mathfrak{p}_1$ als Fusspunkt des von P auf L_1 gefällten Lotes $\mathfrak{m}_1 \mathfrak{p}_1 = 2 \sin(\alpha + 2u)$, auch dem Sinne nach. Da es sich bei den von P auf L_2 und L_3 gefällten Loten mit den Fusspunkten $\mathfrak{p}_2$ und $\mathfrak{p}_3$ entsprechend verhält und also $\mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2 \mathfrak{p}_3$ nach 41. die Schnittpunkte von $L_1 L_2 L_3$ mit dem Strahle u von Σ sind, so haben wir hiermit die Steiner'sche Erzeugung von Σ gefunden. In Anlehnung an Steiner's Worte können wir erweiternd aussprechen:

Fällt man aus jedem Punkte P in der einem Dreieck umbeschriebenen Kreislinie auf die Seiten Perpendikel, so liegen die je drei Fusspunkte allemal in irgend einer Geraden G und diese Geraden G bilden ein Büschel Σ dritter Klasse und vierter Ordnung. Dasselbe kann auf die gleiche Art aus ∞^2 verschiedenen Dreiecken abgeleitet werden. Die Seitenmitten der Dreiecke bilden eingeschriebene Dreiecke in Φ. Aus einem erzeugenden Dreieck kann man die Gesamtheit aller ableiten, indem man bei seinem Seitenmittendreieck, während die Ecken desselben auf Φ bleiben, je eine Seite zur Zeit mit sich selbst parallel beliebig verschiebt.

43. Wir denken uns ein ähnlich veränderliches ebenes System so bewegt, dass zwei seiner Punkte bez. mit der Mitte und dem Scheitel eines Strahls von Σ zusammenfallen, während dieser das Büschel durchläuft. Ueber die drei kritischen Lagen, in denen Mitte und Scheitel zusammenfallen, bestimmen wir, dass das System gleichwendig ähnlich (directly similar) bleiben soll. Die Formeln werden dies von selbst nach sich ziehen.

Der Strahl u von Σ hat die Gleichung

$$x \cos(-u) + y \sin(-u) = \cos 3u$$

Die Cartesischen Koordinaten seiner Mitte $\mathfrak{m}$ sind $\cos 2u$ und $\sin 2u$
seines Scheitels $\mathfrak{s}$ „ $\cos 4u$ „ $-\sin 4u$

Eine Gerade des zum Strahl u gehörigen Systems ist bestimmt durch den Winkel δ gemessen vom Strahl zur Geraden und das Verhältnis, in dem sie die Strecke von $\mathfrak{m}$ nach $\mathfrak{s}$ teilt, es sei gleich $\frac{n}{m}$ und dabei sei $m + n = 1$, dann sind die Cartesischen Koordinaten des Teilpunkts

$$m \cos 2u + n \cos 4u \quad \text{bez.} \quad m \sin 2u - n \sin 4u$$

Eine Gerade falle zunächst auf den Strahl u. Wir drehen sie um den Punkt $\mathfrak{m}$ um den Winkel δ, so werden ihre Kreiskoordinaten u und $-2u + \delta$, ihre Gleichung also

$$x \cos(-u + \delta) + y \sin(-u + \delta) = \cos(3u - \delta)$$

Nun verschieben wir sie parallel bis zum Teilpunkt, so fällt sie in die Systemgerade und deren Gleichung wird

$$x \cos(-u+\delta) + y \sin(-u+\delta) = (m \cos 2u + n \cos 4u) \cos(-u+\delta)$$
$$+ (m \sin 2u - n \sin 4u) \sin(-u+\delta)$$

oder einfacher:

$$x \cos(-u+\delta) + y \sin(-u+\delta) = m \cos(3u - \delta) + n \cos(3u + \delta)$$
$$= \cos 3u \cos \delta + (m - n) \sin 3u \sin \delta$$

Diese Gleichung lässt eine einfache geometrische Deutung zu. Wir können eine positive Zahl f und einen Winkel φ so bestimmen, dass

$$\cos \delta = f \cos \varphi \qquad (m - n) \sin \delta = f \sin \varphi$$

dann wird sie

$$x \cos(-u + \delta) + y \sin(-u + \delta) = f \cos(3u - \varphi)$$

Wir denken uns nun wieder eine Gerade, die zunächst mit dem Strahl u zusammenfällt. Drehen wir dieselbe um das Centrum von Φ um den Winkel ϑ, so werden ihre Kreiskoordinaten

$$u + \frac{1}{2}\vartheta \quad \text{und} \quad -2u + \frac{1}{2}\vartheta,$$

ihre Gleichung

$$x \cos(-u + \vartheta) + y \sin(-u + \vartheta) = \cos 3u$$

Transformiren wir sie nun durch f-fache Vergrösserung vom Centrum aus, so wird ihre neue Gleichung

$$x \cos(-u + \vartheta) + y \sin(-u + \vartheta) = f \cdot \cos 3u$$

und führen wir hier einen neuen Parameter $u' = u - \xi$ ein, so kommt

$$x \cos(-u' - \xi + \vartheta) + y \sin(-u' - \xi + \vartheta) = f \cos(3u' + 3\xi)$$

Die hierdurch dargestellte Gerade erzeugt bei unveränderlichem u' dasselbe Strahlgebilde, wie die Systemgerade bei unveränderlichem u, wenn nur $3\xi = -\varphi$ und $\xi + \vartheta = \delta$ gemacht wird. Das heisst:

Bewegt sich ein ähnlich veränderliches ebenes System in der angegebenen Weise, so durchläuft jede einzelne Gerade desselben ein Büschel, das mit Σ ähnlich ist, alle so erzeugten Büschel haben das Centrum von Φ zum gemeinsamen Doppelpunkt. Die Vergrösserung ist f, die Drehung $\delta - \frac{1}{3}\varphi$.

In diesem Satze sind früher aufgefundene Beziehungen als besondere Fälle enthalten. Für $\delta = \frac{\pi}{2}$ und $n = 1$, $m = 0$ ergiebt sich: Die zu den Strahlen des Büschels Σ je im Scheitel errichteten Normalen gehören ebenfalls dem Büschel an, vgl. 39. Für $\delta = \frac{\pi}{2}$ und $m = 2$, $n = 1$ ergiebt sich: Die zu den Strahlen des Büschels Σ je in ihrem Berührungspunkte errichteten Normalen, d. i. die Normalen der Kurve Σ, bilden ein ähnliches Büschel, das gegen Σ dreifach vergrössert und um 180^0 gedreht ist, vgl. 40. Für $\delta = \frac{\pi}{2}$, $m = 0$ und $n = 1$ ergiebt sich: Die zu den Strahlen des Büschels Σ je in der Mitte errichteten Normalen bilden ein kongruentes Büschel, das gegen Σ um 180^0 gedreht ist. Man beachte übrigens, dass wegen der Gestalt des Büschels die Drehungen hier alle um ganze Vielfache von $\frac{2\pi}{3}$ geändert werden können.

44. Es liegt nahe zu fragen, welche Bahnen bei der eben betrachteten Bewegung die einzelnen Punkte des ähnlich veränderlichen Systems durchlaufen.

Wir können die Lage eines Systempunktes durch die beiden Winkel δ und ε angeben, um die man eine Gerade von der Lage des Strahls u von Σ aus um $\mathfrak{m}$ oder $\mathfrak{s}$ drehen muss, bis sie durch den Punkt geht. Für die Koordinaten des Punktes finden wir dann

$$x \sin(\delta - \varepsilon) = \sin\delta \cos(2u + \varepsilon) - \sin\varepsilon \cos(4u - \delta)$$
$$y \sin(\delta - \varepsilon) = \sin\delta \sin(2u + \varepsilon) + \sin\varepsilon \sin(4u - \delta)$$

Wir denken uns nun um den Anfangspunkt des Koordinatensystems einen Kreis mit dem Radius r, rollen auf seiner Innenseite einen Kreis ab vom Radius ϱ und verfolgen die Bahn eines mit diesem Kreise fest verbundenen Punktes. Derselbe soll im rollenden Kreise die Polarkoordinaten a, α haben. Seine Koordinaten werden dann bei passender Anfangslage

$$x = (r - \varrho)\cos\varphi + a\cos\left(\alpha - \frac{r - \varrho}{\varrho}\varphi\right)$$
$$y = (r - \varrho)\sin\varphi + a\sin\left(\alpha - \frac{r - \varrho}{\varrho}\varphi\right)$$

Diese Gleichungen gehen in die vorigen über, wenn man setzt

$$r = \frac{3}{2}\,\frac{\sin\delta}{\sin(\delta - \varepsilon)}, \qquad \varrho = \frac{1}{3}r, \qquad a = \frac{\sin\varepsilon}{\sin(\delta - \varepsilon)},$$
$$\varphi = 2u + \varepsilon, \qquad \alpha = \pi + \delta + 2\varepsilon$$

Da es nichts ausmacht für den Systempunkt, wenn δ oder ε um π vergrössert werden, so kann man auch immer r und a positiv machen.

Bewegt sich ein ähnlich veränderliches ebenes System in der angegebenen Weise, so durchläuft jeder einzelne Punkt desselben eine, im allgemeinen verlängerte oder verkürzte, Hypozykloide. Bei allen ist der Radius des rollenden Kreises ein Drittel vom Radius des Grundkreises, die Grundkreise sind konzentrisch mit Φ. Alle so erhaltenen Hypozykloiden gehen durch dieselben drei Punkte, die Scheitel der Kurve Σ, welche ein gleichseitiges Dreieck auf Φ bilden.

Insbesondere ist die Bahn eines Systempunktes der Kurve Σ ähnlich, wenn $\sin \delta = 2 \sin \varepsilon$, d. h. wenn er einem gewissen Kreise angehört, dem Ort der Punkte, deren Abstände von $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{s}$ sich verhalten wie $1:2$. Unter diesen Punkten zeichnen sich die aus, die auf dem Strahl u selber liegen. Der eine ist der Berührungspunkt und durchläuft Σ selber. Der andere teilt $\mathfrak{m}\,\mathfrak{s}$ nach dem Verhältnis $1:2$ innen, wir erhalten seine Bahn, indem wir $\delta = \pi - 2\varepsilon$ und ε unendlich klein setzen; sie ist gegen die Kurve Σ dreimal verkleinert und um 180^0 gedreht.

45. Wir betrachten zwei ähnliche Systeme bestimmt durch die Mitten und Scheitel der Strahlen u und v von Σ, die $\mathfrak{m}_1\,\mathfrak{s}_1$ und $\mathfrak{m}_2\,\mathfrak{s}_2$ heissen mögen. Zwei entsprechende Geraden der Systeme haben nach 43. die Gleichungen

$$x \cos(-u+\delta) + y \sin(-u+\delta) = \cos 3u \cos\delta + (m-n) \sin 3u \sin\delta$$

beziehungsweise

$$x \cos(-v+\delta) + y \sin(-v+\delta) = \cos 3v \cos\delta + (m-n) \sin 3v \sin\delta$$

Werden die Systemgeraden entsprechend parallel verschoben, so durchläuft ihr Schnittpunkt eine gewisse gerade Linie. Die Gleichung derselben entspringt durch Elimination von $(m-n)$. Formt man sie passend um und führt eine Grösse w ein durch die Gleichung

$$u + v + w = 0$$

so kann man sie schreiben:

$$\begin{gathered} x\left(\cos(2u+\delta) + \cos(2v+\delta) + \cos(2w+\delta)\right) \\ + y\left(\sin(2u+\delta) + \sin(2v+\delta) + \sin(2w+\delta)\right) \\ = \cos\delta \frac{\sin 3(u-v)}{\sin(u-v)} \end{gathered}$$

Aendert sich δ, so ändert sich auch diese Gerade, und zwar dreht sie sich dabei um einen festen Punkt, den Doppelpunkt der beiden ähnlichen Systeme. Der Doppelpunkt ist also der Schnittpunkt zweier besonderen solchen Geraden, deren Gleichungen sind:

der einen

$$x(\cos 2u + \cos 2v + \cos 2w) + y(\sin 2u + \sin 2v + \sin 2w) = \frac{\sin 3(u-v)}{\sin(u-v)}$$

der anderen

$$x(\sin 2u + \sin 2v + \sin 2w) - y(\cos 2u + \cos 2v + \cos 2w) = 0$$

Beide stehen senkrecht zu einander und die zweite geht durch den Mittelpunkt von Φ.

Die Symmetrie, mit der die Grössen u, v, w in die Gleichungen eingehen, veranlasst die gleichzeitige Betrachtung dreier ähnlichen Systeme, die durch die drei Strahlen u, v, w von Σ bestimmt sind, wo $u + v + w = 0$. Mitte und Scheitel des dritten Strahles mögen $\mathfrak{m}_3$ $\mathfrak{s}_3$ sein. Bilden die Strahlen das Dreieck $\mathfrak{i}_1$ $\mathfrak{i}_2$ $\mathfrak{i}_3$, so sind nach Früherem die $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{s}$ die Seitenmitten und Höhenfusspunkte desselben.

Wir fragen zunächst, wann drei entsprechende Systemgeraden durch einen Punkt gehen. Bestimmen wir dieselben wie in 43. durch m, n, δ, so ergiebt sich die Bedingung

$$\begin{vmatrix} \cos(-u+\delta) & \sin(-u+\delta) & \cos 3u \cos\delta + (m-n)\sin 3u \sin\delta \\ \cos(-v+\delta) & \sin(-v+\delta) & \cos 3v \cos\delta + (m-n)\sin 3v \sin\delta \\ \cos(-w+\delta) & \sin(-w+\delta) & \cos 3w \cos\delta + (m-n)\sin 3w \sin\delta \end{vmatrix} = 0$$

Mit Hülfe der Identität in 38. lässt sich die Determinante links anders schreiben. Man erhält für sie

$$\text{Determinante} = 4 \sin(u - v) \sin(v - w) \sin(w - u)$$
$$\{\cos(u + v + w) \cos\delta + (m - n) \sin(u + v + w) \sin\delta\}$$

Wir wollen nun hier nur den besonderen Fall im Auge behalten, wo $u + v + w = 0$ ist. Da ergiebt sich also $\cos\delta = 0$ und für die Koordinaten des betreffenden Schnittpunktes ergeben sich die Werte

$$(m - n)(\cos 2u + \cos 2v + \cos 2w)$$
$$\text{und} \quad (m - n)(\sin 2u + \sin 2v + \sin 2w)$$

Er durchläuft die Gerade, die als Euler'sche Gerade des Dreiecks $\mathfrak{i}_1\,\mathfrak{i}_2\,\mathfrak{i}_3$ bezeichnet worden ist.

Wir kommen später auf die Figur zurück und fassen das nächste geometrische Resultat in den Satz zusammen:

Bestimmt man drei gleichwendig ähnliche Systeme so, dass die Seitenmitten und Höhenfusspunkte eines Dreiecks homologe Punkte sind, so gehen je drei homologe Geraden, die zu den Seiten senkrecht stehen, durch einen Punkt. Dieser Punkt durchläuft die Euler'sche Gerade des Dreiecks. Auf derselben liegen auch die drei Doppelpunkte je zweier Systeme und sind die Fusspunkte der von den Ecken des Dreiecks auf sie gefällten Lote.

46. Es seien $\mathfrak{m}\,\mathfrak{s}\,\mathfrak{t}$ Mitte Scheitel und Berührungspunkt eines Strahls von Σ, so ist nach 41. $\mathfrak{m}\mathfrak{t} = \frac{1}{2}\,\mathfrak{s}\mathfrak{t}$. Geht der Strahl in eine benachbarte Lage über, so ist also das von $\mathfrak{m}\,\mathfrak{t}$ bestrichene Dreieck ein Viertel des von $\mathfrak{s}\,\mathfrak{t}$ bestrichenen oder das von $\mathfrak{s}\,\mathfrak{t}$ bestrichene Feld ein Drittel des von $\mathfrak{m}\,\mathfrak{s}$ bestrichenen. Hieraus folgt allgemeiner: Wenn ein Strahl das Büschel Σ durchläuft, so ist das von $\mathfrak{m}\mathfrak{t}$ bestrichene Stück eines Zipfels ein Drittel von dem durch $\mathfrak{m}\mathfrak{s}$ bestrichenen Stück der Kreisfläche Φ, ein ganzer Zipfel gleich einem Drittel der ganzen Kreisfläche.

Auch die Rektifikation der Kurve Σ kann man leicht anschaulich ausführen. Zwei Strahlen mögen denselben Bogen von einem Scheitel der Kurve bis zu einer Spitze gerechnet berühren in $\mathfrak{t}$ und $\mathfrak{t}_1$, sich schneiden in $\mathfrak{p}$, so ist $\mathfrak{m}\mathfrak{p}\cdot\mathfrak{p}\mathfrak{s} = \mathfrak{m}_1\mathfrak{p}\cdot\mathfrak{p}\mathfrak{s}_1$. Setzen wir für den Augenblick $\mathfrak{m}\,\mathfrak{s} = s$, $\mathfrak{m}_1\,\mathfrak{s}_1 = s_1$, $\mathfrak{t}\,\mathfrak{p} = p$, $\mathfrak{p}\,\mathfrak{t}_1 = q$, alle Längen absolut genommen, so erhalten wir

$$(s + p)\,(2\,s + p) = (s_1 - q)\,(2\,s_1 - q)$$

$$\text{oder}\quad 3\,p\,s + 3\,q\,s_1 + p^2 - q^2 = 2\,s_1^2 - 2\,s^2$$

also, wenn die Strahlen benachbart sind, p und q unendlich klein werden,

$$3\,(p + q) = 4\,(s_1 - s)$$

$p + q$ ist aber das Bogenelement der Kurve, also beträgt ein Bogen der Kurve von einem Scheitel aus gerechnet $\frac{4}{3}$ der Sehne, die Φ von der Tangente im Endpunkte abschneidet, ein Bogen von einem Scheitel bis zu einer Spitze $\frac{8}{3}$ Radien von Φ.

Man folgert hieraus leicht geometrisch direkt oder unter Benutzung von 44. Ende und übereinstimmend mit 43.: Wickelt man die Kurve Σ ab bei einem Scheitel beginnend, so ist die Evolvente eine ähnliche Kurve, die ihre Spitzen in den Scheiteln der ersteren hat.

IV. Ueber Steiner's Punktquadrupel und Hyperbelnetz.

47. Jeder Punkt von Φ ist Mitte für einen und Scheitel für zwei Strahlen von Σ, Scheitel eines Paares nach 39. Kommt dem Scheitel eines Paares ein Parameter -2α zu, so sind die Gleichungen seiner Strahlen, denen wir die Kreiskoordinaten $\alpha, -2\alpha$ und $\alpha + \frac{\pi}{2}, -2\alpha$ beilegen dürfen,

$$x \cos \alpha - y \sin \alpha - \cos 3\alpha = 0$$

$$\text{und} \quad x \sin \alpha + y \cos \alpha + \sin 3\alpha = 0$$

Das Produkt dieser beiden Gleichungen ist die Gleichung des Paares und lässt sich schreiben:

$$(x^2 - y^2 + 2x) \sin 2\alpha + (2xy - 2y) \cos 2\alpha - \sin 6\alpha = 0$$

In dieser Form geben die Paare von Σ sich zu erkennen als die zerfallenden Kegelschnitte eines Netzes

$$\lambda (x^2 - y^2 + 2x) + \mu (2xy - 2y) - \nu \cdot 1 = 0$$

Durch Umformungen, wie sie schon wiederholt vorgenommen wurden, kann man dieser Gleichung die Gestalt geben

$$(x^2 - y^2 + 2x) \sin 2\varphi + (2xy - 2y) \cos 2\varphi$$
$$= \sin (4\alpha + 2\varphi) + \sin (4\beta + 2\varphi) + \sin (4\gamma + 2\varphi)$$

worin $\alpha + \beta + \gamma = 0$ sein soll.

Von allgemeinerem Standpunkte aus angesehen, beruhen die Eigentümlichkeiten dieses Netzes auf zweierlei Umständen. Erstens besitzt es die projektivisch invariante Eigenschaft, eine Doppelgerade zu enthalten, daher zerfällt seine Jakobische Kurve in eine Gerade und einen Kegelschnitt; zweitens hat es die metrische Besonderheit, dass die Doppelgerade die unendlich ferne Gerade der Ebene ist und dass die Doppelpunkte der Involution, die von allen Büscheln des Netzes gleicherweise auf ihr ausgeschnitten wird, in die imaginären Kreispunkte fallen, die Kreispunkte sind konjugirt für alle Kegelschnitte des Netzes, die Jakobische Kurve besteht aus dem Kreise Φ und der unendlich fernen Geraden. Der Kürze wegen bleiben wir indess bei der gewöhnlichen metrischen Auffassungs- und Ausdrucksweise.

48. Ein Blick auf die Gleichung des Netzes lehrt sofort, dass alle Kegelschnitte des Netzes gleichseitige Hyperbeln sind. Suchen wir den Mittelpunkt einer der Hyperbeln auf, so finden wir für seine Koordinaten die Werte $\cos 4\varphi$ und $-\sin 4\varphi$. Der Mittelpunkt irgend einer Hyperbel des Netzes liegt allemal auf Φ und hat daselbst den Parameter -2φ. Alle Hyperbeln, die denselben Mittelpunkt haben, haben auch dasselbe Asymptotenpaar, seine Gleichung wird

$$(x^2 - y^2 + 2x)\sin 2\varphi + (2xy - 2y)\cos 2\varphi - \sin 6\varphi = 0$$

d. h. die Asymptotenpaare der Hyperbeln sind die Paare von Σ.[1])

Bildet man die Gleichung der Polaren eines Punktes von Φ, so ergiebt sich:

Die Polaren eines Punktes von Φ bezüglich aller Hyperbeln des Netzes sind parallel mit dem Strahl von Σ, der in dem Punkte seine Mitte hat.

Diejenigen Hyperbeln, die durch den Punkt gehen, berühren also ebenda den Strahl und sich gegenseitig.

---

[1]) Man kann also sagen: Σ ist die Cayley'sche Kurve des Hyperbel-Netzes, vgl. Cremona a. a. O.

49. Denken wir uns in der Gleichung einer der Hyperbeln α, β, γ fest gewählt und φ veränderlich, so durchläuft sie ein Büschel mit vier festen Grundpunkten. Diese sind leicht näher zu bestimmen. Wird nämlich z. B. $\varphi = \alpha$, so wird die Gleichung vermöge $\alpha + \beta + \gamma = 0$ zu

$$(x^2 - y^2 + 2\,x) \sin 2\,\alpha + (2\,x\,y - 2\,y) \cos 2\,\alpha = \sin 6\,\alpha$$

und dies ist nach 47. die Gleichung eines Paares von Σ. Die drei zerfallenden Kegelschnitte des Büschels bestehen also aus den drei Paaren von Σ, deren Scheitel die Parameter $-2\,\alpha$, $-2\,\beta$ und $-2\,\gamma$ haben. Die drei Scheitel bilden das Polardreieck der Kegelschnitte des Büschels, die vier Grundpunkte ein Quadrupel nach Steiner. *Irgend zwei Hyperbeln des Netzes schneiden sich allemal in einem Quadrupel; irgend zwei Quadrupel liegen allemal in einer Hyperbel des Netzes.*

Die Koordinaten der Punkte eines Quadrupels sind:

$$x_1 = -\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma \qquad x_2 = \cos 2\alpha - \cos 2\beta + \cos 2\gamma$$
$$y_1 = -\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma \qquad y_2 = \sin 2\alpha - \sin 2\beta + \sin 2\gamma$$

$$x_3 = \cos 2\alpha + \cos 2\beta - \cos 2\gamma \qquad x_0 = -\cos 2\alpha - \cos 2\beta - \cos 2\gamma$$
$$y_3 = \sin 2\alpha + \sin 2\beta - \sin 2\gamma \qquad y_0 = -\sin 2\alpha - \sin 2\beta - \sin 2\gamma$$

Für reelle Werte von α, β, γ sind auch alle vier Punkte des Quadrupels reell und verteilen sich auf die vier Felder, in die das von der Kurve Σ eingeschlossene Gebiet durch Φ zerlegt wird. Aendert sich ein Punkt eines Quadrupels, so ändern sich die andern mit. Die genauere Verfolgung der dabei eintretenden Verhältnisse würde in ein vom näheren Ziel dieser Studie abliegendes Gebiet hineinführen, doch mag Folgendes bemerkt werden. Aendert sich ein Quadrupelpunkt stetig *innerhalb* eines der vier Felder, ohne seine Grenzen zu berühren, so ändert sich auch jeder andere stetig innerhalb seines Feldes, ohne die Grenzen zu berühren. Dabei kann jeder Punkt das ganze Innere seines Feldes durchlaufen, so dass die vier Felder in dieser Beschränkung eindeutig aufeinander abgebildet sind.

Läuft ein Punkt auf einer Hyperbel des Netzes, so laufen die zugehörigen auf derselben. Läuft insbesondere ein Punkt auf einem Strahl von Σ, so läuft der zweite auf demselben, die beiden übrigen laufen auf dem zugehörigen Strahl des Paares.

50. Erwähnenswert ist noch eine metrische Relation. Es umlaufe ein Quadrupelpunkt innerhalb seines Feldes eine durch Strahlen von Σ gebildete Dreiecksfläche. Die Ecken seien $U\,V\,W$, Parameter der Gegenseiten als Strahlen von Σ seien $u\,v\,w$. Nach 41. ist dann

$$U\,V = -2\sin(w+2v)+2\sin(w+2u) = 4\cos(u+v+w)\sin(u-v)$$
$$U\,W = -2\sin(v+2w)+2\sin(v+2u) = 4\cos(u+v+w)\sin(u-w)$$

Die Drehung vom Laufstrahl w zum Laufstrahl v beträgt $w-v$, daher wird Dreieck

$$U\,V\,W = 8\cos^2(u+v+w)\sin(u-v)\sin(v-w)\sin(w-u)$$

dabei die Fläche mit Sinn genommen, positiv wenn sie bei der Umlaufung $U\,V\,W$ zur Linken liegt.

Die von den anderen Punkten des Quadrupels umlaufenen Dreiecke werden bez.:

$$-8\cos^2(u+v+w)\cos(u-v)\sin(v-w)\cos(w-u)$$
$$\text{und} \quad -8\cos^2(u+v+w)\cos(u-v)\cos(v-w)\sin(w-u)$$
$$\text{und} \quad -8\cos^2(u+v+w)\sin(u-v)\cos(v-w)\cos(w-u)$$

Die Summe aller Dreiecksflächen ist daher gleich Null. Allgemeiner folgt hieraus: Umläuft ein Quadrupelpunkt innerhalb seines Feldes einen Flächenteil, so findet gleiches bei den anderen Punkten des Quadrupels statt, die Summe der umlaufenen Flächenstücke, mit Sinn genommen, ist immer Null. Oder mit anderen Worten: Die in 49. erwähnte Abbildung der Felder aufeinander ist so beschaffen, dass irgend ein Gebiet innerhalb Φ inhaltsgleich ist der Summe der entsprechenden Gebiete in den drei Zipfeln. Insbesondere ergiebt sich also wieder, wie in 46., dass die Fläche von Φ gleich der Summe der drei Zipfel.

V. Relationen in der Hauptfigur.

51. Wir kehren noch einmal zur Figur des zweiten Abschnitts zurück, um einige Beziehungen hinzuzufügen.

Die Punkte J_0 J_1 J_2 J_3 in 16. u. ff. bilden eins unserer Quadrupel, die Werte ihrer rechtwinkligen Koordinaten sind die in 49. angeschriebenen. Der Kreis, der nach 22. Φ in R_0 und die Seiten von Dreieck $A B \Gamma$ berührt, habe den Mittelpunkt K_0, so sind nach Analogie von 17. seine rechtwinkligen Koordinaten

$$x(K_0) = r_0^2 \cos 2 R_0 \qquad y(K_0) = r_0^2 \sin 2 R_0$$

Dabei ist entsprechend 18.

$$r_0 \cos R_0 = \cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma$$
$$-r_0 \sin R_0 = \sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma$$

also sind die Koordinaten von J_0

$$x(J_0) = -r_0 \cos R_0 \qquad y(J_0) = r_0 \sin R_0$$

Mit Benutzung der komplexen Einheit könnte man die Beziehung zwischen J_0 und K_0 demnach schreiben

$$\{x(J_0) + i\, y(J_0)\}^2 = x(K_0) - i\, y(K_0)$$

wodurch in der komplexen Zahlenebene J_0 und der komplex konjugierte Punkt von K_0 sehr einfach einander zugeordnet sind. Wir können uns aber auch geometrischer ausdrücken. Es sei M der Mittelpunkt von Φ, so ist $\overline{M K_0} = \overline{M J_0}^2$. Die Gerade $M J_0$ ist die Euler'sche Gerade des Dreiecks $J_1 J_2 J_3$, sie schneidet Φ in zwei Punkten, deren Parameter, wie die Koordinaten von J_0 zeigen, $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} R_0$ und $-\frac{1}{2} R_0$ sind. Wir finden also: Die Schnittpunkte der Euler'schen Geraden des Dreiecks $J_1 J_2 J_3$ sind die Mitten zweier Strahlen von Σ, die ein Paar bilden, und ihr gemeinsamer Scheitel ist der Punkt R_0. Beim Entwurfe einer Figur ist dies angenehm, da auf Φ der Bogen von R_0 bis O doppelt so lang sein muss, als der von O bis an die Euler'sche Gerade.

Aehnliche Ueberlegungen gelten natürlich für $K_1 K_2 K_3$ die Mittelpunkte der Berührungskreise des Dreiecks $\varDelta B \Gamma$, die Φ in $R_1 R_2 R_3$ berühren.

52. Aus 45. entnehmen wir für unsere Hauptfigur Folgendes. Die von den Ecken des Dreiecks $J_1 J_2 J_3$ auf seine Euler'sche Gerade gefällten Lote mögen diese in $D_{01} D_{02} D_{03}$ treffen, so sind diese Punkte die Doppelpunkte dreier gleichwendig ähnlichen Systeme, in denen sowohl die Seitenmitten $M_{23} M_{31} M_{12}$, wie auch die Höhenfusspunkte $A\,B\,C$ homolog sind. Es geht daher ein Kreis, der Φ gleich ist, durch $D_{01} J_1 M_{12} M_{31}$ und die Gerade $D_{01} J_1$ wird durch eine Drehung vom Betrage $\gamma - \alpha$ auf $D_{01} M_{31}$ gebracht. Andererseits geht auch ein Kreis durch $D_{01} M_{31} B X_{01}$ und die Gerade $D_{01} M_{31}$ wird durch eine gewisse Drehung auf die Gerade $D_{01} X_{01}$ gebracht. Eine gleiche Drehung bringt aber die Gerade $B M_{31}$ auf $B X_{01}$ und man liest den Betrag derselben im Kreise Φ ab gleich $-2\gamma - \beta$. Die Summe beider Drehungen ist also $-\alpha - \beta - \gamma = 0$, d. h. die Punkte $J_1 D_{01} X_{01}$ liegen in einer Geraden.

In dem letztgenannten Kreise durch $D_{01} M_{31} B X_{01}$ gehört die Sehne $M_{31} B$ zum Peripheriewinkel 3α, wie leicht zu sehen, daher ist sein Radius $\dfrac{\sin 3\beta}{\sin 3\alpha}$. Die Gerade von X_{01} durch R_0 nach A schneide diesen Kreis noch in L. Die Drehung von $X_{01} L$ zu $X_{01} M_{31}$ findet man dann auf Φ im Betrage $(\beta + \gamma) - (R_0 - 2\alpha) = \alpha - R_0$. Die Drehung von $X_{01} M_{31}$ zu $X_{01} D_{01}$ findet man auf Φ ebenfalls $= \alpha - R_0$, wenn man nur bedenkt, dass eine Parallele zu $X_{01} D_{01}$ nach 51. den Kreis Φ berührt in einem Punkt vom Parameter $-\dfrac{1}{2} R_0$. Wir haben daher

$$M_{31} L = M_{31} D_{01} = 2\,\frac{\sin 3\beta}{\sin 3\alpha} \sin(\alpha - R_0)$$

Die gleiche Länge hat $M_{31} D_{03}$, weil M_{31} die Mitte zwischen J_1 und J_3 ist, die gleiche Länge hat aber auch noch $M_{31} R_0$. Es ist nämlich unmittelbar aus Φ $M_{31} R_0 = 2 \sin(\beta - R_0)$.

Nun folgt aus 51., ähnlich wie in 18., dass für jeden Wert von x

$$r_0 \sin(x - R_0) = \sin(2\alpha + x) + \sin(2\beta + x) + \sin(2\gamma + x)$$

und dass insbesondere

$$r_0 \sin(\alpha - R_0) = \sin 3\alpha$$
$$r_0 \sin(\beta - R_0) = \sin 3\beta$$

also ist

$$M_{31} L = M_{31} D_{01} = M_{31} D_{03} = M_{31} R_0 = \frac{2}{r_0} \sin 3\beta$$

Die Punkte $D_{01}\, D_{03}\, R_0\, L$ liegen in einem Kreise, dessen Centrum M_{31} ist.

Hieraus ergiebt sich nun leicht, dass D_{01} und R_0 symmetrisch zur Geraden $M_{31}\, X_{01}$ liegen und damit unser Ziel bei dieser Ueberlegung:

Die Euler'sche Gerade des Dreiecks $J_1\, J_2\, J_3$ ist die Directrix der Parabel, die die Seiten seines Seitenmittendreiecks $M_{23}\, M_{31}\, M_{12}$ in $X_{01}\, X_{02}\, X_{03}$ berührt und in R_0 ihren Brennpunkt hat. Vgl. 26.

Entsprechendes gilt natürlich auch für Dreieck $J_2\, J_3\, J_0$ u. s. w., wie nicht immer wieder bemerkt zu werden braucht.

53. Aus 20. und 24. wissen wir, dass $X_{01}\, X_{02}\, X_{03}$ Polardreieck von Φ ist und dass seine Seiten bez. durch $J_1\, J_2\, J_3$ gehen. Da Entsprechendes gilt von den Dreiecken $X_{12}\, X_{13}\, X_{10}$, $X_{23}\, X_{20}\, X_{21}$ und $X_{30}\, X_{31}\, X_{32}$, so folgt:

Es liegen je auf einer Geraden:

X_{01}		$X_{21}\, X_{31}$	auf	x_1	der Polaren	von	J_1 bez. Φ
X_{02}	X_{12}	X_{32}	„	x_2	„	„	„ J_2
X_{03}	X_{13}	X_{23}	„	x_3	„	„	„ J_3
	X_{10}	$X_{20}\, X_{30}$	„	x_0	„	„	„ J_0

Das vollständige Vierseit $x_0\, x_1\, x_2\, x_3$ hat zu Diagonalseiten die Tangenten von Φ in A, B und C. Die

Diagonalecken, also Pole der Seiten von A, B, C, nennen wir U_a, U_b, U_c. Jedes Paar Gegenecken spannt bei M einen rechten Winkel.

54. Deutlicher als bei den vorhergehenden Betrachtungen schimmert der projektivische Hintergrund beim Folgenden durch.

Die Punktreihe

$$R_0\ R_1\ R_2\ R_3\ A\ B\ C\ Q^1\ A^1\ B^1\ C^1\ R^1$$

ist perspektivisch über R_a mit

$$R_1\ R_0\ R_3\ R_2\ Q^1\ C\ B\ A\ R^1\ C^1\ B^1\ A^1$$

diese ist perspektivisch über R_b mit

$$R_3\ R_2\ R_1\ R_0\ B\ A\ Q^1\ C\ B^1\ A^1\ R^1\ C^1$$

diese über R_c wieder mit der ersten. Die Punktreihen sind also alle drei projektivisch und paarweise perspektivisch.

Die erste Reihe ist perspektivisch über A mit

$$X_{01}\ X_{10}\ X_{23}\ X_{32}\ T_a\ B\ C\ R_a\ \infty_a\ .\ .\ .$$

über B mit

$$X_{02}\ X_{13}\ X_{20}\ X_{31}\ A\ T_b\ C\ R_b\ .\ \infty_b\ .\ .$$

über C mit

$$X_{03}\ X_{12}\ X_{21}\ X_{30}\ A\ B\ T_c\ R_c\ .\ .\ \infty_c\ .$$

wenn T_a der Schnittpunkt von $B\,C$ mit der Tangente von Φ in A, ∞_a der mit der unendlich fernen Geraden ist; entsprechend sind $T_b\ T_c\ \infty_b\ \infty_c$ zu verstehen. Diese drei Reihen sind also projektivisch und da sie paarweise einen Punkt entsprechend gemein haben, paarweise perspektivisch nämlich bez. über $U_c\ U_b\ U_a$.

55. Wir können auch sagen, die Gruppe von 12 Punkten auf Φ in 54. sei in dreifacher Anordnung mit sich selbst projektivisch. Wir projizieren nun die drei Anordnungen bez. von B, C und A auf die Seiten von $A\,B\,C$ und erhalten

auf CA die Punktreihe $X_{02}\,X_{13}\,X_{20}\,X_{31}\,A\,T_b\,C\,R_b\,.\,\infty_b\,.\,.$

" AB " " $X_{12}\,X_{03}\,X_{30}\,X_{21}\,R_c\,T_c\,B\,A\,.\,\infty_c\,.\,.$

" BC " " $X_{32}\,X_{23}\,X_{10}\,X_{01}\,B\,T_a\,R_a\,C\,.\,\infty_a\,.\,.$

d. h. die vier Geraden $x_0\,x_1\,x_2\,x_3$ (siehe 53.) sind Tangenten einer Parabel, die zugleich die Seiten von ABC in $R_a\,R_b\,R_c$ und die Gerade $T_a\,T_b\,T_c$ berührt.

Nun sind ferner $x_0\,x_1\,x_2\,x_3$ und die unendlich ferne Gerade die Polaren bezüglich Φ von $J_0\,J_1\,J_2\,J_3$ und M, also ist die Parabel Polarkegelschnitt bez. Φ von der gleichseitigen Hyperbel, die durch das Quadrupel $J_0\,J_1\,J_2\,J_3$ und durch M hindurchgeht. Nach 49. enthält diese Hyperbel auch die übrigen Punkte des Quadrupels, dem M angehört und als Polarfigur der Parabel die Punkte $U_a\,U_b\,U_c$ und den Pol der Geraden $T_a\,T_b\,T_c$.

Auf der anderen Seite berührt die Parabel als Polarfigur der Hyperbel auch die Polaren der drei übrigen Punkte des M-Quadrupels.

Der eben erwähnte Pol der Geraden $T_a\,T_b\,T_c$ ist Grebescher Punkt von $A\,B\,C$ genannt worden.

Aus 51. und 52. folgt noch: Die Hyperbel hat ihren Mittelpunkt in R^1 und das Paar von Σ mit dem Scheitel R^1 bildet sein Asymptotenpaar. Die Parabel hat ihren Brennpunkt in R^1, der dritte, ausser dem Paar, durch R^1 gehende Strahl von Σ ist ihre Achse. Ihre Directrix geht durch M und verbindet die Mitten des genannten Paares von Σ.

56. Denkt man sich $A\,B\,C$ und was davon abhängt, stetig veränderlich mit der Bedingung $\alpha + \beta + \gamma = 0$, so durchläuft das Tripel $A\,B\,C$ eine doppelt unendliche Schaar, das Büschel Σ und das Netz gleichseitiger Hyperbeln so wie die Quadrupelschaar bleiben unverändert. Die Hyperbel aus 55. durchläuft ein Büschel mit vier festen Grundpunkten, die Parabel eine Schaar mit drei festen Tangenten, es sind also je unendlich

viele Dreiseite $A\,B\,C$ der Tripelschaar derselben Parabel umbeschrieben und je unendlich viele Dreiecke $U_a\,U_b\,U_c$ derselben Hyperbel einbeschrieben u. s. w.

Wir sind hiermit in unserer Untersuchung zu einem Punkte gelangt, wo die Bevorzugung der imaginären Kreispunkte und der unendlich fernen Geraden ferner nicht erspriesslich zu sein scheint. Wir brechen daher ab, in der Hoffnung, das allgemeinere Problem in entsprechender Weise behandelt gelegentlich den Liebhabern der Geometrie vorlegen zu können.

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der Bayerischen Akademie der Wissenschaften München

Jahr/Year: 1896

Band/Volume: 1896

Autor(en)/Author(s): Godt Wilhelm

Artikel/Article: Ueber den Feuerbach'schen Kreis und eine Steiner'sche Curve vierter Ordnung und dritter Klasse 119-166