Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Classe

der

k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.

Band XXVI. Jahrgang 1896.

München.
Verlag der K. Akademie.
1897.

In Commission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).

Ueber das Newton'sche Gravitationsgesetz.

Von **H. Seeliger.**

(Eingelaufen 7. November.)

Vor etwa zwei Jahren[1]) habe ich auf Schwierigkeiten aufmerksam gemacht, welche auftreten, wenn man die Gültigkeit des Newton'schen Gravitationsgesetzes auf unermesslich grosse Räume ausdehnt. Die angestellten Ueberlegungen ergaben die Nothwendigkeit, zwischen den beiden Annahmen eine Wahl zu treffen: 1) die Gesammtmasse des Weltalls ist unendlich gross, dann kann das Newton'sche Gesetz nicht als mathematisch genauer Ausdruck für die herrschenden Anziehungskräfte gelten, 2) das Newton'sche Gesetz ist absolut genau, dann können nicht unendlich grosse Räume des Weltalls mit Masse von endlicher Dichtigkeit erfüllt sein. Da ich für die zweite Annahme irgend welche in's Gewicht fallende Gründe nicht finden kann, habe ich mich a. a. O. für die erste Annahme entschieden. Seitdem ist mir bekannt geworden, dass Carl Neumann[2]) schon früher auf Schwierigkeiten ähnlicher Art aufmerksam gemacht hat, die sich als specielle Fälle der von mir vorgebrachten Argumente darstellen dürften. Die Zustimmung eines so hervorragenden Forschers und auch der Umstand, dass sich die von mir angestellten Ueberlegungen zwar auch in anderer Form aussprechen lassen, dass hierdurch aber ihr wesentlicher Inhalt nicht sich ändert, könnte es überflüssig erscheinen lassen, auf diesen Gegenstand zurückzukommen. Andererseits scheint mir

[1]) Ueber das Newton'sche Gravitationsgesetz. Astron. Nachr. No. 3273.

[2]) Vergl. Carl Neumann, Allgemeine Untersuchungen über das Newton'sche Princip etc. Leipzig 1896, S. 1.

aber die ganze Frage von einiger Tragweite für die gesammte theoretische Astronomie zu sein und deshalb eine eingehende Beleuchtung zu verdienen. Auch kann ich leider nicht bezweifeln, dass meine früheren Bemerkungen offenbaren Missverständnissen ausgesetzt gewesen sind, wie ich u. A. aus dem Zusammenhang schliessen muss, in dem mein Aufsatz citirt worden ist. Aus diesen Gründen scheint es mir nicht unnütz zu sein, die angeregten Fragen noch einmal zu besprechen. Es soll dies im ersten Theil vorliegender Abhandlung geschehen.

Das vorliegende Problem hat mit einem andern sehr bekannten eine gewisse Aehnlichkeit. Cheseaux und später Olbers stellten sich die Frage, wie es komme, dass die mittlere Flächenhelligkeit des Himmels eine sehr geringe ist, während sie der Sonnenhelligkeit vergleichbar sein sollte, wenn man die Anzahl der leuchtenden Weltkörper unbegrenzt gross annimmt. Es schien mir nun um so wünschenswerther, auch dieses Problem eingehender, als es früher geschehen ist, zu besprechen, als man hierdurch zu der Einsicht gelangt, dass die Schlussfolgerungen von Olbers keineswegs einwurfsfrei sind. Olbers erklärt das anscheinende Paradoxon bekanntlich durch die Extinction des Lichtes im Weltraume. Die Zulässigkeit dieser Annahme kann natürlich nicht bestritten werden; ihre Nothwendigkeit aber folgt keineswegs aus einer vorurtheilsfreien Betrachtung der Frage.

I.

Für die Berechnung der Anziehung, welche die im Universum vorhandenen Massen auf irgend einen Punkt ausüben, wird man mit Vortheil diese Massen durch eine continuirliche Massenvertheilung ersetzen, welche beliebig grosse zusammenhängende Raumtheile ausfüllt. Dies kann in der einfachsten Weise geschehen, wenn man die einzelnen Weltkörper als Kugeln ansieht, deren Dichtigkeit in concentrischen Schichten angeordnet ist. Die Anziehung einer solchen Kugel auf einen ausserhalb gelegenen Punkt wird nicht geändert, wenn man ihre Masse in concentrisch angeordnete Kugelschichten von beliebig grossem Durchmesser auseinanderzieht, solange nur der angezogene Punkt ausserhalb aller dieser Schichten bleibt. Mit den einzelnen Theilen dieser Schichten kann man aber ähnlich verfahren und so ergiebt sich, dass man auf unendlich viele Arten eine continuirliche Massenvertheilung erhält, die einen ausgedehnten Raum ausfüllt und die gleiche Anziehung auf den betrachteten Punkt ausübt, wie der ursprüngliche Weltkörper. Hat der Raum eine endliche Ausdehnung, so hat auch die erhaltene Massendichtigkeit überall einen endlichen Werth; man kann aber, wie leicht zu sehen, stets die Substitution so ausführen, dass die Dichtigkeit eine abtheilungsweise stetige Function der Raumcoordinaten ist. Integrationen über solche Massenvertheilungen bieten aber weder Schwierigkeiten noch Bedenken dar.

Thatsächlich sind freilich die Himmelskörper nicht concentrisch geschichtete Kugeln; sie sind es aber sehr nahe, so dass die erwähnte Substitution die vorhandenen Anziehungskräfte bis auf einen sehr kleinen Procentsatz genau zum Ausdruck bringen wird und dies genügt vollkommen, weil es sich im Folgenden nur darum handeln wird, das Unendlichwerden oder die Unbestimmtheit der Ausdrücke für die Anziehungskräfte zu besprechen. Im Uebrigen lässt sich auch ganz streng die Einführung der continuirlichen Massenvertheilung rechtfertigen.

Die Anziehung also, welche irgend ein Punkt A thatsächlich erfährt, wird dieselbe sein, wie die, welche ein überall mit einer Masse von der Dichtigkeit δ belegter Raum auf ihn ausübt. Der Raum P wird im Inneren einen von Masse freien Hohlraum enthalten, in welchem sich A befindet und seine äussere Begrenzung wird alle vorhandenen Weltkörper umschliessen. Innerhalb P, der durch die beiden Radienvectoren R_0 und R_1 bestimmt ist, kann δ als abtheilungsweise stetig verlaufend und überall endlich und von Null verschieden angenommen werden. Im Uebrigen kann auch in endlichen Theilen von P, δ Null sein, ohne die weiteren Schlüsse ungültig zu machen, doch ist es wohl kaum nöthig hierauf Rücksicht zu nehmen.

In der Nähe von A und zwar in der Entfernung $AO = a$ mag der Anfang eines rechtwinkligen Coordinatensystems liegen. Es seien ϱ und r die Entfernungen eines Massenelementes dm von A bezw. O, γ der Winkel $dm\,OA$, φ der Winkel zwischen der Ebene $dm\,OA$ und einer durch a gehenden festen Ebene. Ist dann das Potential der Anziehungskräfte zwischen dm und A allgemein durch

$$f(\varrho)$$

gegeben, so wird das Gesammtpotential der auf A ausgeübten Anziehung:

$$V = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\gamma\, d\gamma \int_{R_0}^{R_1} \delta\, f(\varrho) \cdot r^2\, dr$$

Hieraus ergeben sich leicht die Grössen $X = \frac{\partial V}{\partial a}$ und $Z = \frac{\partial^2 V}{\partial a^2}$ für $a = 0$. Führt man zur Bequemlichkeit die Laplace-Legendre'schen Functionen:

$$\left.\begin{aligned}
&P^1 = P^1(\cos\gamma) = \cos\gamma; \quad P^2 = \frac{3}{2}\cos^2\gamma - \frac{1}{2}\\
&\text{ein, so ist:}\\
&X = -\int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int_0^{\pi} P^1 \sin\gamma\, d\gamma \int_{R_0}^{R_1} \delta f'(\varrho)\, r^2 \cdot dr\\
&Z = \frac{2}{3}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\gamma\, d\gamma \int_{R_0}^{R_1} \delta r^2 \delta r \left\{\frac{1}{r}\cdot f'(r) + \frac{1}{2} f''(r) + P^2\left[f''(r) - \frac{1}{r} f'(r)\right]\right\}
\end{aligned}\right\} \text{I}$$

X ist die Beschleunigung, welche der Punkt O in der Richtung a erfährt. Die Grösse Z habe ich a. a. O. die Zerrung genannt, denn $Z \cdot \Delta a$ ist die Beschleunigung, mit welcher sich zwei in der sehr kleinen gegenseitigen Entfernung Δa befindlichen Punkte von einander zu entfernen streben. Es soll gleich der specielle Fall, in welchem

$$f(r) = \frac{1}{r^{1+\alpha}}$$

ist, angemerkt werden. Für diesen ist:

$$\left.\begin{aligned}
V_1 &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\gamma \, d\gamma \int_{R_0}^{R_1} \delta \cdot r^{1-a} \cdot dr \\
X_1 &= (1+a) \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} P^1 \cdot \sin\gamma \, d\gamma \int_{R_0}^{R_1} \delta \cdot \frac{dr}{r^a} \\
Z_1 &= \frac{1+a}{3} \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} [a + 2(3+a) \cdot P^2] \sin\gamma \, d\gamma \int_{R_0}^{R_1} \delta \cdot \frac{dr}{r^{1+a}}
\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Für das Newton'sche Gesetz ist $a = 0$, also:

$$\left.\begin{aligned}
V_2 &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\gamma \, d\gamma \int_{R_0}^{R_1} \delta \cdot r \cdot dr \\
X_2 &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} P^1 \cdot \sin\gamma \, d\gamma \int_{R_0}^{R_1} \delta \cdot dr \\
Z_2 &= 2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} P^2 \cdot \sin\gamma \, d\gamma \int_{R_0}^{R_1} \delta \cdot \frac{dr}{r}
\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Diese Ausdrücke sollen zunächst näher betrachtet werden. R_0 ist eine gewisse endliche Grösse, R_1 dagegen wird immer grösser und grösser, je mehr wir von dem Universum zu umfassen suchen. Es wächst also über alle Grenzen und wird schliesslich schlechtweg unendlich. Dann aber können die in Bezug auf r genommenen Integrale in (2) sinnlos werden, indem sie vollkommen unbestimmte Unendlichkeiten darstellen. Es tritt dies ein, wenn δ innerhalb unendlich grosser Strecken endliche und von Null verschiedene Werthe hat. In diesem Falle sind aber im Allgemeinen auch V_2, X_2 und Z_2 sinnlos, die den Punkt A afficirenden Kräfte und die Beschaffenheit der Materie in ihm, welche durch die Zerrung mitbestimmt wird, sind durch sinnlose, völlig unbestimmte Ausdrücke gegeben. Sie sind also für uns ebenso unerkennbar, wie die Grenzen des unendlich ausgedehnten Universums uns unfassbar sind. Etwas anders gestaltet sich die Sachlage, wenn man R_1 in vorgeschriebener Weise von γ und φ abhängen lässt, worin der einzige Weg besteht, wie man durch fortwährendes Vorwärtsschreiten sich der Vorstellung eines unendlichen Raumes nähern kann. Man lässt dann einen Raum mit bestimmter Begrenzung dadurch in's Unendliche wachsen, dass man diese Begrenzung nach ganz bestimmten Gesetzen sich unaufhörlich ausdehnen lässt. Man kann z. B. eine Kugel annehmen und ihren Radius wachsen lassen oder ein Ellipsoid zu Grunde legen und zu den immer grösser werdenden confocalen Ellipsoiden übergehen. Welche Fläche wir zu Grunde legen und nach welchem Gesetze wir sie wachsen lassen, ist offenbar unserer Willkür anheimgegeben, d. h. R_1 ist eine ganz beliebige Function von γ und φ, die mit wachsendem r auf beliebigem Wege unendlich grosse Werthe annimmt. Wenn dann δ durch bekannte Functionen dargestellt ist, kann man R_1 immer so wählen, dass nach Belieben X_2 und Z_2 einen bestimmten Sinn behält und bestimmte Werthe annimmt oder nicht. Man kann das erstere z. B. leicht erreichen, wenn die Integrale

$$\int_{R_0}^{R_1} \delta \cdot dr \qquad \text{und} \qquad \int_{R_0}^{R_1} \delta \cdot \frac{dr}{r}$$

nach Kugelfunctionen entwickelbar sind und wenn die Kugelfunctionen erster Ordnung im ersten Integrale und die Kugelfunctionen zweiter Ordnung im zweiten Integrale endliche Coefficienten haben. Als einfachstes Beispiel kann die Annahme aufgefasst werden: $\delta =$ Const. und $R_1 =$ Radius einer immer grösser werdenden Kugel. Dann sind X_2 und Z_2 stets gleich Null, wie auch aus der Theorie der Anziehung homogener Kugeln bekannt ist. Die Anzahl solcher Annahmen ist aber offenbar unendlich klein gegenüber der aller möglichen und wie nachdrücklich hervorzuheben ist, gleich berechtigten. Man kann also sagen: Wenn δ als Function des Ortes gegeben ist, kann man im Allgemeinen R_1 als Function von γ und φ so wählen, dass V_2, X_2 und Z_2 jede beliebige Grösse annehmen und umgekehrt bei jedem vorgeschriebenen R_1 kann man δ so wählen, dass die genannten Grössen wiederum beliebige Werthe erlangen, also z. B. unendlich werden.

Wir hatten soeben beispielsweise $\delta =$ Const. angenommen. Ist dann R_1 der Radius einer um A als Centrum gedachten Kugel, so ist, wie bereits erwähnt, $X_2 = Z_2 = 0$ und diese Grössen bleiben jedenfalls endlich, wenn R_0 irgend eine beliebige Fläche definirt, da diese jedenfalls im Endlichen verläuft. Nimmt man aber das Centrum der unendlich grossen Kugel in der Entfernung c von A, so wird der Punkt nach dem Centrum mit der Kraft $\frac{4}{3}\pi\,\delta \cdot c$ angezogen, während die Zerrung in derselben Richtung gleich einer stets endlichen Constanten multiplicirt mit δ ist. Ist nun c beliebig gross, schliesslich unendlich gross, so wird also auch die Beschleunigung grösser als jede noch so grosse Zahl und ihre Richtung ist ganz willkürlich unbestimmt, da man das Centrum der Kugel in ganz beliebiger Richtung gegen A legen kann. Dieses Beispiel ist dasjenige, welches Carl Neumann anführt. Er bezeichnet dann mit Recht die dargelegte Consequenz des Newton'schen Gesetzes als absurd und schliesst daraus, dass das Anziehungsgesetz bei homogener Massenvertheilung auf Widersprüche führt. Es sei gestattet für constante δ noch ein zweites Beispiel vorzuführen. Es ist nach (2)

$$X_2 = \delta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} P^1(\cos\gamma)\sin\gamma\,(R_1 - R_0)\,d\gamma$$

$$Z_2 = 2\,\delta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} P^2(\cos\gamma)\sin\gamma\,\log\left(\frac{R_1}{R_0}\right)d\gamma$$

Nimmt man nun für das Grösserwerden von R an, dass m eine gleichmässig ins Unendliche gehende Grösse sei und a eine Zahl, die grösser als $\frac{1}{2}$ ist, und setzt man

$$\log\frac{R_1}{R_0} = a\,m + m\,P^2(\cos\gamma)$$

so wird:

$$X_2 = 2\,\pi\,\delta\,R_0\,e^{\alpha m} \cdot \int_0^\pi \sin\gamma\,\cos\gamma \cdot e^{m\left(\frac{3}{2}\cos^2\gamma - \frac{1}{2}\right)} \cdot d\gamma = 0$$

$$Z_2 = \frac{8\,\pi\,\delta}{5}\,m$$

d. h. also es bleibt stets $X_2 = 0$ und die Zerrung wird mit m unbegrenzt gross.

Ebenso leicht liessen sich andere Beispiele wählen, in denen δ eine andere Function des Ortes ist. Es unterliegt aber keinem Zweifel, dass die aufgedeckten Widersprüche für jede mögliche und denkbare Massenvertheilung bestehen bleiben, wenn nur δ die stets hervorgehobene Eigenschaft hat, dass es in unendlich grossen Raumtheilen endliche von Null verschiedene Werthe besitzt.

Diese unlösbaren Widersprüche lassen sich natürlich nach verschiedenen Seiten hin beleuchten und in anderer Form darstellen. Ich will dies hier nicht thun, vielmehr nur eine Folgerung ziehen, die sich auf die Grundsätze der Potentialtheorie stützt.

Das Newton'sche Potential V erfüllt im ganzen Raume die Bedingung:

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\,4\,\pi\,\delta \tag{3}$$

Wir denken uns, entsprechend der gewöhnlichen Vorstellung, im Weltall lauter isolirte keineswegs homogene Weltkörper m_1, m_2 ... m_n mit den Dichtigkeiten δ_1, δ_2 .... Indessen sollen die δ gewisse Bedingungen der Stetigkeit erfüllen und auch die Oberflächen der Weltkörper dürfen bestimmte Singularitäten nicht besitzen, da (3) und auch der Green'sche Satz zur Anwendung kommen soll. Es ist also $\Delta V = -\,4\,\pi\,\delta_1$ innerhalb m_1 etc. und ausserhalb aller Massen ist $\Delta V = 0$. Nennt man $d\tau_1$, $d\tau_2$ ... die Volumelemente, ds_1, ds_2 ... die Oberflächenelemente, n_1, n_2 ... die nach innen gerichteten Normalen der Oberflächen der Weltkörper $m_1, m_2 \ldots$, so giebt der Green'sche Satz

$$\int \Delta V \cdot d\tau_1 = -\int \frac{\partial V}{\partial n_1} \cdot ds_1 = -4\pi \cdot \int \delta\, d\tau_1 = -4\pi m_1$$

$$\int \Delta V \cdot d\tau_2 = -\int \frac{\partial V}{\partial n_2}\, ds_2 = -4\pi \int \delta\, d\tau_2 = -4\pi m_2$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

Nehmen wir eine geschlossene, sonst willkürliche Fläche F, welche die Massen $m_1, m_2, \ldots m_n$ umschliesst, so ist

$$4\pi(m_1 + m_2 + \ldots + m_n) = \int \frac{\partial V}{\partial n_1}\, ds_1 + \ldots + \int \frac{\partial V}{\partial n_n}\, ds_n$$

Wendet man denselben Green'schen Satz auf den Raum an, der durch F und die Oberflächen der Massen $m_1 \ldots m_n$ begrenzt ist, innerhalb dessen also $\Delta V = 0$ ist, so kann man die letzte Gleichung auch schreiben:

$$\int \frac{\partial V}{\partial n}\, ds = 4\pi(m_1 + \ldots + m_n)$$

Nennt man $M\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)$ den arithmetischen Mittelwerth aller $\frac{\partial V}{\partial n}$ längs der Oberfläche S von F, wo also $\int ds = S$ ist, dann erhält man:

$$M\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right) = \frac{4\pi(m_1 + \ldots + m_n)}{S}$$

Denkt man sich sämmtliche Massen innerhalb des Raumes R, welchen F umschliesst, und dessen Volumen R sei, gleichmässig vertheilt, so erhält man die gleichförmige Dichtigkeit δ_0, wo

$$R\,\delta_0 = m_1 + \ldots + m_n$$

Man kann dann die zuletzt gefundene Gleichung schreiben:

$$M\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right) = 4\pi\,\delta_0 \cdot \frac{R}{S}$$

Die rechte Seite kann nun durch Vergrösserung von R beliebig gross gemacht werden. Es müssen also unter den einzelnen $\frac{\partial V}{\partial n}$ unbegrenzt grosse vorkommen. Nach der Potentialtheorie müssen demzufolge im Universum unbegrenzt (unendlich) grosse Beschleunigungen vorkommen und zwar bei jeder denkbaren Massenvertheilung. Das sind also Bewegungen, die mit endlicher Geschwindigkeit beginnend in endlicher Zeit zu unendlich grossen Geschwindigkeiten führen, was an sich schon eine absolute Unzulässigkeit enthält, wenn man nicht die ganze Mechanik in Frage stellen will.

Solche Zweifel an der absoluten Richtigkeit des Newton'schen Gesetzes, wie die vorgebrachten, werden noch immer, scheint es, mit Misstrauen aufgenommen, obwohl es kaum möglich sein dürfte, etwas Stichhaltiges gegen sie vorzubringen. Der Grund hierfür mag darin liegen, dass man zum Theil infolge der ungeheueren Erfolge der Newton'schen Formel in der Astronomie sich nicht immer genügend klar macht, dass diese Formel nichts anderes ist und sein kann, als ein rein empirisches Gesetz. Dass es bei einem sehr hohen Grad der Annäherung den thatsächlichen Verhältnissen entspricht, daran wird gewiss Niemand zu zweifeln wagen. Mehr kann aber die Erfahrung nicht aussagen und sie hat bis jetzt auch dies keineswegs mit der Sicherheit gethan, wie vielfach geglaubt wird.

Die im Vorhergehenden zur Sprache gebrachten Ungereimtheiten verschwinden durch beliebig kleine aber endliche Correctionen am Newton'schen Gesetz, die erst in überaus grossen Räumen merkbar zu werden brauchen, und hieraus folgt schon, dass die Forderung dieser Correctionen keineswegs durch die Erfahrungen innerhalb so kleiner Räume, wie das Planetensystem einnimmt, legitimirt zu werden braucht, da noch innerhalb sehr viel grösserer Räume das Newton'sche Gesetz den denkbar genauesten Beobachtungen genügen könnte. Ueber das Planetensystem hinaus reichen überhaupt die Erfahrungen nicht aus, um selbst recht rohe Abweichungen von dem genannten Gesetz mit Sicherheit constatiren zu können.

Es ist, wenn auch wohl wahrscheinlich, doch keineswegs selbstverständlich, dass die Anziehungskräfte an allen Orten des Weltalls denselben Gesetzen folgen. Man kann also nur mit einiger Berechtigung vermuthen, dass z. B. die Bewegung der Doppelsterne, ebenso wie die der Planeten durch das Newton'sche Gesetz geregelt wird. Die Genauigkeit aber, mit welcher die bekannten Doppelsternbahnen diese Vermuthung bestätigt haben, ist eine ziemlich geringe. Wir können, wie ich zu wiederholten Malen nachdrücklich ausgesprochen habe, nur sagen, dass sich in den genannten Systemen die Newton'sche Formel im Grossen und Ganzen bewährt hat; über etwaige kleine Correctionsglieder, die indessen doch innerhalb unseres Planetensystemes zu den unleidlichsten Missstimmungen zwischen Theorie und Beobachtung Veranlassung geben würden, können die verhältnissmässig wenig genauen Doppelsternmessungen keine Aussage machen. Wie es sich nun gar mit der Geltung des Newton'schen Gesetzes, als genauer Formel, durch die weiten Fixsternräume hindurch verhält, darüber liegt bis jetzt auch nicht die geringste Erfahrung vor.

Man kann also aus der Erfahrung nichts ableiten, was die Unzulässigkeit einer Correction des Newton'schen Gesetzes darthäte, wenn diese innerhalb unseres Planetensystems nur eine gewisse Grösse nicht übersteigt. Fast hat es aber den Anschein, als ob man von mancher Seite dem Gravitationsgesetz die Eigenschaft eines aprioristischen Erkenntnissresultates zuschreiben möchte. Auch ist die Newton'sche Formel als mit unserer Raumanschauung zusammenhängend, ja aus ihr folgend, bezeichnet worden. Solche Auffassungen sind bei vorurtheilsfreier Betrachtung einfach unverständlich. Thatsächlich hat die Form eines Kraftgesetzes gar keine andere Bedingung zu erfüllen, als eine genügend genaue, also in letzter Instanz angenäherte, Darstellung der beobachteten Bewegungen zu sein. Diese Zusammenfassung der Thatsachen in eine Formel erleidet nur die selbstverständliche Einschränkung, dass sich aus ihr keine Ungereimtheiten ergeben dürfen.

Da also das Newton'sche Gesetz nichts mehr ist, als eine rein empirisch abgeleitete Formel, die innerhalb engbegrenzter Räume einen hohen Grad von Annäherung an die Beobachtungen giebt, kann jede andere Formel, die dasselbe leistet, an seine Stelle gesetzt werden, insofern sich dieser Ersatz durch andere wissenschaftliche Rücksichten empfiehlt.

Die obigen Auseinandersetzungen haben ergeben, dass eine Correction des Newton'schen Gesetzes in jedem Falle schon deshalb wünschenswerth ist, weil man hierdurch misslichen metaphysischen Betrachtungen über die Endlichkeit oder Unendlichkeit der Materie entrückt ist, dass diese Correction aber absolut nothwendig erscheint, wenn man die Annahme macht, die das Universum erfüllende Masse sei unbegrenzt gross. Diese letztere Meinung aber ist für Viele selbstverständlich, für Andere freilich nicht. Sie lässt sich aber meines Erachtens gegenwärtig ebenso wenig wie in Zukunft durch Beobachtungen zur Entscheidung bringen, wie manchmal versucht worden ist. Schon die an sich durchaus plausible Annahme einer Absorption des Lichtes im Weltraum vernichtet die Aussicht über gewisse begrenzte Entfernungen hinaus leuchtende Weltkörper wahrnehmen zu können, und falls die Fixsternräume auch von vielen nicht leuchtenden Körpern erfüllt sind, werden die perspectivische Verdeckungen, ferner aber auch die Absorptionen in den ausgedehnten Nebelgebilden, die, wie neuere Beobachtungen zeigen, uns allenthalben zu umgeben scheinen, den Raum, der unseren optischen Hülfsmitteln erreichbar ist, überaus beschränken. Von einem Hineinsehen in den „unendlichen Raum“ kann aus allen diesen Gründen keine Rede sein. Zudem handelt es sich in den obigen Darlegungen gar nicht allein um jene Massen, die zufällig sich in dem Zustande befinden, welcher die Aussendung von Strahlen innerhalb eng begrenzter Wellenlängen zulässt. Das Leuchten ist nicht Attribut der kosmischen Massen, wie eigentlich selbstverständlich, aber auch durch die Erfahrung nachgewiesen ist, wohl aber müssen wir die Gravitation als ein solches ansehen, wenn wir nicht von vornherein ihre universelle Gültigkeit leugnen wollen. Auf diesen Punkt soll im zweiten Abschnitte näher eingegangen werden.

Die Ungereimtheiten, zu welchen das Newton'sche Gesetz führte, verschwinden für ein Potentialgesetz, für das die in I. vorkommenden Integrale einen Sinn behalten, auch wenn δ überall im Raume endliche Werthe hat. Solche Gesetze giebt es selbstverständlich unendlich viele und man kann demnach aus den angestellten Ueberlegungen nicht den geringsten Schluss auf die Correctionen, welche das Newton'sche Gesetz zu erhalten hat, ziehen. Carl Neumann hat auf Grund der Fernwirkungstheorie die Sachlage in Bezug auf die electrostatischen Kräfte untersucht und wenn auch die gewonnenen Resultate nicht ohne Weiteres auf Gravitationserscheinungen anwendbar sind, so wird doch die sonstige Analogie zwischen beiderlei Kräften die fundamentale Untersuchung von Neumann auch für das vorliegende Thema von höchster Bedeutung erscheinen lassen.

Carl Neumann stellt sich a. a. O. das schwierige Problem, jene Kraftgesetze zu finden, welche einen Gleichgewichtszustand der auf beliebigen Conductoren ausgebreiteten electrischen Masse überhaupt zulassen. Er findet, dass solche und zwar eindeutige Gleichgewichtszustände, deren Existenz als durch die Erfahrung erwiesen angesehen wird, stattfinden, wenn das Potential der wirkenden Anziehungs- und Abstossungskräfte durch die Formel gegeben ist:

$$f(r) = \frac{A\, e^{-\lambda_1 r}}{r} + \frac{B\, e^{-\lambda_2 r}}{r} + \dots \tag{4}$$

und hierin die Grössen λ positiv, die A, B, C etc. von einerlei Vorzeichen sind.

Wie man sofort sieht, hebt dieses Potentialgesetz die oben erwähnten Schwierigkeiten auf, sobald die λ endliche, wenn auch noch so kleine Grössen sind, denn die Ausdrücke I stellen jetzt endliche und bestimmte Grössen dar. Als Grenzfall, nämlich wenn durch Annahme unendlich vieler Glieder die rechte Seite von (4) ein gewisses bestimmtes Integral wird, stellt sich das Potentialgesetz dar:

$$f(r) = \frac{A}{r^{1+\lambda}} \tag{5}$$

Dieses Gesetz ist bereits von Green eingehend untersucht und auf electrostatische Aufgaben angewendet worden. Dasselbe kann für die Astronomie nur in Frage kommen, wenn λ ein überaus kleiner echter Bruch ist. Nach Formel (1) beseitigt aber dieses Gesetz nicht die erwähnten Schwierigkeiten, denn V_1 und X_1 werden im Allgemeinen bei endlichen δ durch sinnlose Ausdrücke bestimmt, während allerdings Z_1 einen endlichen Werth erhält. Aus diesem Grunde muss dieses Gesetz als keinen Vortheil vor dem Newton'schen gewährend abgewiesen werden.

Schon nach den Untersuchungen Newton's ist bekannt, dass die Formel (5) säculare Bewegungen der Perihele der Planetenbahnen hervorbringt und es ist deshalb natürlich, dass durch eine passende Wahl von λ die bekannte Anomalie in der Perihelbewegung des Mercur erklärt werden kann. Deshalb hat neuerdings A. Hall[1]) dieses Gesetz in Vorschlag gebracht ($\lambda = 0.000\,00016$) und Newcomb[2]) hat diesen Vorschlag als plausibel erklärt. Nach dem Gesagten kann ich mich dieser Meinung nicht anschliessen.

Ich selbst habe[3]) als Beispiel für ein Fernwirkungsgesetz, welches die besprochenen Einwände hebt, die Formel für die Anziehung zwischen zwei Massen m und m' angeführt

$$\frac{m\,m' \cdot e^{-\lambda r}}{r^2} \tag{6}$$

Es sollte damit, wie ausdrücklich erörtert, kein Vorschlag für eine wirklich an das Newton'sche Gesetz anzubringende Correction gemacht werden. Es war nur ein Beispiel beabsichtigt, das der Analogie zwischen der Ausbreitung des Lichtes und der Gravitation angepasst ist. Diese Formel ist übrigens bereits von Laplace[4]) erwähnt worden, der sie ebenfalls im Anschluss an die Theorie der Ausbreitung des Lichtes in einem absor-

---

1) Astronomic. Journal No. 327.

2) The Elements of the four inner Planets. Washington 1895.

3) Astr. Nachr. No. 3273.

4) Mécanique céleste T. V. Livre XVI, Chap. IV.

birenden Medium aufgestellt hat. Dass für diese Formel die Integrale in I einen Sinn haben, ist leicht zu sehen und bedarf keines näheren Nachweises.

Ob eine der Formeln (4) und (6) geeignet ist, das Newton'sche Gesetz zu ersetzen, darüber kann in dieser Allgemeinheit gegenwärtig eine Entscheidung nicht getroffen werden. Im Sonnensystem hat bisher, bis auf sehr vereinzelte Ausnahmen, das Newton'sche Gesetz ausgereicht, die Bewegungen bis ins kleinste Detail darzustellen. Zu diesen Ausnahmen gehört die bereits erwähnte Anomalie in der Bewegung des Mercurperihels. Die Formeln (4), (5) und (6) geben sämmtlich eine solche Bewegung, deren Betrag sich leicht berechnen lässt. Die Constanten λ in diesen Formeln sind von vornherein als sehr klein anzunehmen. Setzt man noch zur Abkürzung $k^2(1+m) = \mu$, worin k die Gauss'sche Constante, m die Planetenmasse und 1 die Sonnenmasse bedeutet, so hat man in Formel (4) (Neumann)

$$\mu = A + B + \ldots; \quad \mu\lambda^2 = A\lambda_1^2 + B\lambda_2^2 + \ldots$$

anzunehmen und erhält dann für die im Radiusvector r wirkende Componente der störenden Kraft genügend genau

$$R = \frac{\mu}{2}\lambda^2$$

Die Formel (5) (Green) giebt für R

$$R = \frac{\mu}{r^2}(1 - r^{-\lambda})$$

und schliesslich (6) (Laplace)

$$R = \mu\frac{\lambda}{r}$$

Die Variationen der elliptischen Bahnelemente: e Excentricität, a grosse Halbaxe, χ Länge des Perihels, sind, wenn die wahre Anomalie v an Stelle der Zeit t als unabhängige Variable eingeführt wird:

$$\frac{de}{dv} = \frac{Rr^2 \sin v}{\mu}, \quad \frac{1}{a}\cdot\frac{da}{dv} = \frac{2eRr^2 \sin v}{\mu(1-e^2)}, \quad e\frac{d\chi}{dv} = -\frac{Rr^2 \sin v}{\mu}$$

Säculare Glieder treten nur in χ auf. Eine höchst einfache Rechnung ergiebt, wenn man nur die erste Potenz von e mitnimmt, schliesslich auch $dv = n \cdot \Delta t$ setzt, für die der Zeit Δt entsprechende säculare Aenderung $\Delta\chi$:

$$\text{Neumann:} \qquad \Delta\chi = \frac{\lambda^2 a^2 n}{2} \Delta t = \frac{\lambda^2 \mu}{2} \sqrt{a} \cdot \Delta t$$

$$\text{Green:} \qquad = \frac{\lambda n}{2} \Delta t = \frac{\lambda \mu}{2} \cdot \frac{1}{a^{\frac{3}{2}}} \Delta t$$

$$\text{Laplace:} \qquad = \frac{\lambda a n}{2} \Delta t = \frac{\lambda \mu}{2} \cdot \frac{1}{a^{\frac{1}{2}}} \Delta t$$

Die säcularen Aenderungen des Perihels sind also für die einzelnen Planeten nach

Neumann's Formel proportional mit $\sqrt{a}$

Green's . . . . $\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^3$

Laplace's . . . . $\frac{1}{\sqrt{a}}$

Setzt man $\Delta\chi$ für Mercur zu 40″ im Jahrhundert an, welches der unerklärte Theil der Perihelbewegung dieses Planeten ist, so wird für

	Neumann	Green	Laplace	Newcomb
Venus	55″	16″	29″	— 8″ ± 37″
Erde	64	10	25	6 ± 8
Mars	79	5	20	8 ± 4

Es sind in dieser Zusammenstellung unter „Newcomb“ diejenigen Werthe für die Perihelbewegungen nebst m. Fehlern angeführt, welche Newcomb, als durch die Theorie nicht erklärt, empirisch aus den Beobachtungen abgeleitet hat. Diese empirischen Correctionen sind durch Neumann's Formel gewiss nicht, durch die Laplace'sche nur schwer, durch die Green'sche aber auffallend gut zu erklären. Trotzdem wird man es als einen Zufall betrachten müssen, dass Green's Formel sich so nahe den

Beobachtungen anschliesst. Die Bedenken gegen diese Formel scheinen mir von grösserem Gewicht zu sein, als die Uebereinstimmung der angeführten Zahlen. Die anomale Perihelbewegung des Mars, welche hauptsächlich den Ausschlag giebt, erscheint nicht sicherer constatirt, als andere von Newcomb gefundene empirische Glieder u. A. in dem Knoten der Venusbahn, welche durch eine Modification des Anziehungsgesetzes überhaupt nicht dargestellt werden können. Es ist deshalb nicht unwahrscheinlich, dass die Bewegung des Perihels des Mercur, des Mars etc. in ganz andern und näher liegenden Ursachen eine Erklärung finden wird. In diesem Falle würden also vorläufig überhaupt im Planetensystem keine Andeutungen vorhanden sein, welche für die Nothwendigkeit einer Correctur des Newtonschen Gesetzes sprächen. Da diese Nothwendigkeit für eine unbegrenzte Anwendung des Gravitationsgesetzes aber durch das Vorhergehende nachgewiesen ist, würde dies nur bedeuten, dass das Planetensystem eine viel zu geringe Ausdehnung besitzt, um in den vorliegenden Fragen eine Entscheidung herbeiführen zu können.

II.

Ich gehe nun, wie oben angekündigt worden ist, auf die Frage näher ein, ob die Anzahl l e u c h t e n d e r Massen im Universum ebenfalls als unbegrenzt gross anzunehmen sei und welche Folgerungen hiermit für die Helligkeit des Himmelsgrundes verknüpft seien. Im Wesentlichen haben wir es also mit einem Gegenstande zu thun, den Olbers in einer bekannten und viel citirten Abhandlung[1]) besprochen hat.

Olbers sagt a. a. O.: „Sind wirklich im ganzen unendlichen Raume Sonnen vorhanden, sie mögen nun in ungefähr gleichen Abständen von einander oder in Milchstrassensystemen vertheilt sein, so wird ihre Menge unendlich und da müsste der ganze Himmel ebenso hell sein, wie die Sonne. Denn jede Linie, die ich mir von unserem Auge gezogen denken kann,

---

[1]) Ueber die Durchsichtigkeit des Weltraums. Astron. Jahrbuch für 1826. Olbers' Werke I, S. 133—144.

wird nothwendig auf einen Fixstern treffen und da müsste uns jeder Punkt am Himmel Fixsternlicht, also Sonnenlicht, zusenden.“ Aehnliche Betrachtungen hat übrigens, wie W. Struve[1]) bemerkt hat, schon viel früher der Lausanner Astronom L. de Cheseaux ausgeführt. Der Gedankengang von Olbers ist, wenn die gemachte Voraussetzung unendlich vieler leuchtender Weltkörper zugegeben wird, ebensowenig zu beanstanden, wie die weitere Folgerung, dass die Annahme einer Schwächung des Lichtes beim Durchdringen des Raumes, also einer Absorption, ähnlich wie sie nicht ganz durchsichtige Medien ausüben, alle Schwierigkeiten beseitigt. Dagegen ist die gemachte Voraussetzung nicht als eine nothwendige, vielleicht nicht einmal als eine plausible zuzulassen. Wie schon oben erwähnt worden ist, darf nicht ohneweiteres die im Universum enthaltene Masse, welche Gravitationskräfte ausübt, mit dem selbstleuchtenden Theil derselben identificirt werden und wenn wir geneigt sind die erste als unendlich gross anzusehen, so folgt hieraus noch keineswegs, dass Gleiches für einen Theil derselben gilt.

Zuerst soll der Ausdruck für die mittlere Flächenhelligkeit des Fixsternhimmels abgeleitet werden. Derselbe ergiebt sich ohne Mühe aus den Betrachtungen, die ich in einem verwickelteren Falle[2]) ausgeführt habe. Ein irgendwo im Weltraume gelegenes leuchtendes Flächenelement $d\varepsilon$ möge dem Beobachter die Lichtmenge dq' zusenden, wenn es frei läge. Nun kann es aber durch davor liegende Weltkörper, welche hier der Einfachheit wegen als Kugeln angenommen werden sollen, verdeckt werden, in welchem Falle es die Lichtmenge Null zusendet. Im Mittel wird $d\varepsilon$ also eine andere Lichtmenge dq dem Beobachter zusenden und es wird sein

$$dq = dq' \cdot w$$

wo w die Wahrscheinlichkeit dafür ist, dass das Element $d\varepsilon$ von keiner davorstehenden Kugel verdeckt erscheint. Man kann

1) Études d'Astronomie stellaire pg. 84.

2) Theorie der Beleuchtung staubförmiger kosmischer Massen. Abhandlungen der Münchener Akademie der W. Band XVIII, 1893.

w auch als einen echten Bruch bezeichnen, der den aufzusuchenden Mittelwerth charakterisirt. Es mögen nun im ganzen Weltraum, den wir uns zunächst als einen irgendwie begrenzten endlichen Raum P vorstellen, N_1 Kugeln mit dem Radius ϱ_1, N_2 Kugeln mit dem Radius ϱ_2 etc., N_n Kugeln mit dem Radius ϱ_n vorkommen. Bezeichnet dann allgemein w_m die Wahrscheinlichkeit dafür, dass keine Verdeckung durch eine Kugel mit dem Radius ϱ_m eintritt, so ist:

$$w = w_1\, w_2\, \ldots\, w_n$$

Die Oberfläche jeder leuchtenden Kugel kann man sich aus solchen Elementen $d\varepsilon$ zusammengesetzt denken. Ist also q_m die ursprüngliche, ungeschwächte Lichtquantität einer leuchtenden Kugel vom Radius ϱ_m, so wird eine solche im Mittel die Lichtmenge

$$q = q_m \cdot w \tag{1}$$

zusenden, falls nur die ϱ_m genügend klein gedacht werden. Bezeichnet J_m die mittlere Leuchtkraft (Lichtmenge, welche bei senkrechter Emanation ein Oberflächenelement 1 einem Beobachter in der Entfernung 1 zusendet) einer Kugel K_m vom Radius ϱ_m, r ihre Entfernung vom Beobachter, so ist:

$$q_m = J_m\, \pi \cdot \frac{\varrho_m^2}{r^2} \tag{2}$$

J_m kann natürlich auch gleich Null sein, was für einen dunklen Körper zutrifft. w_m ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Mittelpunkt von K_m irgendwo im Raume P liegt, nur nicht innerhalb eines geraden Kreiscylinders C_m mit dem Radius ϱ_m, dessen Axe vom Beobachter bis zum Weltkörper reicht. Man darf nun annehmen, dass die Weltkörper sehr sparsam im Raume vertheilt sind. Dann wird sich w_m leicht und genau genug angeben lassen. Bezeichnet $d\tau$ ein Volumelement und φ_m eine Function der Raumcoordinaten, welche die relative Häufigkeit des Vorkommens der Kugeln K_m in den einzelnen Raumtheilen angiebt, so wird:

$$w_m = (1 - X_m)^{N_m} \tag{3}$$

Hierbei ist:

$$X_m = \frac{Y_m}{Z_m}; \quad Y_m = \int\limits_{C_m} \varphi_m \, d\tau; \quad Z_m = \int\limits_{P} \varphi_m \, d\tau$$

Das Integral Y_m ist auf den Cylinderraum C_m, Z_m auf den ganzen Raum P auszudehnen. Bezeichnet $d\omega$ die Oeffnung eines Kegels, dessen Spitze im Beobachter liegt, so wird $d\tau = r^2\, d\omega\, dr$. In diesem Elemente befinden sich

$$\frac{N_m}{Z_m} \cdot \varphi_m \, r^2 \, d\omega \, dr$$

Kugeln vom Radius ϱ_m, die dem Beobachter zugesandte Lichtmenge wird also sein

$$_m\sum_1^n N_m \frac{\varphi_m}{Z_m} \cdot q_m \, w \, r^2 \, d\omega \, dr \tag{4}$$

Integrirt man in Bezug auf r von $r = 0$ bis $r = R$, wo R der Grenze des Raumes P entspricht, und dividirt durch $d\omega$, so erhält man die mittlere Flächenhelligkeit in der Richtung, deren Richtungswinkel in der Funktion φ_m vorkommen. Die mittlere Helligkeit des ganzen Himmels ergiebt sich, wenn man (4) ausser nach r auch noch in Bezug auf $d\omega$ integrirt und zwar über die ganze Fläche S der Einheitskugel und durch 4π dividirt. Es ist also:

$$h = \frac{1}{4}\int\limits_S d\omega \int\limits_0^R dr \; _m\sum_1^n N_m \frac{\varphi_m}{Z_m} \cdot J_m \cdot \varrho_m^2 (1-X_1)^{N_1} \cdot (1-X_2)^{N_2} \ldots (1-X_n)^{N_n} \tag{I}$$

Man wird nun, um für die Ausrechnung geeignetere Ausdrücke, die jedenfalls genau genug sind, zu erhalten, zu berücksichtigen haben, dass X_m überaus klein ist. Dann ist

$$(1 - X_m)^{N_m} = e^{-N_m X_m}$$

und wenn dies eingeführt wird:

$$h = \frac{1}{4} \cdot {}_m\sum_1^n \frac{N_m}{Z_m} \cdot \varrho_m^2 \int\limits_S d\omega \int\limits_0^R dr \cdot \varphi_m J_m \, e^{-\,_m\sum_1^n N_m \frac{Y_m}{Z_m}} \tag{II}$$

Diese Formel soll zuerst auf den einfachsten Fall angewendet werden, in welchem eine gleichmässige Vertheilung der Kugeln im Raume stattfindet. Man hat dann $\varphi_m = 1$ zu setzen. Ferner wird

$$Y_m = \varrho_m^2 \cdot \pi \cdot r$$

Den Raum P kann man in beliebiger Weise begrenzt annehmen und diese Begrenzung ins Unendliche wachsen lassen. Es werde für P eine Kugel mit dem Radius R angenommen, also:

$$Z_m = \frac{4}{3} \pi R^3$$

Die Formel (II) wird hierdurch:

$$h = \frac{3}{4} \cdot \int_0^R d r \sum_{m=1}^{n} N_m \frac{\varrho_m^2}{R^3} \cdot e^{-\frac{3}{4} r \Sigma N_m \frac{\varrho_m^2}{R^3}} \cdot \frac{1}{4\pi} \cdot \int_S J_m \, d\omega$$

Die mittlere Flächenhelligkeit J der Kugeln wird man definiren können:

$$J = \frac{1}{4\pi} \int_S d\omega \cdot \frac{\Sigma N_m \varrho_m^2 J_m}{\Sigma N_m \varrho_m^2}$$

Es wird also:

$$h = \frac{3}{4} \int_0^R J \cdot dr \cdot \frac{\Sigma N_m \varrho_m^2}{R^3} \cdot e^{-\frac{3}{4} \frac{r}{R^3} \Sigma N_m \varrho_m^2}$$

Setzt man demnach:

$$\frac{3r}{4R^3} \cdot \Sigma N_m \varrho_m^2 = x; \quad \frac{3}{4} \Sigma N_m \left(\frac{\varrho_m}{R}\right)^2 = \Gamma$$

so wird schliesslich:

$$h = \int_0^\Gamma J \cdot e^{-x} \, dx \tag{5}$$

Führt man einen gewissen mittleren Radius ϱ_0 ein:

$$\varrho_0 = \frac{\Sigma N_m \varrho_m^3}{\Sigma N_m \varrho_m^2}$$

so liegt ϱ_0 zwischen dem grössten und kleinsten ϱ_m. Es sei das Gesammtvolumen aller im Raum P enthaltenen Kugeln K, also:

$$\frac{K}{P} = \frac{1}{R^3} \cdot \Sigma N_m \varrho_m^3 = \frac{\varrho_0}{R} \Sigma N_m \left(\frac{\varrho_m}{R}\right)^2$$

so kann man übersichtlicher schreiben:

$$\lambda = \frac{3}{4}\left(\frac{K}{P}\right) \cdot \frac{r}{\varrho_0}; \quad \Gamma = \frac{3}{4}\left(\frac{K}{P}\right) \cdot \frac{R}{\varrho_0}$$

Wenn demnach, wie im ersten Abschnitte dieser Abhandlung angenommen worden ist, die Masse im Weltraume mit endlicher, wenn auch noch so kleiner Dichtigkeit vertheilt ist, so wird $\frac{K}{P}$ endlich sein und man wird Γ durch Vergrösserung von R beliebig gross machen können. Γ ist also für das ganze Universum ∞ zu setzen. Wäre nun J unabhängig von λ, so wäre $h = J$ und hierin ist im Wesentlichen das Resultat von Olbers enthalten. Im allgemeinen Falle kann man eine ähnliche Reduction ausführen. Bezeichnet J_ω den Mittelwerth der einzelnen J_m in der Richtung ω,

$$J_\omega = \frac{\Sigma N_m \varrho_m^2 J_m \varphi_m \cdot \frac{1}{Z_m}}{\Sigma N_m \varrho_m^2 \cdot \varphi_m \cdot \frac{1}{Z_m}}$$

so wird nach (II)

$$h = \frac{1}{4}\int_S d\omega \int_0^R dr\, J_\omega \cdot \left(\Sigma N_m \varrho_m^2 \varphi_m \frac{1}{Z_m}\right) \cdot e^{-\Sigma N_m \frac{Y_m}{Z_m}}$$

Man wird mit derselben Genauigkeit, mit der die Gleichung (1) gilt, setzen können:

$$Y_m = \varrho_m^2 \pi \cdot \int_0^r \varphi_m\, dr$$

Setzt man also:

$$x = \pi \cdot \Sigma N_m \varrho_m^2 \cdot \frac{1}{Z_m} \int_0^r \varphi_m \, dr; \quad \Gamma = \pi \, \Sigma N_m \varrho_m^2 \cdot \frac{1}{Z_m} \cdot \int_0^R \varphi_m \, dr$$

so wird

$$h = \frac{1}{4\pi} \int_S d\omega \int_0^\Gamma J_\omega \cdot e^{-x} \cdot dx \qquad \text{(III)}$$

Hier ist es vielleicht übersichtlicher, die mittlere Flächenhelligkeit h_ω in einer bestimmten Richtung anzugeben:

$$h_\omega = \int_0^\Gamma J_\omega \cdot e^{-x} \, dx \qquad \text{(III a)}$$

Es ist dies genau die Formel (5). Auch in diesem allgemeinen Fall lässt sich zeigen, dass Γ mit R in's Unendliche wächst, wenn die in der gewählten Richtung gleichmässig vertheilte Masse eine endliche Dichtigkeit hat.

Die Anzahl ν_m der Kugeln K_m in der Volumeinheit ist

$$\nu_m = \frac{N_m \varphi_m}{Z_m}$$

Nennt man n die Anzahl aller Kugeln in der Volumeinheit, also

$$n = \nu_1 + \ldots + \nu_n$$

so wird, wenn ϱ_0 ein gewisser Mittelwerth aller ϱ_m bedeutet, gesetzt werden können:

$$\Sigma N_m \varrho_m^2 \varphi_m \cdot \frac{1}{Z_m} = \Sigma \nu_m \varrho_m^2 = n \varrho_0^2$$

Hiermit hat man

$$\Gamma = \pi \int_0^R n \varrho_0^2 \, dr$$

Bezeichnet man mit $M(n\,\varrho_0^2)$ den arithmetischen Mittelwerth, so ist

$$\Gamma = \pi\, R\, M(n\,\varrho_0^2)$$

Aus dieser Formel ergiebt sich der ausgesprochene Satz von selbst.

Es ist unmöglich, h bis auf unendlich kleine Grössen genau durch die Beobachtungen festzustellen. Da weiter J_ω nur endliche Werthe annehmen kann, wird man die beobachteten h_ω durch endliche Werthe von Γ beliebig genau darstellen können. Was hier von der Helligkeit des Himmelsgrundes gesagt worden ist, gilt auch allgemeiner. Infolge der perspectivischen Verdeckung der Weltkörper durch die davorstehenden wird nur ein endlicher Raum unseren Wahrnehmungen zugänglich sein und seine Dimensionen werden thatsächlich wesentlich beschränkt werden u. A. durch die Nebelmassen, die uns allenthalben zu umgeben scheinen und die Aussicht hemmen.

Ueber die Vertheilung der Fixsterne im Raume wissen wir noch so wenig, dass wir uns, um durch ein Beispiel einen Ueberblick über mögliche Zahlenwerthe zu erhalten, an die Formel (5) halten können, die ausserdem dieselbe Gestalt hat wie (IIIa).

Zuerst soll noch auf die — Olbers'sche — Absorption des Lichtes im Weltraum Rücksicht genommen werden. Dies geschieht, wie man sofort übersieht, wenn man in der Formel statt J_m:

$$J_m \cdot e^{-\lambda r}$$

setzt, wo λ den hypothetischen Absorptionscoefficienten bedeutet. Die Formel (5) wird dadurch

$$h = \frac{3}{4}\int_0^R J \cdot e^{-\left(\lambda + \frac{3}{4}\frac{K}{P}\cdot\frac{1}{\varrho_0}\right) r} \cdot \frac{K}{P\varrho_0}\, dr \tag{6}$$

Nimmt man beispielsweise J unabhängig von r an, so wird für $R = \infty$

$$h = J \cdot \frac{\frac{3}{4} \cdot \frac{K}{P}}{\lambda \varrho_0 + \frac{3}{4} \frac{K}{P}} \tag{7}$$

Zahlenmässige Ausrechnungen von (7) können, bei der absoluten Unkenntniss über die mittleren Werthe der Leuchtkraft, Massen, Grössen und Entfernungen, selbst der uns nächsten Massen des Universums, nur ganz beiläufig und auf mehr oder weniger willkürlichen Annahmen beruhend ausgeführt werden. Es kann sich eigentlich nur darum handeln, die Grössenordnungen der verschiedenen Grössen festzustellen. Als Einheit der Entfernung werde die eines Sternes mit der Parallaxe 0."2 angenommen und kurz Siriusweite genannt. Die mittlere Parallaxe der Sterne 6. Grösse soll, unter bekannten Voraussetzungen, zu 0."02 angenommen werden. Bis zu dieser Entfernung R sollen 6000 Sterne in nahezu gleichmässiger Vertheilung vorkommen. ϱ_0 soll das Doppelte des Sonnendurchmessers sein. Es ist dann bis zu dieser Entfernung

$$\frac{3}{4} \frac{K}{P} = 3.10^{-24}$$

Die Absorption des Lichtes im Weltraume möge in der Siriusweite 0.1% betragen. Es ist also $\lambda = 10^{-3}$; ferner $\varrho_0 = 0.9 \times 10^{-8}$; $\lambda \varrho_0 = 0.9 \times 10^{-11}$. Wenn nun dieselbe gleichmässige Dichtigkeit in der Vertheilung der Himmelskörper im ganzen unendlichen Raume angenommen wird, so ist nach (7)

$$h = J.\ 3.3 \times 10^{-13}$$

Die Flächenhelligkeit des Mondes ist etwa 1 : 600000 derjenigen der Sonne. Die Helligkeit des Himmelsgrundes bei Vollmond soll nach Olbers[1]) ungefähr = 1 : 100000 der des Vollmondes sein — eine Angabe, die ich nicht zu controliren vermag. Bezeichnet J_H diese Helligkeit und setzt man $J = \gamma \cdot J_0$, wo J_0 die Sonnenhelligkeit ist, so wird

$$h = \frac{\gamma}{50} \cdot J_H \tag{8}$$

[1]) a. a. O. Werke S. 139.

Jedenfalls dürfte dieses Beispiel zeigen, dass in der That die Absorption ausreicht, um die geringe mittlere Helligkeit des Fixsternhimmels zu erklären und zwar auch dann, wenn die Anzahl der leuchtenden Massen mit der Raumausdehnung in's Unendliche wächst. Es ergiebt sich aber auch, dass dies nur stattfindet, wenn der Absorptionscoefficient eine gewisse Grösse überschreitet, so wird nach Formel (7) h nur dann gegen J sehr klein, wenn $\lambda \varrho_0$ sehr gross gegen $\frac{3}{4}\frac{K}{P}$ ist. Ferner ist klar, dass die Annahme der Absorption **keine nothwendige** Annahme ist, denn dasselbe Resultat wird erreicht, wenn ein gewisser Mittelwerth von J einen bestimmten kleinen Werth nicht überschreitet. Betrachten wir z. B. die Formel (5)

$$h = \int_0^\infty J \cdot e^{-x}\, dx$$

so kann man h durch vielerlei Annahmen über J sehr klein machen. Der einfachste dieser Fälle ist der, dass J im Mittel überall sehr klein ist. Es würde dies aussagen, dass überall im Raume noch sehr viele dunkle oder sehr wenig leuchtende Weltkörper vorkommen, wobei man indessen sehr weite Strecken in unserer Umgebung oder auch in andern Theilen des Universums ausnehmen kann. Mit den obigen Zahlen ergiebt sich z. B. für die Helligkeit des Himmels, wenn hierzu alle Weltkörper in der angenommenen Vertheilungsdichtigkeit bis zu einer Entfernung von r Siriusweiten beitragen:

$$h = \int_0^{x_1} J \cdot e^{-x}\, dx; \quad x_1 = 3.3 \times 10^{-16} \cdot r$$

Bei constantem J und wenn r nicht allzu gross ist, wird also:

$$h = 3.3 \times 10^{-16} \cdot r \cdot J$$

Wenn demnach $r = 1000$ gesetzt wird, erhält man erst dieselbe Zahl wie in (8). Aus solchen Ueberlegungen folgt, dass man nur anzunehmen braucht, die Leuchtkraft der Weltkörper sei erst in ganz enormen Entfernungen im Mittel klein.

Diese letztere Annahme genügt ferner für endliche Strecken, denn wie sich die mittlere Leuchtkraft in sehr grossen r entsprechenden Entfernungen gestaltet, ist wiederum, wegen des Factors e^{-x} ganz gleichgültig. Dergleichen Annahmen scheinen mir aber nicht nur durchaus zulässig zu sein, sondern sogar den Vorzug vor andern zu besitzen.

Die Zeit, während der ein Fixstern sich in einem Zustand befindet, in welchem er optisch oder photographisch wirksame Strahlen aussendet, haben wir jedenfalls als überaus kurz anzusehen gegenüber der Zeit, während der er sich in diesem Zustande nicht befindet. Wären die in den verschiedensten Stadien der Entwicklung befindlichen Weltkörper nach dem Zufall im Weltraum vertheilt, so müsste demnach ihre mittlere Helligkeit in jedem Raumtheile eine sehr geringe sein. Diese zufällige Vertheilung anzunehmen, wird man indessen mit Recht bedenklich finden, obgleich nicht zu übersehen ist, dass die Leuchtkraft zu einer bestimmten Zeit wesentlich, auch bei Annahme eines gleichzeitigen Beginnes der Entwicklung, von der Grösse, Wärmeleitungsfähigkeit und anderen physikalischen Eigenschaften der einzelnen Körper abhängig sein muss, wie denn z. B. kleinere Körper im Allgemeinen rascher erkalten als grössere. Es sprechen aber mannigfache Erfahrungen dafür, dass sehr verschieden grosse Massen in unserer Nähe als Fixsterne leuchten. Eine Schwierigkeit, selbst für die uns nächsten Theile des Raumes anzunehmen, dass hier die Anzahl der dunklen Sterne die der leuchtenden bei weitem überwiegt, kann deshalb wohl kaum bestehen. Indessen ist dies gar nicht nöthig. Der Entwicklungszustand des Weltkörpers wird als eine Function des Ortes und der Zeit zu betrachten sein. Die verschiedenen Raumtheile werden sich demnach zu einer bestimmten Zeit in sehr verschiedenen Zuständen befinden und nach dem früheren werden wir annehmen müssen, dass die überwiegende Anzahl dieser Zustände dem Leuchten nicht günstig ist. Hierzu kommt noch die Berücksichtigung der Lichtzeit, d. h. der Zeit, die das Licht braucht um von den Himmelskörpern zu uns zu gelangen. Für sehr entfernte Regionen kommen dann Zeiten in Betracht, die auch in der Entwicklungsgeschichte der Weltkörper nicht zu vernachlässigen sind. Indessen ist leicht einzusehen, dass das Resultat der angestellten Betrachtungen hierdurch im Wesentlichen ungeändert bleibt.

Wie man auch diese Ueberlegungen im Einzelnen weiter ausführen oder auch umgestalten mag, jedenfalls dürfte aus ihnen hervorgehen, dass die Thatsache des wenig hellen Himmelsgrundes keineswegs mit Nothwendigkeit auf eine Absorption des Lichtes im Weltraume, im Sinne von Olbers, hinweist.