Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Classe

der

k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.

Band XXVI. Jahrgang 1896.

München.
Verlag der K. Akademie.
1897.

In Commission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).

Zur Theorie der synektischen Functionen.

Von **Alfred Pringsheim.**

(Eingelaufen 9. März.)

1.

In einer früheren Mittheilung[1]): „Ueber die Entwickelung eindeutiger analytischer Functionen in Potenzreihen" habe ich gezeigt, wie man den Laurent'schen, bezw. den als speciellen Fall darin enthaltenen Taylor'schen (Mac Laurin'schen) Satz für „analytische" (d. h. in der Umgebung jeder nicht singulären Stelle durch eine gewöhnliche Potenzreihe definirte) Functionen mit Hülfe einer gewissen Mittelwerth-Betrachtung völlig streng und zugleich elementar begründen kann.

Hieran anknüpfend habe ich in einem späteren Aufsatze mit dem Titel[2]): „Ueber Vereinfachungen in der elementaren Theorie der analytischen Functionen" hervorgehoben, dass die Gültigkeit derjenigen Beziehungen, welche die eigentliche Grundlage der fraglichen Entwicklungen bilden, keineswegs den „analytischen" Charakter der betreffenden Functionen, sondern lediglich die gleichmässige Stetigkeit ihres Differenzen-Quotienten voraussetzt.[3])

Nachdem ich nun an einer anderen Stelle nachgewiesen, dass diese letztere Eigenschaft allen in irgend einem Bereiche „synektischen", d. h. eindeutigen und mit einem **stetigen**

---

[1]) Sitz.-Ber. 1895, p. 75 ff.

[2]) Math. Ann., Bd. 47, p. 121 ff.

[3]) A. a. O. p. 147, Zusatz.

Differential-Quotienten begabten Functionen zukommt,[1]) liegt es nahe, die in Rede stehende Methode auch für den Beweis der Entwickelbarkeit einer nur als „synektisch“ vorausgesetzten Function zu verwerthen. Und da man auf diesem Wege in der That dazu gelangen kann, die Functionen-Theorie auch bei Zugrundelegung des allgemeinen Cauchy-Riemann'schen Functions-Begriffes, in völlig einwandfreier und dabei wesentlich einfacherer Weise aufzubauen, als dies bisher der Fall war, so möchte ich, einer Anregung des Herrn G. Vivanti folgend, die Uebertragbarkeit jener Methode auf synektische Functionen etwas näher begründen und einige weitere Bemerkungen hieran knüpfen.

Ich stelle zu diesem Behufe zunächst die Haupt-Eigenschaften des charakteristischen Mittelwerthes $\mathfrak{M}\,(f(r))$ in derjenigen Form übersichtlich zusammen, wie sie für den abzuleitenden Beweis zweckmässig erscheint.

2.

Es bedeute $\alpha_n = \beta_n + \gamma_n i$ die am nächsten zu der Stelle 1 gelegene Wurzel der Gleichung $x^{2^n} = 1$ mit positivem γ_n,[2]) $f(x)$ eine zunächst für alle x mit einem gewissen absoluten Betrage $|x| = r$ eindeutig definirte Function. Setzt man sodann:

$$\frac{1}{2^n} \sum_0^{2^n-1}{}^{\nu} f(\alpha_n^{\nu} \cdot r) = \mathfrak{M}_n\,(f(r)),$$

so gelten die folgenden Sätze:

---

1) Zum Cauchy'schen Integralsatze. Sitz.-Ber. 1895, p. 303.

2) Also, wenn man von der transscendenten Form der Einheits-Wurzeln Gebrauch machen will:

$$\begin{aligned} \alpha_n &= e^{\frac{2\pi i}{2^n}} \\ &= \cos\frac{\pi}{2^{n-1}} + i \sin\frac{\pi}{2^{n-1}}. \end{aligned}$$

I. Ist $f(x)$ stetig längs des Kreises $|x| = r$ (wobei also ausschliesslich Werthe von x mit absolutem Betrage r in Betracht zu ziehen sind, so besitzt $\mathfrak{M}_n(f(r))$ für $n = \infty$ einen bestimmten Grenzwerth[1]):

$$\lim_{n=\infty} \mathfrak{M}_n(f(r)) = \mathfrak{M}(f(r)). \tag{1}$$

Dies findet auch dann noch statt, wenn $f(x)$ nur durchweg endlich bleibt, dagegen die Eigenschaft der Stetigkeit nur „im allgemeinen" besitzt, d. h. für eine endliche Anzahl von Stellen endlich-unstetig wird oder innerhalb endlicher Grenzen oscillirt.[2])

II. Ist $f(x)$ durchweg eindeutig definirt und endlich, ausserdem im allgemeinen stetig für alle Stellen x des Ringgebietes $R_0 \leqq |x| \leqq R$, so ist $\mathfrak{M}(f(r))$ für alle x jenes Gebietes eine eindeutige und ausnahmslos stetige Function der reellen Veränderlichen r.

Denn man hat:

$$\left| \mathfrak{M}_n(f(r')) - \mathfrak{M}_n(f(r)) \right| \leqq \frac{1}{2^n} \sum_0^{2^n-1} {}_\nu \left| f(\alpha_n^\nu \cdot r') - f(\alpha_n^\nu \cdot r) \right|. \tag{2}$$

Versteht man hierbei unter r einen beliebig gewählten festen und unter r' einen veränderlichen, dem fraglichen Intervalle angehörigen Werth, so hat man, falls $f(x)$ als ausnahmslos stetig und $\varepsilon > 0$ beliebig klein angenommen wird:

$$|f(x') - f(x)| < \varepsilon \quad \text{etwa für:} \quad |x' - x| < \delta,$$

---

[1]) Math. Ann. a. a. O. p. 132.

[2]) A. a. O. p. 134. Mit Benützung bekannter Methoden aus der Theorie der bestimmten Integrale (s. z. B. Dini-Lüroth, Grundlagen für die Theorie der Functionen etc. § 187) lassen sich die zulässigen Ausnahmestellen auch auf gewisse unendliche Punktmengen ausdehnen. Da jedoch die hierdurch zu erzielende Verallgemeinerung für den hier vorliegenden Zweck keine wesentliche Bedeutung besitzt, so sehe ich davon ab.

und daher:

$$\left|\mathfrak{M}_n f(r') - \mathfrak{M}_n f(r)\right| < \varepsilon \quad \text{für:} \quad \left|r' - r\right| < \delta,$$

also schliesslich auch:

$$\left|\mathfrak{M}(f(r')) - \mathfrak{M}(f(r))\right| \leqq \varepsilon \quad \text{für:} \quad \left|r' - r\right| < \delta.$$

Besitzt $f(x)$ eine endliche Anzahl von Unstetigkeits-Stellen, so werden, wie gross man auch n annehmen mag, in dem rechts stehenden Ausdrucke der Gl. (2) höchstens eine endliche Anzahl (etwa $= m$) von Summanden vorkommen, für welche zwar:

$$|f(x') - f(x)| \geqq \varepsilon,$$

aber immerhin:

$$|f(x') - f(x)| \leqq |f(x')| + |f(x)| < g,$$

wo g eine endliche positive Zahl bedeutet. Alsdann ergibt sich:

$$\left|\mathfrak{M}_n(f(r')) - \mathfrak{M}_n(f(r))\right| < \left(1 - \frac{m}{2^n}\right) \cdot \varepsilon + \frac{m}{2^n} \cdot g$$

und daher für $n = \infty$:

$$\left|\mathfrak{M}(f(r')) - \mathfrak{M}(f(r))\right| \leqq \varepsilon,$$

so dass also die Stetigkeit von $\mathfrak{M}(f(r))$ erhalten bleibt.

III. Ist $f(x)$ nicht nur stetig, sondern synektisch für das Ringgebiet $R_0' \leqq |x| \leqq R'$, so dass also $f(x)$ nach dem in Art. 1 citirten Satze einen gleichmässig stetigen Differenzen-Quotienten besitzt[1]), so ist $\mathfrak{M}(f(r))$ für $R_0' \leqq r \leqq R'$ constant[2]), d. h. man hat:

$$\mathfrak{M}(f(R_0')) = \mathfrak{M}(f(r)) = \mathfrak{M}(f(R')). \tag{3}$$

[1]) Bei der Bildung des Differential- bezw. Differenzen-Quotienten für eine der Begrenzung angehörige Stelle x kommen auch immer nur solche Werthe x in Betracht, die dem Gebiete $R_0' \leqq |x| \leqq R'$ angehören.

[2]) A. a. O. p. 145. Hauptsatz.

IV. Ist $f(x)$ synektisch für alle x im Innern des Ringgebietes $R_0 < |x| < R$, so gilt zunächst die Beziehung (3) für alle r, welche der Bedingung genügen:

$$R'_0 \leqq r \leqq R', \text{ sofern nur } R'_0 > R_0, \; R' < R.$$

Ist dann ferner $f(x)$ noch eindeutig definirt und endlich für alle x mit dem absoluten Betrage R_0 bezw. R und ausserdem im allgemeinen stetig für solche x, welche der Begrenzung, bezw. dem Innern des Ringgebietes $R_0 \leqq x \leqq R$ angehören, so haben zunächst $\mathfrak{M}(f(R_0))$, $\mathfrak{M}(f(R))$ nach I. eindeutig bestimmte endliche Werthe. Da aber andererseits nach II. die Differenzen:

$$|\mathfrak{M}(f(R'_0)) - \mathfrak{M} f(R_0))| \quad \text{bezw.} \quad |\mathfrak{M}(f(R')) - \mathfrak{M}(f(R))|$$

gleichzeitig mit

$$R'_0 - R_0 \qquad \text{bezw.} \qquad R - R'$$

beliebig klein werden, so folgt, dass geradezu:

$$(4) \quad \mathfrak{M}(f(R_0)) = \mathfrak{M}(f(R'_0)) = \mathfrak{M}(f(R')) = \mathfrak{M}(f(R))$$

sein muss.[1])

V. Mit Benützung des letzten Resultates ergiebt sich jetzt leicht, dass die Constanz von $\mathfrak{M}(f(r))$ auch dann erhalten bleibt, wenn für die im übrigen synektische Function im Innern eines gewissen Ringgebietes Punkte vorhanden sind, in denen über den synektischen Charakter von $f(x)$ nur soviel ausgesagt werden kann, dass $f(x)$ daselbst eindeutig und endlich bleibt, während über die Existenz und Stetigkeit des Differential-Quotienten, ja über die Stetigkeit von $f(x)$ selbst keinerlei Voraussetzung besteht.

Denn angenommen, es sei im Innern des Ringgebietes (R_0, R) eine solche Stelle x_0 vorhanden, während $f(x)$ im übrigen für $R_0 < |x| < R$ als synektisch, für $|x| = R_0$, $|x| = R$

[1]) Zu II. und IV. vgl. Sitz.-Ber. p. 90, Zusatz I.

zum mindesten als endlich und im allgemeinen stetig vorausgesetzt wird, so theile man das Ringgebiet (R_0, R) durch Einschaltung eines Kreises mit dem Radius $r_0 = |x_0|$ in die zwei Ringgebiete (R_0, r_0) und (r_0, R). Alsdann folgt aber nach Satz IV., dass:

(5) $$\mathfrak{M}(f(R_0)) = \mathfrak{M}(f(r_0)) = \mathfrak{M}(f(R))$$

d. h. durch das eventuelle Auftreten einer solchen Ausnahme-Stelle x_0 wird die Existenz der Fundamentalgleichung (2) in keiner Weise beeinträchtigt.

Ja man erkennt sogar aus der Art des Beweises, dass das betreffende Resultat auch dann bestehen bleibt, falls über die Beschaffenheit von $f'(x)$ längs des ganzen Kreises $|x| = |x_0|$ gar keine Voraussetzung besteht, sofern die eindeutige Function $f(x)$ daselbst nur durchweg endlich und im allgemeinen stetig bleibt. Und das gleiche gilt offenbar, wenn an die Stelle eines solchen Ausnahmekreises eine beliebige endliche Anzahl solcher Kreise tritt.

3.

I. Sei nun $f(x)$ synektisch im Ringgebiete $R_0 < x < R$.

Bezeichnet dann x_0 irgend eine willkürlich gewählte Stelle im Innern des betreffenden Gebietes, so bilde man:

(6) $$\varphi(x) = x \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Alsdann ist $\varphi(x)$ sicher synektisch für jede von x_0 verschiedene Stelle x, welche dem fraglichen Gebiete angehört. Für $x = x_0$ ist $\varphi(x)$ zunächst überhaupt nicht definirt.

Nun ist aber:

(7) $$\lim_{x=x_0} \varphi(x) = x_0 \cdot f'(x_0).$$

Definirt man also $\varphi(x_0)$ durch die Gleichung:

(8) $$\varphi(x_0) = \lim_{x=x_0} \varphi(x),$$

so ist jetzt $\varphi(x)$ eine im Ringgebiete $R_0 < |x| < R$ ausnahmslos eindeutige und stetige, ausserdem mit eventuellem Ausschlusse der Stelle $x = x_0$ geradezu synektische Function.

In Folge dessen hat man aber:

$$\mathfrak{M}(\varphi(R_0)) = \mathfrak{M}(\varphi(R))$$

und daher:

$$f(x_0) \cdot \mathfrak{M}\left(\frac{R}{R - x_0}\right) - f(x_0) \cdot \mathfrak{M}\left(\frac{R_0}{R_0 - x_0}\right)$$
$$= \mathfrak{M}\left(\frac{R \cdot f(R)}{R - x_0}\right) - \mathfrak{M}\left(\frac{R_0 f(R)}{R_0 - x_0}\right),$$

woraus dann durch genau dieselben Entwickelungen, wie an den entsprechenden Stellen der oben citirten Aufsätze [1]), der Laurent'sche bezw. im Falle $R_0 = 0$, der Mac Laurin'sche Satz sich ergiebt.

II. Ueberträgt man diese Resultate von einem Ringgebiete mit dem Mittelpunkte $x = 0$ auf ein solches mit beliebigem Mittelpunkte x_0, so erkennt man zunächst, dass eine für eine gewisse Umgebung $|x - x_0| < \varrho$ einschliesslich der Stelle x_0 synektische Function, durch eine für $|x - x_0| < \varrho$ convergirende Reihe nach positiven Potenzen dargestellt werden kann. Dies findet aber für jede von x_0 verschiedene Stelle x jener Umgebung selbst dann noch statt, wenn die Beschaffenheit von $f(x)$ für die Stelle x_0 selbst fraglich ist, und nur so viel feststeht, dass $|f(x)|$ in beliebiger Nähe der Stelle x_0 unter einer endlichen Grenze bleibt: denn in diesem Falle kann die zunächst nach dem Laurent'schen Satze sich ergebende Entwickelung für $f(x)$ in Wahrheit keine negativen Potenzen von $(x - x_0)$ enthalten. Schliesst man sodann mit Riemann ein für allemal den Fall aus [2]), dass $f(x)$ hebbare Unstetigkeiten besitzt, so folgt ohne weiteres, dass die betreffende Entwickelung auch noch für die Stelle x_0 gilt, und dass somit $f(x)$ auch für $x = x_0$ synektisch ist.

---

[1]) Sitz.-Ber. p. 86. Math. Ann. p. 148.
[2]) Ges. Werke, p. 21.

Hiernach ist also eine in einem gewissen Bereiche eindeutige und endliche Function $f(x)$, welche daselbst „im allgemeinen"[1]) synektisch ist, in jenem Bereiche ausnahmslos synektisch, und es zieht somit die „im allgemeinen" vorausgesetzte Stetigkeit von $f'(x)$ die ausnahmslose Stetigkeit nach sich. Man erkennt also auf diesem völlig elementaren Wege einen fundamentalen Unterschied zwischen den differenzirbaren Functionen einer complexen und denjenigen einer reellen Veränderlichen. Bei letzteren kann, wenn auch $f'(x)$ vorwärts und rückwärts genommen für jede Stelle x irgend eines reellen Intervalles einen eindeutig bestimmten, im allgemeinen mit x stetig veränderlichen Werth besitzt, noch keineswegs auf die ausnahmslose Stetigkeit von $f'(x)$ geschlossen werden. Man betrachte z. B. die Function $f(x) = x^2 \cdot \sin \frac{1}{x}$, wobei speciell $f(0) = 0$ definirt werden mag. Man hat hier:

$$f'(0) = \lim_{h=\pm 0} h \cdot \sin \frac{1}{h} = 0$$

und für jedes 0 verschiedene x:

$$f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x},$$

so dass $f'(x)$, obschon durchweg eindeutig definirt und ausser für $x = 0$ auch stetig, an der Stelle $x = 0$ unstetig ist.

4.

I. Nachdem nun durch die Ergebnisse des vorigen Artikels festgestellt worden ist, dass jede in einem Bereiche T synektische Function (ein Begriff, der bei Einführung geeigneter Grenzen auch die einzelnen Zweige der mehrdeutigen, differenzirbaren Functionen umfasst) in der Umgebung jeder im Innern von T gelegenen Stelle x_0 nach ganzen positiven Potenzen von

---

[1]) Vgl. Art. 2, I, Fussnote.

$(x - x_0)$ entwickelt werden kann, lässt sich auch die Lehre von den Integralen solcher Functionen in überaus einfacher Weise begründen: das Cauchy'sche Fundamental-Theorem erscheint hierbei als eine Folge der elementarsten Sätze aus der gewöhnlichen Integral-Rechnung. Da mir die fragliche Beweismethode bisher nirgends begegnet ist, so mag es gestattet sein, zur näheren Erläuterung des Gesagten Folgendes zu bemerken.[1])

Ist $\varphi(u)$ eine stetige, reelle oder complexe Function der reellen Veränderlichen u mit einem integrablen Differential-Quotienten, so hat man:

$$\int_{u_0}^{u_1} \frac{d\,\varphi(u)}{d\,u} = \varphi(u_1) - \varphi(u_0) = \Big[\varphi(u)\Big]_{u_0}^{u_1}.$$

Da nun, falls c eine beliebige relle oder complexe Constante bedeutet:

$$\frac{d}{d\,u}(u+c)^{n+1} = (n+1)\cdot(u+c)^n$$

für jedes positive oder negative ganzzahlige n mit Ausschluss von $n = -1$ (aber mit Einschluss von $n = 0$), so wird:

$$(9)\quad \begin{cases} (n+1)\displaystyle\int_{u_0}^{u_1}(u+c)^n\cdot d\,u = \Big[(u+c)^{n+1}\Big]_{u_0}^{u_1} \\ (n+1)\displaystyle\int_{u_0}^{u_1}(ui+c)^n\cdot i\,du = (n+1)\cdot i^{n+1}\cdot\int_{u_0}^{u_1}(u-ci)^n\cdot du \\ \qquad\qquad = i^{n+1}\cdot\Big[(u-ci)^{n+1}\Big]_{u_0}^{u_1} = \Big[(ui+c)\Big]_{u_0}^{u_1}. \end{cases}$$

[1]) Während der Drucklegung dieser Note ist der zweite Theil von Herrn O. Stolz' Grundzügen der Differential- und Integralrechnung erschienen. Hier wird (Abschnitt XV, Nr. 2) das Cauchy'sche Integral-Theorem für „holomorphe" Functionen (d. h. solche, die in der Umgebung jeder Stelle x_0 durch eine $\mathfrak{P}(x - x_0)$ darstellbar sind) in ganz ähnlicher Weise begründet und als Quelle für diese Beweis-Methode auf die Weierstrass'schen Vorlesungen verwiesen.

Bedeutet jetzt für $x = \xi + \eta i$

$$f(x) = \varphi(\xi, \eta) + i \cdot \psi(\xi, \eta)$$

eine zwischen den Punkten $x_0 = \xi_0 + \eta_0 i$ und $x_1 = \xi_1 + \eta_1 i$ längs der Curve $C(\xi, \eta) = 0$ eindeutig definirte, endliche und im allgemeinen stetige Function von x, so definire man das über den Integrationsweg (C) von x_0 bis x_1 erstreckte Integral durch die Gleichung:

$$(10) \qquad \int_{x_0\,C}^{x_1} f(x)\,dx = \int_{\xi_0, \eta_0\,C}^{\xi_1, \eta_1} \{\varphi(\xi, \eta) + i \cdot \psi(\xi, \eta)\}\,(d\xi + i\,d\eta).$$

Dasselbe hat alsdann einen bestimmten, lediglich von den Werthen, welche $f(x)$ längs der Curve C annimmt, nicht aber von der besonderen Form des dabei zu Grunde gelegten arithmetischen Ausdruckes abhängigen Werth. Bei Umkehrung der Integrations-Richtung geht dieser Werth in den entgegengesetzten über.

Nun betrachte man zunächst das Integral $\int x^n \cdot dx$ erstreckt über die Begrenzung (R) eines Rechteckes mit den Eckpunkten: $a + bi$, $a' + bi$, $a' + b'i$, $a + b'i$, wobei etwa $a + bi$ den linken unteren Eckpunkt bezeichnen möge, so dass also die Folge jener Punkte der gewöhnlich als positiv bezeichneten Integrations-Richtung entspricht, so ergiebt sich zunächst auf Grund der Definitions-Gleichung (10):

$$\int_{(R)} x^n \cdot dx = \int_a^{a'} (\xi + b\,i)^n \cdot d\xi + \int_b^{b'} (a' + \eta\,i)^n \cdot i\,d\eta$$

$$+ \int_{a'}^{a} (\xi + b'\,i)^n \cdot d\xi + \int_{b'}^{b} (a + \eta\,i)^n \cdot i\,d\eta,$$

also mit Benützung von Gl. (9):

$$\int_{(R)} x^n \cdot dx = \frac{1}{n+1} \left\{ \left[(\xi + b\,i)^{n+1} \right]_a^{a'} + \left[(a' + \eta\,i)^{n+1} \right]_b^{b'} \right.$$
$$\left. + \left[(\xi + b'\,i)^{n+1} \right]_{a'}^{a} + \left[(a + \eta\,i)^{n+1} \right]_{b'}^{b} \right\}$$

das heisst

$$(11) \qquad \int_{(R)} x^n \cdot dx = 0$$

und zwar für $n \geqq 0$ und $n \leqq -2$, mit der einzigen Einschränkung, dass im Falle eines negativen n die Stelle $x = 0$ nicht gerade auf der Begrenzung (wohl aber im Innern) von R liegen darf.

Ersetzt man in (11) x durch $x - x_0$ (was wegen der Willkürlichkeit der in Gl. (9) mit c bezeichneten Constante ohne weiteres zulässig ist), so folgt, dass auch:

$$(12) \qquad \int_{(R)} (x - x_0)^n \cdot dx = 0 \quad (n \geqq 0,\ n \leqq -2),$$

sofern nur für $n < 0$ die Stelle x_0 nicht auf der Begrenzung von R liegt.

Dieses Resultat lässt sich offenbar ohne weiteres auf den Fall übertragen, dass an die Stelle des Rechtecks (R) ein „Treppen-Polygon" (d. h. eine gebrochene, aus Parallelen zu den Coordinatenaxen bestehende, sich selbst nicht schneidende, geschlossene Linie) tritt, da ein solches durch Einschaltung passender Hülfslinien stets in eine endliche Anzahl von Rechtecken zerlegt werden kann, und die von diesen Hülfslinien herrührenden Integral-Bestandtheile sich schliesslich wieder herausheben.

Und da man einer beliebigen, einfach geschlossenen Curve (S) stets ein solches Treppen-Polygon (P) so zuordnen kann, dass die Differenz der über (S) und (P) erstreckten Integrale beliebig klein wird[1]), so findet man, dass auch:

[1]) Vgl. „Ueber den Cauchy'schen Integralsatz", Sitz.-Ber. 1895, p. 56 ff. 66 ff.

$$(13) \qquad \int\limits_{(S)} (x - x_0)^n \cdot d\,x = 0 \quad (n \geqq 0,\ n \leqq -2)$$

(immer mit der Einschränkung, dass x_0 im Falle $n < 0$ nicht auf der Curve (S) liegen darf).

Wenn jetzt die Reihen:

$$\sum_0^\infty{}^\nu a_\nu \cdot (x - x_0)^\nu, \quad \sum_2^\infty{}^\nu a_{-\nu} \cdot (x - x_0)^{-\nu}$$

für irgend welche Bereiche convergiren, so ergiebt sich vermöge der gleichmässigen Convergenz solcher Reihen, dass:

$$(14) \quad \int\limits_{(S)} \left(\sum_0^\infty{}^\nu a_\nu \cdot (x - x_0)^\nu \right) \cdot d\,x = \sum_0^\infty{}^\nu a_\nu \int\limits_{(S)} (x - x_0)^\nu \cdot d\,x = 0$$

$$(15) \quad \int\limits_{(S)} \left(\sum_2^\infty{}^\nu a_{-\nu} \cdot (x - x_0)^{-\nu} \right) \cdot d\,x = \sum_2^\infty{}^\nu a_{-\nu} \cdot \int\limits_{(S)} (x - x_0)^{-\nu} \cdot d\,x = 0,$$

falls die geschlossene Curve (S) dem Convergenz-Bereiche der betreffenden Reihe angehört.

II. Nun sei $f(x)$ synektisch zum mindesten für alle Stellen im Innern eines gewissen Bereiches T, und es bedeute T' ein von einer oder mehreren Randcurven begrenztes, innerhalb T liegendes Flächenstück. Alsdann existirt für jede Stelle x_0 im Innern und auf der Begrenzung von T' eine gewisse Umgebung $|x - x_0| < \varrho$, innerhalb deren eine Entwickelung von der Form $f(x) = \sum_0^\infty{}^\nu a_\nu (x - x_0)^\nu$ besteht. Die positive Zahl ϱ_0 besitzt nun nach bekannten Sätzen ein gewisses von Null verschiedenes Minimum δ. Zerlegt man jetzt den Bereich T' durch Parallelen zu den Coordinaten-Axen im Abstande $\frac{\delta}{\sqrt{2}}$ in Theilbereiche, so ist die grösste Entfernung zweier Punkte, von denen einer im Innern, der andere auf der Grenze eines solchen Theilbereiches t liegt, kleiner als die Diagonale eines Quadrates mit der Seite $\frac{\delta}{\sqrt{2}}$ d. h. $< \delta$. Nimmt man also eine Stelle x_0 ganz beliebig im Innern von t an, so liegt dessen gesammte Begrenzung noch innerhalb des Gültigkeits-Bereiches der Entwickelung $f(x) = \sum_0^\infty {}^\nu a_\nu (x - x_0)^\nu$. Alsdann ergiebt sich aber nach Gl. (15):

$$(16) \qquad \int_{(t)} f(x) \cdot dx = 0$$

und aus der Addition der von allen einzelnen Theilbereichen herrührenden Integrale (wobei sich wegen der Eindeutigkeit von $f(x)$ wiederum alle auf die Hülfslinien erstreckten Integrale herausheben):

$$(17) \qquad \int_{(T')} f(x) \cdot dx = 0,$$

womit das Cauchy'sche Fundamental-Theorem bewiesen ist.

Dabei kann schliesslich für die Integrations-Curve (T') auch die Begrenzung (T) — ganz oder theilweise — substituirt werden, soweit $f(x)$ daselbst noch durchweg endlich und im allgemeinen stetig ist.

III. Ist α eine singuläre Stelle von $f(x)$, so wird die Laurent'sche Entwickelung:

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} {}^\nu a_\nu (x - \alpha)^\nu$$

negative Potenzen von $(x - \alpha)$ in begrenzter oder unbegrenzter Zahl enthalten. Bedeutet dann wieder (S) eine geschlossene, im Convergenz-Bereiche dieser Entwickelung verlaufende Curve, so folgt mit Benützung der Gleichungen (14) und (15), dass:

$$(18) \qquad \int_{(S)} f(x) \cdot dx = a_{-1} \int_{(S)} (x - \alpha)^{-1} \cdot dx$$

Ich möchte noch zeigen, wie man dieses Integral oder, was auf dasselbe hinausläuft, das Integral $\int x^{-1} \cdot d\,x$, erstreckt über eine geschlossene Curve um den Nullpunkt, in sehr einfacher Weise ohne Benützung der sonst üblichen Polar-Coordinaten auswerthen kann.

Ich nehme als Integrationsweg das Quadrat mit den Eckpunkten:

$$-1-i, \qquad 1-i, \qquad 1+i, \qquad -1+i.$$

Alsdann ergiebt sich:

$$\int\limits_{(0)} \frac{d\,x}{x} = \int\limits_{-1}^{+1} \frac{d\,\xi}{\xi - 1} + \int\limits_{-1}^{+1} \frac{i\,d\,\eta}{1 + \eta\,i} + \int\limits_{+1}^{-1} \frac{d\,\xi}{\xi + i} + \int\limits_{+1}^{-1} \frac{i\,d\,\eta}{-1 + \eta\,i}$$

$$= \int\limits_{-1}^{+1} \left\{ \frac{1}{\xi - i} - \frac{1}{\xi + i} \right\} d\,\xi + \int\limits_{-1}^{+1} \left\{ \frac{1}{1 + \eta\,i} + \frac{1}{1 - \eta\,i} \right\} i\,d\,\eta$$

$$= 2\,i \int\limits_{-1}^{+1} \frac{d\,\xi}{1 + \xi^2} + 2\,i \int\limits_{-1}^{+1} \frac{d\,\eta}{1 + \eta^2}$$

$$= 8\,i \int\limits_{0}^{1} \frac{d\,u}{1 + u^2} = 8\,i \sum_{0}^{\infty}{}_{\nu} (-1)^{\nu} \cdot \frac{1}{2\,\nu + 1} = 2\,\pi\,i.$$

Und hieraus allgemein:

$$\int\limits_{(a)} \frac{d\,x}{x - a} = 2\,\pi\,i. \tag{19}$$

Mit Hülfe dieser letzten Beziehung und der Identität:

$$\int\limits_{(T)} \frac{f(x) - f(x')}{x - x'}\,d\,x = \int\limits_{(T)} \frac{f(x)}{x - x'}\,d\,x - f(x') \int\limits_{(T)} \frac{d\,x}{x - x'}$$

findet man, da das links stehende Integral nach II den Werth Null hat, wenn $f(x)$ innerhalb (T) synektisch und auf der Begrenzung noch endlich und im allgemeinen stetig ist, schliesslich noch den Cauchy'schen Randintegral-Satz:

(20) $$f(x') = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(T)} \frac{f(x)}{x - x'} \cdot dx,$$

wo x' jede beliebige **innerhalb** (T) gelegene Stelle bedeuten kann.

IV. Unmittelbar aus der Definition eines Integrals von der Form $\int\limits_{x_0}^{x_1} f(x) \cdot dx$ folgt, dass der absolute Werth eines solchen Integrals zugleich mit der Länge des Integrationsweges beliebig klein wird, falls $|f(x)|$ auf demselben durchweg unter einer endlichen Grenze bleibt.

Sind jetzt m, n zwei ganze positive Zahlen ohne gemeinsamen Theiler, $\varphi(x)$ eine innerhalb eines gewissen Bereiches T synektische Function, α irgend eine im Innern von (T) gelegene Stelle, so lässt sich noch zeigen, dass für $m < n$ das Integral:

$$\int \frac{\varphi(x)}{(x-\alpha)^{\frac{m}{n}}} dx$$

nach Festsetzung eines bestimmten **Anfangs-Werthes** für $(x - \alpha)^{\frac{m}{n}}$, einen **bestimmten endlichen** Werth besitzt, falls es über eine innerhalb (T) verlaufende, den Punkt α zunächst nicht umkreisende Curve bis nach α hin erstreckt wird; und dass dasselbe Integral, genommen über eine einfach geschlossene Curve um den Punkt α herum, zugleich mit dem Integrationswege **beliebig klein** wird.

Beides erkennt man mit Hülfe der Substitution:

$$(x - \alpha)^{\frac{1}{n}} = z, \text{ also: } x = z^n + \alpha,$$

vermöge deren:

$$\int \frac{\varphi(x)}{(x-\alpha)^{\frac{m}{n}}} dx = \int z^{n-m-1} \cdot \varphi(z^n + \alpha) \cdot dz$$

wird. Dabei ist $n - m - 1 \geqq 0$, da $n > m$ vorausgesetzt wurde, und zugleich $\varphi(z^n + \alpha)$ für die dem Werthe $x = \alpha$ entsprechende

Stelle $z = 0$ eine synektische Function von z, so dass die Richtigkeit der beiden ausgesprochenen Behauptungen ohne weiteres aus dem Hauptsatze II. und der am Eingange von IV. gemachten Bemerkung hervorgeht.

Die vorstehenden Sätze reichen im wesentlichen vollständig aus, um die Lehre von den Integralen rationaler Functionen, den cyclometrischen, elliptischen und hyperelliptischen Integralen mit einem verhältnissmässig geringen Aufwand von functionentheoretischen Hülfsmitteln zu entwickeln.