Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Classe

der

k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.

Band XXVI. Jahrgang 1896.

München.
Verlag der K. Akademie.
1897.

In Commission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).

Sitzung vom 4. Juli 1896.

1. Herr Robert Hartig hält einen Vortrag: „Ueber das Absterben von Baumgruppen durch Blitzschlag.“ Die Arbeit soll anderweit veröffentlicht werden.

2. Herr H. Seeliger legt eine Abhandlung des Herrn Dr. C. Charlier, Observator an der Sternwarte der Universität Upsala: „Untersuchung über die Methoden zum Tabuliren der Störungen der kleinen Planeten“ vor.

Untersuchung über die Methoden zum Tabuliren der Störungen der kleinen Planeten.

Von Dr. **C. Charlier.**

(*Eingelaufen 4. Juli.*)

In der ersten Reihe unter den Aufgaben der rechnenden Astronomie der Gegenwart steht ohne Zweifel die Berechnung der Störungen der kleinen Planeten zwischen Jupiter und Mars. Da es sich hierbei um eine Frage handelt, deren Lösung jedenfalls sehr viel Arbeit und Talent in Anspruch nehmen muss, und da ausserdem die gewünschte Lösung der Aufgabe so beschaffen sein dürfte, dass die ganze Rechnung nicht nach kurzer Zeit neu gemacht werden muss, so wird es von Interesse sein, die Methoden, die den Astronomen hierbei zur Verfügung stehen, von so vielen Seiten wie möglich zu mustern, damit man unter den vielen Auswegen, die zu Gebot stehen, den möglichst zweckmässigsten auswählen kann. Es ist übrigens nicht zu erwarten, dass eine einzige Methode für alle Fälle, die im Planetensysteme vorkommen, ausreichen wird; vielmehr wird es sich wahrscheinlich herausstellen, dass die verschiedenen Werthe der Integrationskonstanten verschiedene Behandlungsmethoden erheischen werden. So kann man sich z. B. folgendes Arbeitsschema als plausibel vorstellen: Die Planeten, deren mittlere Bewegung nahe commensurabel mit derjenigen vom Jupiter ist, werden besonders gerechnet; unter den übrigen kommen die Planeten mit kleiner Excentricität und Neigung zusammen in einer Klasse; und zunächst kommen die übrigen Planeten, unter denen vielleicht diejenigen, die Jupiter am nächsten liegen, eine besondere Behandlungsmethode erfordern werden.

Man kann sich auch andere Gesichtspunkte bei der Behandlung des Problems denken: z. B. ob man absolute Bahnen nach Gyldén's Betrachtungsweise rechnen soll, oder ob man sich mit allgemeinen Störungen begnügen darf u. s. w.; aber auch dann wird man schliesslich doch nicht von den verschiedenen Werthen der Integrationskonstanten absehen können, sondern man wird wieder auf die obige Eintheilung zurückgeführt.

Im Folgenden werden zwei Vorschläge zum Tabuliren der Störungen der kleinen Planeten auseinandergelegt und so weit geführt, dass man eine Uebersicht über die für das Tabuliren zu fordernde Arbeit bekommen kann. Dieselben dürfen mit Vortheil benutzt werden können bei Planeten, deren Excentricität und Neigung kleiner als $1/5$ (12°) betragen, und es verdient bemerkt zu werden, dass die Zahl solcher Planeten über 70 % der gesammten Planeten ausmachen.

I.

Setzen wir zur Abkürzung

$$g = e \cos \pi\,; \qquad p = \sin i \cos \Omega$$
$$h = e \sin \pi\,; \qquad q = \sin i \sin \Omega,$$

wo e, i, π und Ω die Excentricität, die Inklination, die Perihellänge und die Knotenlänge des gestörten Planeten bedeuten, und sind g', h', p' und q' die entsprechenden Grössen für den störenden Planeten, so lassen sich bekanntlich die Störungsfunktion und ihre partiellen Ableitungen als Potenzreihen nach den positiven Potenzen von g, h etc. darstellen. Die Koefficienten in diesen Reihen sind dann abhängig nur von dem Verhältniss α zwischen den halben grossen Achsen a und a' und von der als unabhängige Veränderliche benutzten Winkelgrösse. Behalten wir die Konstanten g, h, p und q unbestimmt, geben aber α einen bestimmten Werth, so kann man die Integration numerisch ausführen und erhalten nach derselben die Koordinaten als Potenzreihen nach diesen selben Grössen g, h etc. dargestellt. Um die Begriffe zu fixiren, nehmen wir an, dass irgend eine Koordinate X nach der Integration durch die folgende Reihe gegeben wird:

$$X = \sum X(\alpha, u)\, g^k h^l p^m q^n g'^{k'} h'^{l'} p'^{m'} q'^{n'},$$

wo wir, wenn die Indices bei X angezeigt werden sollen, setzen

$$X(\alpha, u) = X_{k\,l\,m\,n}^{k'\,l'\,m'\,n'}(\alpha, u).$$

Die Koefficienten X sind nun, indem wir vorläufig von den sekularen Gliedern wegsehen, in Fourier'sche Reihen nach den Vielfachen von u entwickelt, und die Koefficienten in diesen Ausdrücken sind allein von der Grösse α abhängig[1]); es wird untersucht werden, wie sich das Tabuliren dieser Koefficienten bequem ausführen lässt.

Zunächst ist ersichtlich, dass eine derartige Tafel für die Berechnung der Störungen der kleinen Planeten von dem grössten Nutzen sein würde. In Besitz einer Tafel von den Funktionen X hatte man in den Ausdrücken für die Koordinate nur die besonderen Werthe von g, h, p, q einzusetzen, um sogleich durch einfache Addition die allgemeinen Störungsausdrücke eines beliebigen Planeten zu erhalten. Die ganze Arbeit um die vollständigen Störungsausdrücke eines Planeten zu erhalten, würde kaum viele Stunden in Anspruch nehmen. Weiter ist es zu bemerken, dass wenn nach einigen Jahrzehnten die oskulirenden Elemente des Planeten sich so viel geändert haben, dass man

[1]) Und von der Epochelänge, von der wir aber hier absehen können.

eine Ungenauigkeit der Störungsausdrücke zu befürchten hat und somit neue Störungen berechnen will, so kann man dabei wieder dieselbe Tafel benutzen und die neuen Störungsausdrücke ebenso leicht erhalten.[1])

Um beurtheilen zu können, in welchem Umfang eine solche Tafel berechnet werden soll, habe ich in der beigefügten Tabelle die 311 ersten kleinen Planeten nebst deren Exentricität und Neigung zusammengestellt.

Man sieht aus dieser Tafel unter Anderem, dass zwischen $\log a = 0.41$ und $\log a = 0.50$ über 200 von allen Planeten enthalten sind. Diese Planeten sind diejenigen, deren mittlere Bewegung zwischen der zweifachen mittleren Bewegung von Jupiter und der dreifachen derselben liegt. Für dieses Gebiet von a (entsprechend α-Werthe zwischen 9.694 und 9.784) wird also die besprochene Tafel besonders günstige Resultate liefern.

Wir werden nun das betreffende Problem etwas näher untersuchen. Man kann in vielerlei Weise das genannte Programm durchführen je nach der Wahl der unabhängigen Veränderlichen u und der Wahl der Koordinaten. Alle diese Methoden haben eine Eigenschaft gemein, auf die ich zuerst aufmerksam machen will.

Betrachten wir die Störungsfunktion Ω oder irgend eine Ableitung derselben, so kann man dieselbe auf die oben genannte Form für die Koordinaten bringen. Setzen wir nun

$$\Omega = \sum \Omega(\alpha, u)\, g^k h^l p^m q^n g'^{k'} h'^{l'} p'^{m'} q'^{n'},$$

so haben die $\Omega(\alpha, u)$ folgende Eigenschaft. Man kann setzen

$$\Omega(\alpha, u) = \Omega_0(\alpha, \Delta) + \Omega_1^c(\alpha, \Delta)\cos u + \ldots$$
$$+ \Omega_1^s(\alpha, \Delta)\sin u + \ldots,$$

wo

$$\Delta^2 = 1 + \alpha^2 - 2\alpha\cos(\lambda u + B)$$

und λ eine gegebene Funktion von α ist.

---

[1]) In der That braucht man nur die aus den neuen g, h, p, q herrührenden Korrektionsglieder hinzufügen.

Die obige Reihe für $\Omega(\alpha, u)$ enthält immer eine endliche Zahl von Gliedern und zwar ist diese Zahl nicht grösser als

$$k + l + m + n + k' + l' + m' + n' + 1;$$

weiter sind die Koefficienten immer von folgender Form:

$$\Omega_r(\alpha, \Delta) = \frac{k_{-s}}{\Delta^s} + \frac{k_{-s+1}}{\Delta^{s-1}} + \ldots + k_0 + k_1 \Delta + k_t \Delta^t,$$

wo wieder die Zahl der Glieder endlich ist und die k Funktionen von α allein sind. In Besitz einer Tafel für die Entwickelung von Δ^s erhalten wir somit leicht die Entwickelung der Funktionen Ω_r. Wir werden einige von diesen Funktionen im Folgenden bilden.

Die einzige Ausnahme von der obigen Form ist, dass in einigen Ausdrücken ein Faktor $\sin(\lambda u + B)$ hinzukommt.

Wir werden jetzt zur Bildung der Funktionen Ω übergehen. Als Koordinaten werde ich Polarkoordinaten, bezogen auf ein durch die Sonne als Origo gelegtes, festes Koordinatensystem, wählen; als unabhängige Veränderliche wird die wahre Anomalie des gestörten Planeten gewählt. In den Lagrange'schen Differentialgleichungen

$$\frac{d^2 r}{d t^2} - r \left(\frac{d b}{d t}\right)^2 - r \cos^2 b \left(\frac{d l}{d t}\right)^2 + \frac{\mu}{r^2} = P$$

$$r^2 \cos^2 b \frac{d^2 l}{d t^2} + 2 r \cos^2 b \frac{d r}{d t} \frac{d l}{d t} - 2 r^2 \cos b \sin b \frac{d b}{d t} \frac{d l}{d t} = Q$$

$$r^2 \frac{d^2 b}{d t^2} + 2 r \frac{d r}{d t} \frac{d b}{d t} + r^2 \sin b \cos b \left(\frac{d l}{d t}\right)^2 = R$$

führen wir also statt t als unabhängige Veränderliche v ein durch die Gleichung

$$r^2 d v = \sqrt{c}\, d t$$

und wenn wir gleichzeitig $\frac{1}{r}$ statt r anwenden, bekommen wir nach einigen Transformationen, die ich hier übergehen kann, das folgende System von Differentialgleichungen:

$$(A) \ldots \left\{\begin{aligned} &\frac{d^2 \frac{p}{r}}{d v^2} + \frac{p}{r} - 1 = - A \\ &\frac{d l}{d v} = \cos i \,(1 + \operatorname{tg}^2 b) + \frac{1 + \operatorname{tg}^2 b}{c} \int Q\, r^2\, d v \\ &\frac{d^2 b}{d v^2} + \cos^2 i \operatorname{tg} b \,(1 + \operatorname{tg}^2 b) = C. \\ &r^2 d v = \sqrt{c}\, d t, \end{aligned}\right.$$

wo

$$\mu A = P r^2 + \frac{2 \cos i}{r} \int \frac{Q\, r^2\, d v}{\cos^2 b} + \frac{2}{r} \int \frac{d b}{d v} R\, r^2\, d v$$

$$+ \frac{2}{c\, r} \int \left[\frac{Q\, r^2}{\cos^2 b} \int Q\, r^2\, d v \right] d v$$

$$c\, C = R r^2 - 2 \cos i \operatorname{tg} b\,(1 + \operatorname{tg}^2 b) \int Q\, r^2\, d v - \frac{1}{c} \operatorname{tg} b\,(1 + \operatorname{tg}^2 b) \left[\int Q\, r^2\, d v\right]^2$$

Indem wir uns auf die Störungen erster Ordnung beschränken, können wir diese Differentialgleichungen folgendermassen integriren.

Man setzt

$$(B) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \left\{\begin{aligned} \frac{p}{r} &= \frac{p}{r_0} + \varrho \\ l &= l_0 + s \\ b &= b_0 + z, \end{aligned}\right.$$

wo r_0, l_0 und b_0 durch die folgenden Gleichungen bestimmt sind:

$$(C) \ldots\ldots \left\{\begin{aligned} &\frac{d^2 \frac{p}{r_0}}{d v^2} + \frac{p}{r_0} - 1 = 0 \\ &\frac{d l_0}{d v} = \cos i\,(1 + \operatorname{tg}^2 b_0) \\ &\frac{d^2 b_0}{d v^2} + \cos^2 i \operatorname{tg} b_0\,(1 + \operatorname{tg}^2 b_0) = 0. \end{aligned}\right.$$

Zur Bestimmung von ϱ, s und z bekommt man dann das System

$$
(D) \begin{cases} \dfrac{d^2 \varrho}{d v^2} + \varrho = -A \\ \dfrac{d s}{d v} = \cos i\,(\operatorname{tg}^2 b - \operatorname{tg}^2 b_0) + \dfrac{1 + \operatorname{tg}^2 b}{c} \displaystyle\int Q\, r^2\, d v \\ \dfrac{d^2 z}{d v^2} + \cos^2 i\,[1 + 4 \operatorname{tg}^2 b_0 + 3 \operatorname{tg}^4 b_0] \cdot z = C. \end{cases}
$$

Wir bemerken, dass r_0, l_0 und b_0 nicht ganz mit den ungestörten Koordinaten zusammenfallen, da dieselben von v und nicht von der ungestörten wahren Anomalie abhängen. Weiter will ich bemerken, dass man ohne viele Abänderungen in dem Folgenden statt den Gleichungen (A) bis (D) die Laplace'schen Gleichungen mit l als unabhängige Veränderliche anwenden kann. Ich habe die obige Form bevorzugt, nur weil die Entwickelung der Störungsfunktion sich etwas einfacher gestaltet, wenn v als unabhängige Veränderliche benutzt wird.

Die Integration von (C) giebt

$$
(1) \quad \begin{cases} \dfrac{p}{r_0} = 1 + g \cos v + h \sin v \\ \sin b_0 = p \sin v - q \cos v \\ l_0 = \displaystyle\int \frac{\cos i\, d v}{1 - \sin^2 i \sin^2 (v - \Omega)} \end{cases}
$$

$$
= v - \frac{1}{4}(p^2 - q^2) \sin 2v + \frac{1}{2} p\, q \cos 2v + \ldots .
$$

Indem wir setzen

$$
(2) \qquad V = \mu\,(v - c) + c'
$$

bekommt man für v' den Ausdruck:

$$
(3)\; v' = V - 2\mu\,(g \sin v - h \cos v) + 2\,(g' \sin V - h' \cos V)
$$
$$
+ \frac{3}{4}\mu\,[(g^2 - h^2) \sin 2v - 2gh \cos 2v] + \frac{5}{4}(g'^2 - h'^2) \sin 2V - \frac{5}{2} g' h' \cos 2V -
$$
$$
- 2\mu g g' [\sin(v - V) + \sin(v + V)] + 2\mu h g' [\cos(v - V) + \cos(v + V)]
$$
$$
- 2\mu g h' [\cos(v - V) - \cos(v + V)] + 2\mu h h' [-\sin(v - V) + \sin(v + V)]
$$
$$
+ \ldots .
$$

Mit Anwendung dieser Werthe von r_0, l_0, b_0 und v' wird nun die Störungsfunktion entwickelt. Diese Entwickelung geschieht nach der von mir in meinem Aufsatz: „Studier öfver tre-kroppar-problemet“ II.[1]) benutzten Methode, die ich kurz auseinandersetzen werde.

Indem wir setzen

$$(4) \quad \ldots\ldots\ldots \quad D = \frac{r^2 r'}{r''^3} - \frac{r^2}{r'^2},$$

so ist

$$\frac{1}{m'} r^2 P = D H - \frac{r^3}{r''^3}$$

$$\frac{1}{m'} r^2 Q = D r \frac{\partial H}{\partial l}$$

$$\frac{1}{m'} r^2 R = D r \frac{\partial H}{\partial b},$$

wo H den Winkel zwischen dem Radius Vektor des gestörten und des störenden Körpers bezeichnet, also

$$H = \cos b \cos l \cos b' \cos l' + \cos b \sin l \cos b' \sin l' + \sin b \sin b'.$$

Die Entwickelung von $\frac{1}{r''^3}$ geschieht nun in folgender Weise:

Es ist

$$r''^2 = r^2 + r'^2 - 2 r r' H$$

und also, wenn wir setzen

$$\Delta_0^2 = a^2 + a'^2 - 2 a a' \cos w,$$

wo

$$w = v - V = (1 - \mu) v + \mu c - c',$$

und

$$r''^2 = \Delta_0^2 + F,$$

so ist

$$F = r^2 + r'^2 - 2 r r' H - a^2 - a'^2 + 2 a a' \cos w.$$

---

[1]) Bihang till. K. Svenska Vet. Akademins Skrifter. Bd. 19.

Führen wir jetzt die Bezeichnungen

$$r = a\,(1 + \varrho);\ r' = a'\,(1 + \varrho);\ H = \cos w + u$$

ein und beobachten, dass man statt w überall $\varDelta_0$ einführen kann durch die Relation

$$2\,a\,a' \cos w = a^2 + a'^2 - \varDelta_0^2$$

und die daraus abgeleitete

$$4\,a^2\,a'^2 \sin^2 w = 4\,a^2\,a'^2 - (a^2 + a'^2 - \varDelta_0^2)^2,$$

so bekommen wir

$$(5)\quad F = (a^2 - a'^2 + \varDelta_0^2)\,\varrho - (a^2 - a'^2 - \varDelta_0^2)\,\varrho' - 2\,a\,a'\,u$$
$$+ a^2\varrho^2 + a'^2\varrho'^2 - (a^2 + a'^2 - \varDelta_0^2)\,\varrho\,\varrho' - 2\,a\,a'\,u\,(\varrho + \varrho') -$$
$$- 2\,a\,a'\,u\,\varrho\,\varrho',$$

und da

$$\frac{1}{r''^3} = (\varDelta_0^2 + F)^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{\varDelta_0^3} - \frac{3}{2}\frac{F}{\varDelta_0^5} + \frac{15}{8}\frac{F^2}{\varDelta_0^7} - \ldots .$$

oder nach Einsetzung des obigen Ausdruckes (5) für f

$$\frac{1}{r''^3} = \frac{1}{\varDelta_0^3} - \frac{3}{2}\left(\frac{a^2 - a'^2}{\varDelta_0^5} + \frac{1}{\varDelta_0^3}\right)\varrho + \frac{3}{2}\left(\frac{a^2 - a'^2}{\varDelta_0^5} - \frac{1}{\varDelta^3}\right)\varrho'$$
$$+ \frac{3\,a\,a'\,u}{\varDelta_0^5} + \frac{15}{8}\left(\frac{(a^2 - a'^2)^2}{\varDelta_0^7} + \frac{6\,a^2 - 10\,a'^2}{5\,\varDelta_0^5} + \frac{1}{\varDelta_0^3}\right)\varrho^2 + \ldots,$$

und wenn wir setzen

$$D = \sum D_{k\,l\,m}\,\varrho^k\,\varrho'^l\,u^m$$

erhalten wir somit, indem wir gleichzeitig

$$\alpha = \frac{a}{a'}$$

$$(6)\qquad \varDelta^2 = 1 + \alpha^2 - 2\,\alpha \cos w = \frac{\varDelta_0^2}{a'^2}$$

einführen, folgende Ausdrücke für die Koefficienten D:

$$D_{000} = \frac{\alpha^2}{\varDelta^3} - \alpha^2$$

$$D_{100} = \frac{3}{2} \frac{\alpha^2 (1 - \alpha^2)}{\Delta^5} + \frac{1}{2} \frac{\alpha^2}{\Delta^3} - 2\alpha^2$$

$$D_{010} = - D_{100}$$

$$D_{001} = \frac{3\alpha^3}{\Delta^5}$$

$$D_{200} = \frac{15}{8} \frac{\alpha^2 (1 - \alpha^2)^2}{\Delta^7} - \frac{3}{4} \frac{\alpha^2 (1 + \alpha^2)}{\Delta^5} - \frac{1}{8} \frac{\alpha^2}{\Delta^3} - \alpha^2$$

$$D_{020} = \frac{15}{8} \frac{\alpha^2 (1 - \alpha^2)^2}{\Delta^7} + \frac{3}{4} \frac{\alpha^2 (1 - 3\alpha^2)}{\Delta^5} + \frac{3}{8} \frac{\alpha^2}{\Delta^3} - 3\alpha^2$$

$$D_{002} = \frac{15}{2} \frac{\alpha^4}{\Delta^7}$$

$$D_{110} = - \frac{15}{4} \frac{\alpha^2 (1 - \alpha^2)^2}{\Delta^7} + 3 \frac{\alpha^4}{\Delta^5} - \frac{1}{4} \frac{\alpha^2}{\Delta^3} + 4\alpha^2$$

$$D_{101} = + \frac{15}{2} \frac{\alpha^3 (1 - \alpha^2)}{\Delta^7} + \frac{3}{2} \frac{\alpha^3}{\Delta^5}$$

$$D_{011} = - \frac{15}{2} \frac{\alpha^3 (1 - \alpha^2)}{\Delta^7} - \frac{3}{2} \frac{\alpha^3}{\Delta^5} = - D_{101}.$$

Jetzt setzen wir

$$\frac{1}{m'} r^2 P = \sum P_{klm} \varrho^k \varrho'^l u^m \tag{7}$$

und die Koefficienten P_{klm} erhalten dann folgende Werthe:

$$P_{000} = \frac{1}{2} \frac{\alpha (1 - \alpha^2)}{\Delta^3} - \frac{1}{2} \frac{\alpha}{\Delta} - \frac{1}{2} \alpha (1 + \alpha^2) + \frac{1}{2} \alpha \Delta^2$$

$$P_{100} = \frac{3}{4} \frac{\alpha (1 - \alpha^2)^2}{\Delta^5} - \frac{1}{2} \frac{\alpha (1 + \alpha^2)}{\Delta^3} - \frac{1}{4} \frac{\alpha}{\Delta} - \alpha (1 + \alpha^2) + \alpha \Delta^2$$

$$P_{010} = - P_{100}$$

$$P_{001} = \frac{3}{2} \frac{\alpha^2 (1 - \alpha^2)}{\Delta^5} - \frac{1}{2} \frac{\alpha^2}{\Delta^3} - \alpha^2$$

$$P_{200} = \frac{15}{16}\frac{\alpha(1-\alpha^2)^3}{\varDelta^7} - \frac{\alpha}{16}\frac{(21-6\alpha^2-15\alpha^4)}{\varDelta^5} + \frac{\alpha}{16}\frac{5-\alpha^2}{\varDelta^3} +$$
$$+ \frac{\alpha}{16\varDelta} - \frac{1}{2}\alpha(1+\alpha^2) + \frac{1}{2}\alpha\varDelta^2$$

$$P_{020} = \frac{15}{16}\frac{\alpha(1-\alpha^2)^3}{\varDelta^7} - \frac{9\alpha}{16}\frac{1+2\alpha^2-3\alpha^4}{\varDelta^5} - \frac{3\alpha}{16}\cdot\frac{1+3\alpha^2}{\varDelta^3} -$$
$$- \frac{3}{16}\frac{\alpha}{\varDelta} - \frac{3}{2}\alpha(1+\alpha^2) + \frac{3}{2}\alpha\varDelta^2$$

$$P_{002} = \frac{15}{4}\frac{\alpha^3(1+\alpha^2)}{\varDelta^7} - \frac{3}{4}\frac{\alpha^3}{\varDelta^5}$$

$$P_{110} = -\frac{15}{8}\frac{\alpha(1-\alpha^2)^3}{\varDelta^7} + \frac{1}{8}\frac{\alpha(15+6\alpha^2-21\alpha^4)}{\varDelta^5} - \frac{1}{8}\frac{\alpha(1-5\alpha^2)}{\varDelta^3} +$$
$$+ \frac{1}{8}\frac{\alpha}{\varDelta} + 2\alpha(1+\alpha^2) - 2\alpha\varDelta^2$$

$$P_{101} = \frac{15}{4}\frac{\alpha^2(1-\alpha^2)^2}{\varDelta^7} - \frac{3}{2}\frac{\alpha^2(1+\alpha^2)}{\varDelta^5} - \frac{1}{4}\frac{\alpha^2}{\varDelta^3} - 2\alpha^2$$

$$P_{011} = -P_{101}.$$

Die Entwickelung von Q und R ist von eben derselben Form. Wir begnügen uns aber mit den obigen Angaben der Koefficienten P, da es hier hauptsächlich auf die Beurtheilung der bei dem Tabuliren nothwendigen Arbeit herauskommt.

Nachdem jetzt die Entwickelung in der Form (7) erhalten ist, hat man die Ausdrücke für ϱ, ϱ' und u einzusetzen. Diese Ausdrücke sind bis zum zweiten Grade in g, h etc. die folgenden:

$$\varrho = -g\cos v - h\sin v - \frac{1}{2}(g^2+h^2) + \frac{1}{2}(g^2-h^2)\cos 2v + gh\sin 2v$$
$$\varrho' = -g'\cos(v-w) - h'\sin(v-w) +$$
$$+ \mu gg'[-\cos w + \cos(2v-w)] + \mu hg'[-\sin w + \sin(2v-w)]$$
$$+ \frac{1}{2}g'g'[1-\cos 2(v-w)] - g'h'\sin 2(v-w) +$$
$$+ \mu gh'[\sin w + \sin(2v-w)] - \mu hh'[\cos w + \cos(2v-w)]$$
$$+ \frac{1}{2}h'h'[1+\cos 2(v-w)].$$

$$\begin{aligned}
u = &\sin w\,[-2\mu(g\sin v - h\cos v) + 2(g'\sin(v-w) - h'\cos(v-w))] \\
&+ \cos w[-\mu^2(g^2+h^2) + \mu^2(g^2-h^2)\cos 2v + 2\mu^2 gh\sin 2v \\
&\quad -(g'^2+h'^2) + (g'^2-h'^2)\cos 2(v-w) + 2g'h'\sin(2v-w)] \\
&+ \sin w\left[\frac{3}{4}\mu(g^2-h^2)\sin 2v - 2gh\cos 2v)\right. \\
&\qquad \left. + \frac{5}{4}(g'^2-h'^2)\sin 2(v-w) - \frac{5}{2}g'h'\cos 2(v-w)\right] \\
&+ 2\mu gg'[\cos 2w - \cos 2(v-w)] - 2\mu gh'[\sin 2w + \sin 2(v-w)] \\
&+ 2\mu hg'[\sin 2w - \sin 2(v-w)] + 2\mu hh'[\cos 2w + \cos 2(v-w)] \\
&+ \frac{1}{2}(pq + p'q' - pq' - p'q)\sin(2v-w) - \frac{1}{2}(pq' - p'q)\sin w \\
&\quad - \frac{1}{4}[(q-q')^2 - (p-p')^2]\cos(2v-w) - \frac{1}{4}[(q-q')^2 + (p-p')^2]\cos w
\end{aligned}$$

Diese Werthe von ϱ, ϱ' etc. in (7) eingesetzt geben uns nun die gewünschte Form für P. Wir schreiben

$$(8)\quad \frac{1}{m'} r^2 P = A(0) + A(c\cdot 1)\cos v + A(c\cdot 2)\cos 2v + \ldots$$
$$+ A(s\cdot 1)\sin v + A(s\cdot 2)\sin 2v + \ldots,$$

und die Koefficienten A werden dann nach Potenzen von g, g' etc. entwickelt; eine Entwickelung, die wir schreiben:

$$(9)\quad \ldots \quad A = \sum A_{k\,l\,m\,n}^{k'\,l'\,m'\,n'}\, g^k h^l p^m q^n g'^{k'} h'^{l'} p'^{m'} q'^{n'}.$$

Die ersten Koeffizienten in dieser Entwickelung — bis zum zweiten Grade — werden wir jetzt anführen:

Entwickelung von $A(0)$

(enthält nur Glieder geraden Grades in g h etc.).

$$\underset{0000}{\overset{0000}{A}}(0) = P_{000}$$

$$\underset{2000}{A}(0)^{1)} = -\frac{1}{2}P_{100} - \mu^2\cos w\,P_{001} + \frac{1}{2}P_{200} + 2\mu^2\sin^2 w\,P_{002}$$

[1]) Wenn bei einer Funktion die Indices oben oder unten nicht angezeigt sind, so soll das bedeuten, dass dieselben sämtlich gleich Null sind.

$$\underset{0200}{A}(0) = \underset{2000}{A}(0)$$

$$\overset{2000}{A}(0) = \frac{1}{2} P_{010} - \cos w \, P_{001} + \frac{1}{2} P_{020} + 2 \sin^2 w \, P_{002}$$

$$\overset{0200}{A}(0) = \overset{2000}{A}(0)$$

$$\overset{1000}{\underset{1000}{A}}(0) = - P_{010} \, \mu \cos w + 2 \mu \cos 2w \, P_{001} - 4 \mu \cos w \, P_{002} \sin^2 w +$$
$$+ \frac{1}{2} \cos w \, P_{110} + \sin w \, P_{101} \sin w + \mu \sin w \, P_{011} \sin w$$

$$\overset{0100}{\underset{0100}{A}}(0) = \overset{1000}{\underset{1000}{A}}(0)$$

$$\overset{1000}{\underset{0100}{A}}(0) = - P_{010} \, \mu \sin w + 2 \mu \sin 2w \, P_{001} - 4 \mu \sin w \, P_{002} \sin^2 w +$$
$$+ \frac{1}{2} \sin w \, P_{110} - \cos w \, P_{101} \sin w - \mu \cos w \, P_{011} \sin w$$

$$\overset{0100}{\underset{1000}{A}}(0) = - \overset{1000}{\underset{0100}{A}}(0)$$

Die Glieder, die von der Bahnneigung abhängen, schreibe ich besonders aus. Dieselben lauten:

$$- \frac{1}{2} (p q' - p' q) \sin w \, P_{001} - \frac{1}{4} [(p - p')^2 + (q - q')^2] \cos w \, P_{001}.$$

Entwickelung von $A(c \cdot 1)$

(enthält nur Glieder ungeraden Grades in g, h etc.).

$$\underset{1000}{A}(c \cdot 1) = - P_{100}$$

$$\underset{0100}{A}(c \cdot 1) = 2 \mu \sin w \, P_{001}$$

$$\overset{1000}{A}(c \cdot 1) = - P_{010} \cos w - 2 P_{001} \sin^2 w$$

$$\overset{0100}{A}(c \cdot 1) = P_{010} \sin w - 2 P_{001} \sin w \cos w.$$

Die übrigen Koefficienten sind Null.

Entwickelung von $A(s\cdot 1)$.

$$\underset{1000}{A}(s\cdot 1) = -\underset{0100}{A}(c\cdot 1)$$

$$\underset{0100}{A}(s\cdot 1) = +\underset{1000}{A}(c\cdot 1)$$

$$\overset{1000}{A}(s\cdot 1) = -\overset{0100}{A}(c\cdot 1)$$

$$\overset{0100}{A}(s\cdot 1) = +\overset{1000}{A}(c\cdot 1)$$

Entwickelung von $A(c\cdot 2)$.

$$\underset{2000}{A}(c\cdot 2) = \frac{1}{2}P_{100} + \mu^2 \cos w\, P_{001} + \frac{1}{2}P_{200} - 2\mu^2 \sin^2 w\, P_{002}$$

$$\underset{0200}{A}(c\cdot 2) = -\underset{2000}{A}(c\cdot 2)$$

$$\overset{2000}{A}(c\cdot 2) = -\frac{1}{2}P_{010}\cos 2w + P_{001}\cos w \cos 2w - P_{001}\frac{5}{4}\sin w \sin 2w +$$
$$+\frac{1}{2}\cos 2w\, P_{020} - 2\cos 2w \sin^2 w\, P_{002} + \sin w \sin 2w\, P_{011}$$

$$\overset{0200}{A}(c\cdot 2) = -\overset{2000}{A}(c\cdot 2)$$

$$\underset{1100}{A}(c\cdot 2) = -\frac{3}{2}\mu \sin w\, P_{001} - 2\mu \sin w\, P_{101}$$

$$\overset{1100}{A}(c\cdot 2) = P_{010}\sin 2w - 2\cos w \sin 2w\, P_{001} - \frac{5}{2}\sin w \cos 2w\, P_{001} -$$
$$-\sin 2w\, P_{020} + 4\sin 2w \sin^2 w\, P_{002} + 2\cos 2w \sin w\, P_{011}$$

$$\overset{1000}{\underset{1000}{A}}(c\cdot 2) = \mu \cos w\, P_{010} - 2\mu \cos 2w\, P_{001} + 4\mu \cos w \sin^2 w\, P_{002} +$$
$$+\frac{1}{2}\cos w\, P_{110} + \sin w \sin w\, P_{101} - \mu \sin w \sin w\, P_{011}$$

$$\overset{0100}{\underset{0100}{A}}(c\cdot 2) = -\overset{1000}{\underset{1000}{A}}(c\cdot 2)$$

$$\overset{1000}{\underset{0100}{A}}(c \cdot 2) = -\mu \sin w \underset{010}{P} + 2\mu \sin 2w \underset{001}{P} - 4\mu \sin w \sin^2 w \underset{002}{P} -$$
$$-\frac{1}{2} \sin w \underset{110}{P} + \cos w \sin w \underset{101}{P} - \mu \cos w \sin w \underset{011}{P}$$

$$\overset{0100}{\underset{1000}{A}}(c \cdot 2) = \overset{1000}{\underset{0100}{A}}(c \cdot 2)$$

Hierzu kommen die Neigungsglieder:

$$-\frac{1}{2}[pq + p'q' - pq' - p'q] \sin w \underset{001}{P} + \frac{1}{4}[(p-p')^2 - (q-q')^2] \cos w \underset{001}{P}$$

Entwickelung von $A(s \cdot 2)$.

$$\underset{2000}{A}(s \cdot 2) = -\frac{1}{2} \underset{1100}{A}(c \cdot 2)$$

$$\underset{0200}{A}(s \cdot 2) = -\underset{2000}{A}(s \cdot 2)$$

$$\overset{2000}{A}(s \cdot 2) = -\frac{1}{2} \overset{1100}{A}(c \cdot 2)$$

$$\overset{0200}{A}(s \cdot 2) = -\overset{2000}{A}(s \cdot 2)$$

$$\underset{1100}{A}(s \cdot 2) = 2 \underset{2000}{A}(c \cdot 2)$$

$$\overset{1100}{A}(s \cdot 2) = 2 \overset{2000}{A}(c \cdot 2)$$

$$\overset{1000}{\underset{1000}{A}}(s \cdot 2) = -\overset{1000}{\underset{0100}{A}}(c \cdot 2)$$

$$\overset{0100}{\underset{0100}{A}}(s \cdot 2) = -\overset{1000}{\underset{1000}{A}}(s \cdot 2)$$

$$\overset{0100}{\underset{1000}{A}}(s \cdot 2) = \overset{1000}{\underset{1000}{A}}(c \cdot 2)$$

$$\overset{1000}{\underset{0100}{A}}(s \cdot 2) = \overset{0100}{\underset{1000}{A}}(s \cdot 2)$$

und die Neigungsglieder sind:

$$\frac{1}{2}[pq + p'q' - pq' - p'q] \cos w \underset{001}{P} + \frac{1}{2}[(p-p')^2 - (q-q')^2] \underset{001}{P} \sin w.$$

Da so viele von den Koefficienten einander gleich werden, so wird die Zahl der zu tabulirenden Funktionen nicht so gross, wie es im Voraus zu erwarten war. Bis zum ersten Grade inklusive sind nur 5 Funktionen zu tabuliren, für den zweiten Grad kommen noch 12 hinzu.

Setzen wir die früher erhaltenen Ausdrücke für P_{klm} ein, so werden die A direkt als Funktionen von Δ erscheinen. Es werden unten diese Funktionen bis zum ersten Grade inklusive angegeben. Es wird

$$\underset{00}{A}(0) = \frac{1}{2}\,\frac{\alpha(1-\alpha^2)}{\Delta^3} - \frac{1}{2}\,\frac{\alpha}{\Delta} - \frac{1}{2}\,\alpha(1+\alpha^2) + \frac{1}{2}\,\alpha\,\Delta^2$$

$$\underset{10}{A}(c\cdot 1) = -\frac{3}{4}\,\frac{\alpha(1-\alpha^2)^2}{\Delta^5} + \frac{1}{2}\,\frac{\alpha(1+\alpha^2)}{\Delta^3} + \frac{1}{4}\,\frac{\alpha}{\Delta} + \alpha(1+\alpha^2) - \alpha\,\Delta^2$$

$$\underset{01}{A}(c\cdot 1) = \left(3\,\frac{\alpha^2(1-\alpha^2)}{\Delta^5} - \frac{\alpha^2}{\Delta^3} - 2\,\alpha^2\right)\mu \sin w\,^{1)}$$

$$\overset{10}{A}(c\cdot 1) = \frac{3}{8}\,\frac{(3-\alpha^2)(1-\alpha^2)^2}{\Delta^5} - \frac{19-6\,\alpha^2-5\,\alpha^4}{8\,\Delta^3} + \frac{11-\alpha^2}{8\,\Delta}$$
$$-(1+\alpha^4) - \frac{\Delta}{8} + 2\,(1+\alpha^2)\,\Delta^2 - \Delta^4$$

$$\overset{01}{A}(c\cdot 1) = \left[-\frac{3\,\alpha(1-\alpha^2)(1+3\,\alpha^2)}{4\,\Delta^5} + \frac{3\,\alpha(1-\alpha^2)}{2\,\Delta^3} + \frac{\alpha}{4\,\Delta}\right]\sin w.$$

Wie früher bemerkt, sind also — und das gilt allgemein — die Funktionen A entweder von der Form $F(\Delta)$ oder $F(\Delta)\sin w$. Das numerische Tabuliren derselben geschieht äusserst bequem, wenn man früher in Besitz einer Tafel für die Entwickelungskoefficienten von Δ^s ist. Gesetzt

$$(10)\quad \frac{1}{[1+\alpha^2-2\,\alpha\cos w]^s} = \frac{1}{\Delta^s} = \beta_s^{(0)} + 2\,\beta_s^{(1)}\cos w + 2\,\beta_s^{(2)}\cos 2\,w + \ldots,$$

---

1) μ, das Verhältniss zwischen den mittleren Bewegungen, hängt von α und von den Massen ab. Annähernd ist $\mu = \alpha^{-\frac{3}{2}}$.

so sind bekanntlich die Koefficienten $\beta_s^{(i)}$ für gewisse Werthe von s tabulirt in dem Runkle'schen Tafelwerk[1]), jedoch für den jetzt vorliegenden Zweck in ungenügender Umfassung. Dagegen sind von Masal sehr ausführliche Tafeln vorhanden über die Entwickelungs-Koefficienten in der Entwickelung von der Funktion

$$[1 - \alpha^2 \sin^2 w]^{-s},$$

aus welchen die Werthe von $\beta_s^{(i)}$ abgeleitet werden können.[2])

Der Bequemlichkeit halber empfiehlt es sich, auch Tafeln für die Funktionen

$$\frac{\sin w}{\Delta^s}$$

zu berechnen. Sie sind indessen aus den Tafeln für Δ^s sehr leicht zu erhalten, da man hat

$$\frac{\sin w}{\Delta^{s+2}} = -\frac{1}{s\alpha} \frac{d \frac{1}{\Delta^s}}{d w}. \qquad (11)$$

Nachdem in dieser Weise die P, Q und R tabulirt worden sind, werden die Differentialgleichungen (D) für jedes α integrirt. Die Integrale werden zweckmässig auf die Form

$$\varrho = R(0) + R(c \cdot 1) \cos v + R(c \cdot 2) \cos 2v + \ldots$$
$$+ R(s \cdot 1) \sin v + R(s \cdot 2) \sin 2v + \ldots$$

gebracht, wo die Koefficienten R, nach Potenzen von g, h etc. entwickelt, somit für jedes α tabulirt sind.

II.

Die zweite Methode zum Tabuliren der Störungen der kleinen Planeten werde ich nur kurz skizziren.

Dieselbe beruht wesentlich auf die Einführung des Gyldén'schen diskontinuirlichen Argumentes, und zwar vor der Integration der Differentialgleichungen.

---

1) Smithsonian contributions to knowledge Vol. IX.

2) Siehe Bulletin Astronomique Jan. 1896, wo der Zusammenhang zwischen diesen Koefficienten von Radau auseinandergesetzt worden ist.

Erinnern wir kurz an die Eigenschaften des von Gyldén eingeführten Argumentes.[1])

Die Störungsfunktion und ihre partiellen Ableitungen sind ursprünglich von den Koordinaten des gestörten Körpers so wohl wie von denen des störenden Körpers abhängig. Um die Integration auszuführen, drückt man nun die Koordinaten beider Körper durch eine einzige Veränderliche aus, und zwar gewöhnlich indem man die Ausdrücke in trigonometrische Reihen entwickelt. Diese Reihen schreiten aber nicht nach den Vielfachen eines einzigen Winkels fort, sondern enthalten, wie man sich ausdrückt, zwei „Argumente“. Nennen wir das eine Argument v, so wird das andere μv, wo μ gleich dem Verhältniss zwischen den mittleren Bewegungen der beiden Körper ist. Die erhaltenen Reihen sind also von der Form

$$\sum A_{ij} \frac{\cos}{\sin} (i v - j \mu v).$$

Könnte man jetzt $\cos \mu v$ und $\sin \mu v$ nach den Vielfachen von v entwickeln, würde man die formell viel einfachere Entwickelung

$$\sum B_i \frac{\cos}{\sin} i v$$

erhalten. Solche Reihen von $\frac{\cos}{\sin} \mu v$ sind auch möglich zu erhalten, konvergiren aber so langsam, dass dieselben praktisch unbrauchbar werden. Gyldén hat nun gezeigt, wie man durch einen Kunstgriff Reihen der gewünschten Art erhalten kann, die gut konvergent sind, welche aber für jeden halben Umlauf neue Koefficienten bekommen. Man erhält nämlich

$$(12) \quad . \; . \; e^{\sqrt{-1}\,\mu v} = e^{\sqrt{-1}\, m \mu \pi} \sum (-1)^{m n} \sigma_n \, e^{n \sqrt{-1}\, v},$$

---

[1]) Siehe Gyldén: „Grunddragen af en method för beräkning af absoluta störingar“, Bih. till. K. Vet. Akademins Handlinger, Bd. 2, und Charlier: „Ueber die allgemeinen Jupiterstörungen des Planeten 17 Thetis“ K. V. Akademins Handlinger Bd. 22.

wo m eine ganze Zahl ist, so gewählt, dass

$$-\frac{\pi}{2} \leq v - m\pi \leq \frac{\pi}{2}$$

und σ_n bestimmte Zahlen bezeichnet.

Die Koefficienten in der Summe rechter Seite sind nun[1]) für alle geraden Werthe von m gleich und ebenso für alle ungeraden, und folglich hat man praktisch nur zwei verschiedene Entwickelungen von $\frac{\cos}{\sin}\mu v$. Diese enthalten ausserdem den Winkel $m\mu\pi$, der für jeden halben Umlauf den Werth ändert, und dieser Winkel ist das Gyldén'sche diskontinuirliche Argument. Wir nennen es X_m[2]), so dass

$$X_m = m\mu\pi.$$

Führt man dieses hinein, so wird nun unsere Reihe die Form

$$(13) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \sum B_i \frac{\cos}{\sin} iv$$

bekommen, wo aber jetzt B_i von dem Argument X_m abhängt und somit für jeden halben Umlauf den Werth ändert. Man erhält

$$(14) \quad .\ . \quad B_i = b_0 + b_1 \cos X_m + b_2 \cos 2X_m + \ldots \\ + c_1 \sin X_m + c_2 \sin 2X_m + \ldots,$$

wo die b und c zwei Werthe haben, den einen für gerade m, den anderen für ungerade.

Nun kann man das Argument X_m entweder vor oder nach der Integration einführen. In der citirten Abhandlung habe ich bei der Berechnung der Thetis-Störungen X_m nach der Integration eingeführt, und es ist offenbar, dass man auch so Verschiedenes gewinnt. Indessen dürfte es zweifelsohne in den meisten Fällen vortheilhafter sein, schon vor der Integration

---

1) Wie man aus dem Faktor $(-1)^{mn}$ sieht.

2) Bei einer thatsächlichen Rechnung empfiehlt es sich, einen etwas verschiedenen Werth von X_m zu benutzen, nämlich

$$X_m = \mu(m\pi - c) + c'.$$

das Argument X_m einzuführen, besonders wenn man die im Folgenden vorgeschlagene Behandlungsweise benutzt. Wir nehmen der Einfachheit halber an, dass es sich um die Integration einer linearen Differentialgleichung ersten Grades (z. B. für ein oskulirendes Element) handelt, und dass X schon eingeführt worden ist, so dass die zu integrirende Gleichung lautet:

$$(15) \quad \ldots\ldots \quad \frac{dF}{dv} = \sum B_i \cos i v,$$

wo die B_i, wie die Formel (14) zeigt, von X_m abhängt. Die Integration der Gleichung giebt dann:

$$(16) \quad \ldots \quad F = \text{konst.} + \sum \frac{1}{i} B_i \sin i v.$$

Es zeigt sich also, dass kein einziger Koefficient bei der Integration vergrössert wird. Die „kleinen Divisoren" werden aber desswegen nicht ohne Einfluss auf das Integrationsresultat sein. Diese wird nämlich für jeden halben Umlauf geändert, so dass, wenn wir dieselbe C_m nennen und mit c_0 eine absolute Konstante verstehen,

$$C_m = c_0 + c_1 \cos X_m + c_2 \cos 2 X_m + \ldots$$
$$+ s_1 \sin X_m + s_2 \sin 2 X_m + \ldots,$$

und zwar bekommt man zwei solche Reihen, eine für gerade m, die andere für ungerade.

Da nun bei der Integration kein Koefficient B vergrössert wird, und da also diese Koefficienten, die mit der Masse multiplicirt sind, immer klein sind, so wird die Integrationskonstante C_m die Hauptrolle spielen. Man kann sich deswegen mit dieser Integrationskonstante begnügen und die mit den B multiplicirten Glieder vernachlässigen, um so mehr, da sie sämmtlich kurzer Periode sind.

Unter Anwendung desselben Verfahrens wie in der vorigen Abtheilung kann man die Koefficienten c_i und s_i nach den Potenzen von $g\ h$ etc. entwickeln und die Koefficienten in Tafeln bringen. Man würde somit analytische Ausdrücke für die Integrationskonstanten erhalten, welche die Werthe der Elemente für jeden halben Umlauf angeben, übrigens aber konstant bleiben. Es ist einleuchtend, dass diese Ausdrücke in den meisten Fällen vollständig hinreichend wären.

Wir haben im Vorhergehenden das sekulare Glied

$$B_0 v$$

ausser Acht gelassen. Dasselbe wird berücksichtigt einfach indem man setzt $v = m\pi$, wo wir aber zu berücksichtigen haben, dass auch B_0 von m abhängig ist.

Zuletzt bemerke ich, dass das Einführen von X_m vielleicht am bequemsten geschieht mit Anschluss an der in der vorigen Abtheilung ausgeführten Entwickelung und zwar indem man zuerst die Entwickelung von

$$\frac{1}{\Delta^s}$$

nach der Vielfachen von X_m studiert und in Tafeln bringt.

log a	0.33	0.34	0.35	0.36	0.37	0.38	0.39	0.40	0.41	0.42	0.43	0.44	0.45	0.46	0.47	0.48	0.49	0.50	0.51	0.52	0.53	0.54	
log α	9.614	9.624	9.634	9.644	9.654	9.664	9.674	9.684	9.694	9.704	9.714	9.724	9.734	9.744	9.754	9.764	9.774	9.784	9.794	9.804	9.814	9.824	
n	1135"	1096"	1059"	1023"	989"	955"	923"	891"	861"	832"	803"	776"	750"	724"	700"	676"	653"	631"	610"	589"	569"	550"	
log μ	0.579	0.564	0.549	0.534	0.519	0.504	0.489	0.474	0.459	0.444	0.429	0.414	0.399	0.384	0.369	0.354	0.339	0.324	0.309	0.294	0.279	0.264	
	Nr. i φ	Nr. i φ	Nr. i φ	Nr. i φ	Nr. i φ	Nr. i φ	Nr. i φ	Nr. i φ	Nr. i φ	Nr. i φ	Nr. i φ	Nr. i φ	Nr. i φ	Nr. i φ	Nr. i φ	Nr. i φ	Nr. i φ	Nr. i φ	Nr. i φ	Nr. i φ	Nr. i φ	Nr. i φ	Nr. i φ
	149 1° 4°	8 6° 9°	40 4° 3°	12 8° 13°	4 7° 5°	6 15° 12°	17 6° 8°	29 6° 4°	5 5° 11°	3 13° 15°	36 19° 17°	1 11° 4°	33 2° 20°	16 3° 8°	35 8° 13°	95 13° 9°	10 4° 7°	92 10° 6°		168 5° 4°	65 3° 6°	87 11° 5°	
	244 3 8	43 3 10	72 5 7	18 10 13	7 5 13	11 5 6	178 2 3	46 2 10	13 17 5	15 12 11	38 7 9	2 35 14	47 5 8	22 14 6	61 18 10	96 16 8	24 1 8	94 8 5			76 2 10	107 10 4	
	281 5 8	228 3 14	136 10 5	80 9 12	9 6 7	19 2 9	198 9 13	89 16 11	14 9 9	26 4 5	45 7 5	28 9 9	81 8 12	155 14 15	69 8 10	100 6 10	31 26 13	106 5 10			121 8 8	175 4 20	
		254 5 7	207 4 2	261 4 5	27 2 10	20 1 8	248 4 4	134 12 7	23 10 14	34 5 6	54 12 12	39 10 6	129 12 12	191 11 5	117 15 2	133 7 8	48 7 4	108 4 6			225 21 15		
		270 2 9	298 6 5	282 9 5	30 2 7	21 3 9		170 14 4	32 5 5	37 3 10	58 5 2	41 16 15	158 1 3	208 2 1	150 2 7	156 7 15	49 3 13	122 2 3			229 2 9		log a = 0.59
		291 2 5		290 22 15	51 10 4	25 22 15		232 6 10	53 5 12	50 3 17	59 9 7	55 7 8	167 2 2	231 5 9	162 6 11	202 9 6	52 7 7	154 21 5			260 6 6		153 8° 9°
		296 2 9			60 4 11	42 9 13		262 8 12	56 8 14	61 1 7	93 9 8	68 8 11	174 12 8	238 12 5	179 8 6	211 4 9	57 15 7	176 23 10					190 6 9
					63 6 7	44 4 9		292 15 2	70 12 10	66 3 10	103 5 5	71 23 10	188 11 13	263 1 4	221 11 6	241 6 6	62 2 10	184 1 3					
					84 9 14	67 6 11			78 9 12	73 2 2	109 8 17	74 4 14	195 7 2	277 1 5	239 6 13	274 4 7	86 5 13	199 15 10					
					105 22 10	79 5 11			91 2 6	75 5 18	110 6 5	82 3 13	217 10 18	280 7 7	256 13 4	283 8 9	90 2 9	286 18 1					
					113 5 5	83 5 5			101 10 8	77 2 8	123 6 7	88 5 9	235 9 4	307 6 8	271 4 6	285 17 12	104 3 8	297 8 8					
					115 12 11	112 3 7			111 5 6	85 12 11	125 5 4	99 14 14	242 11 7	311 3 1			120 7 3	300 1 2					
					161 9 8	118 8 9			119 6 5	97 12 15	128 6 7	116 4 8	243 1 2				130 23 12						
					163 5 11	126 3 6			124 3 4	98 16 11	140 3 13	127 8 4	289 7 12				137 13 13						
					169 6 8	131 5 4			132 25 23	102 5 15	146 13 4	139 11 10	293 16 6				147 2 2						
					172 10 7	135 2 12			151 6 2	114 5 8	160 4 4	143 12 4					152 12 4						log a = 0.62
					186 13 9	138 3 9			157 12 12	141 12 12	173 14 12	148 25 11					159 6 6						279 2° 5°
					219 11 13	142 2 8			193 12 17	144 5 13	180 1 10	177 1 13					165 11 4						
					220 8 15	182 2 11			194 18 14	145 13 8	185 23 7	183 26 20					171 3 7						
					230 9 3	189 5 2			214 3 2	164 24 20	187 11 14	205 11 2					181 19 13						
					234 15 14	192 7 14			258 14 12	166 12 12	197 9 9	215 2 2					196 7 1						
					249 10 12	265 26 15			269 5 12	201 6 10	200 7 8	216 13 15					209 7 4						
					273 20 9	299 2 4				204 8 10	203 3 4	236 8 11					212 4 7						
					284 8 13	302 3 7				218 15 7	206 4 2	237 10 4					222 2 8						
					287 10 1	304 16 13				224 6 2	210 5 7	264 10 8					223 2 7						
					306 7 9					233 8 6	213 7 8	266 13 9					227 9 12						
										240 2 12	226 16 12	267 6 6					245 5 11						
										253 7 15	246 16 6	272 4 2					250 13 7						
										309 4 5	247 25 14	275 5 9					251 10 5						
											255 10 5	278 8 8					252 10 5						
											301 5 3	288 4 12					257 4 7						
											308 4 2	295 3 10					259 11 7						
												310 3 7					268 2 8						
																	276 22 4						
																	294 6 15						
																	303 7 4						
																	305 4 11						