Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Classe

der

k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.

Band XXVI. Jahrgang 1896.

München.
Verlag der K. Akademie.
1897.

In Commission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).

Die analytische Fortsetzung derjenigen Functionen, welche das Innere eines Kegelschnittes conform auf die Halbebene abbilden.

Von **F. Lindemann.**

(Eingelaufen 7. November.)

Für Ellipse und Parabel sind von Schwarz zuerst diejenigen Formeln mitgetheilt, welche den innerhalb[1]) oder ausserhalb[2]) einer solchen Curve gelegenen Theil der Ebene conform auf den Einheitskreis abbilden. Für die Hyperbel habe ich die entsprechenden Gleichungen hinzugefügt.[3]) Im Folgenden soll es unsere Aufgabe sein, die hierdurch definirten Abbildungen in ihrer Bedeutung für die ganze Ebene sowohl der einen als der anderen Variabeln zu verfolgen. Dabei leite ich die Schwarz'schen Formeln von neuem ab auf Grund eines allgemeinen Ansatzes, den ich früher für eine gewisse Klasse derartiger Probleme[4]) gegeben habe.

---

[1]) Ueber einige Abbildungsaufgaben, 1869, Crelle's Journal, Bd. 70, und Annali di mathematica, Ser. 2, Bd. 3. Gesammelte Abhandlungen, Bd 2, S. 77 und 102.

[2]) Ueber einen Grenzübergang durch alternirendes Verfahren, 1870. Vierteljahrsschrift der naturforschenden Gesellschaft in Zürich, Bd. 15. Ges. Abhandlungen, Bd. 2, S. 141.

[3]) Sitzungsberichte der kgl. bayer. Akademie, math.-phys. Klasse, 1895, Bd. 25 (und schon früher in meinen Vorlesungen).

[4]) Physikal.-ökonomische Gesellschaft zu Königsberg i. Pr. Sitzungsberichte vom 7. Juni 1894.

I. Ellipse.

1. Wir setzen $z = x + iy$, $z_1 = x - iy$, $Z = X + iY$. Ist dann $f(z, z_1) = 0$ die Gleichung der Ellipse in der z-Ebene, so wird nach meinem früheren Ansatz die Abbildung des Innern derselben auf die obere Halbebene ($Y > 0$) der Z-Ebene durch die Formel

$$(1) \qquad \int \frac{dz}{\frac{\partial f}{\partial z_1}} = C \int \frac{dZ}{\sqrt{(Z-A)(Z-B)(Z-A_1)(Z-B_1)}} + C'$$

vermittelt. Hier bedeuten C und C' Constante; A und B sind diejenigen Punkte der oberen Halbebene, welche den Brennpunkten der Ellipse zugeordnet sind; A_1 und B_1 sind die conjugirten Punkte. Liegen die Brennpunkte der Ellipse in den Punkten ± 1, und setzen wir $A = i$, $B = \alpha + i\beta$, wo $\beta > 0$, so geht die Gleichung (1) über in:

$$(2) \qquad \int \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}} = C \int \frac{dZ}{\sqrt{(1 + Z^2)\,[(Z - \alpha)^2 + \beta^2]}} + C'.$$

Durch die Substitution

$$t^2 = \frac{\alpha + i\beta + i}{\alpha + i\beta - i}\,\frac{Z - i}{Z + i}, \qquad k^2 = \frac{\alpha^2 + (\beta - 1)^2}{\alpha^2 + (\beta + 1)^2}$$

wird das Integral der rechten Seite von (2) gleich

$$\frac{2}{\sqrt{\alpha^2 + (\beta + 1)^2}} \int \frac{dt}{\sqrt{(1 - t^2)(1 - k^2 t^2)}}.$$

Die Gleichung (1) erscheint daher in der Form

$$(3) \qquad \frac{Z - i}{Z + i} = \frac{\alpha + i\beta - i}{\alpha + i\beta + i} \sin^2 \operatorname{am} (\gamma \arcsin z + \gamma'),$$

worin die Constanten γ und γ' noch näher zu bestimmen sind. Nun soll für $z = 1$ $\left(\text{also } \arcsin z = \frac{\pi}{2}\right)$ $Z = i$ und für $z = -1$ $\left(\text{also } \arcsin z = -\frac{\pi}{2}\right)$ $Z = \alpha + i\beta$ werden; folglich:

$$\gamma\frac{\pi}{2}+\gamma'=0, \qquad -\gamma\frac{\pi}{2}+\gamma'=\pm K,$$

wenn K das ganze elliptische Integral erster Gattung bezeichnet. Wählen wir das untere Zeichen, so ist schliesslich die verlangte Abbildung durch die Formel

$$(4)\qquad \frac{Z-i}{Z+i}=\frac{\alpha+i\beta-i}{\alpha+i\beta+i}\sin^2\operatorname{am}\left(\frac{K}{\pi}\arcsin z-\frac{K}{2}\right)$$

dargestellt.[1])

Dem Brennpunkte $z=1$ haben wir den Punkt $Z=i$ willkürlich zugeordnet; die Abbildung wird daher völlig bestimmt, wenn wir noch einem Punkte des Randes der Ellipse einen Punkt der reellen Axe zuordnen. Sei a die halbe grosse Axe der Ellipse und $z=a$ der Scheitel, so möge diesem der Punkt $X=A$, $Y=0$ entsprechen; dann sind die Constanten α und β aus der Gleichung

$$(5)\qquad \frac{A-i}{A+i}=\frac{\alpha+i\beta-i}{\alpha+i\beta+i}\sin^2\operatorname{am}\left(\frac{K}{\pi}\arcsin a-\frac{K}{2}\right)$$

zu ermitteln.

Um die Symmetrie der Ellipse gegen ihre beiden Axen auch im Bilde hervortreten zu lassen, empfiehlt es sich, dem Punkte A eine specielle Lage zu geben. Wir wählen $A=0$; dann ist nach (5) auch $\alpha=0$, und wir erhalten

$$(6)\qquad \frac{1}{k^2}=\left(\frac{\beta+1}{\beta-1}\right)^2=\sin^4\operatorname{am}\left(\frac{K}{\pi}\arcsin a-\frac{K}{2}\right).$$

Ferner gibt die Formel $\sin\operatorname{am}\left(\frac{iK'}{2}\right)=\left(\frac{i}{\sqrt{k}}\right)$ das Resultat:

$$(7)\qquad \frac{K}{\pi}\arcsin a-\frac{K}{2}=\frac{iK'}{2}, \qquad a=\operatorname{cosin}\left(\frac{iK'\pi}{2K}\right).$$

Aus (4) erhalten wir sonach für $\alpha=0$:

$$(8)\qquad \frac{Z-i}{Z+i}=\pm k\sin^2\operatorname{am}\left(\frac{K}{\pi}\arcsin z-\frac{K}{2}\right).$$

---

[1]) Vgl. Schwarz a. a. O.

Wir wählen für das Folgende das untere Zeichen.

Ist die Ellipse gegeben, so wird mittelst (7) das Perioden-Verhältniss $\frac{iK'}{K}$ aus der halben grossen Axe berechnet; dann ist k^2 bekannt, und aus (6) findet man den Punkt βi, welcher dem Brennpunkte -1 entspricht.

2. Ist z reell, so muss nach (8) Z rein imaginär sein, d. h. der grossen Hauptaxe der Ellipse entspricht die Y-Axe.

Vertauschen wir i mit $-i$, so ergibt sich aus (8):

$$\text{(8a)} \qquad \frac{Z_1 + i}{Z_1 - i} = k \sin^2 \operatorname{am}\left(\frac{K}{\pi} \arcsin z_1 - \frac{K}{2}\right).$$

Längs der kleinen Hauptaxe der Ellipse ist $z + z_1 = 0$, also

$$\sin^2 \operatorname{am}\left(\frac{K}{\pi} \arcsin z_1 - \frac{K}{2}\right) = \sin^2 \operatorname{am}\left(\frac{K}{\pi} \arcsin z + \frac{K}{2}\right)$$

$$= \frac{1 - \sin^2 \operatorname{am}\left(\frac{K}{\pi} \arcsin z - \frac{K}{2}\right)}{1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am}\left(\frac{K}{\pi} \arcsin z - \frac{K}{2}\right)}.$$

Setzt man dies in (8a) ein, so ergibt sich:

$$\text{(9)} \qquad Z \cdot Z_1 = \frac{1-k}{1+k},$$

also die Gleichung eines Kreises, dessen Mittelpunkt im Anfangspunkte liegt. In bekannter Weise vorgenommene „Spiegelungen" an diesem Kreise und an der Axe $X = 0$ entsprechen in der Halbebene $Y > 0$ den Symmetrie-Beziehungen der Ellipse gegen ihre Hauptaxen.

3. Es handelt sich jetzt darum, dasjenige Gebiet der z-Ebene zu bestimmen, welches der unteren Halbebene ($Y < 0$) der Z-Ebene entspricht. Ueber der z-Ebene denken wir uns diejenige zweiblättrige Riemann'sche Fläche construirt, welche die Werthe von z_1 darstellt, wenn z und z_1 mit einander durch die Gleichung der Ellipse verbunden sind. Die Fläche hat zwei Verzweigungspunkte, und zwar in den Brennpunkten der

Ellipse. Längs der letzteren ist einer der beiden zu z gehörigen Werthe von z_1 gleich $x - iy$, wenn $z = x + iy$ gesetzt wird. Das Blatt der Fläche, in dem dies zutrifft, und in dem wir uns den reellen Zug der Ellipse gelegen denken, bezeichnen wir als das untere Blatt. Nur in diesem unteren Blatte und längs des reellen Zuges der Ellipse ist daher z_1 zu z conjugirt, sonst bezeichnet z_1 andere complexe Zahlen definirt durch die Gleichung der Ellipse:

$$(10) \qquad b^2 \left(\frac{z + z_1}{2}\right)^2 - a^2 \left(\frac{z - z_1}{2}\right)^2 = a^2 b^2,$$

wobei $a^2 - b^2 = 1$ sein mag.

Im Innern der Ellipse ist die Beziehung zwischen z und Z eindeutig. Denjenigen Theilen der beiden Blätter unserer Fläche, welche im Innern der Ellipse liegen, entsprechen daher über der Halbebene $Y > 0$ zwei einander congruente und über einander liegende Blätter einer neuen Riemann'schen Fläche, welche mit einander durch die beiden (den Brennpunkten entsprechenden) Verzweigungspunkte i und $\alpha + i\beta$ verbunden sind, und welche durch die reelle Axe begrenzt werden. Dem reellen Zuge der Ellipse (im unteren Blatte der ersten Fläche) möge die Axe $Y = 0$ entsprechen, insofern sie im unteren Blatte der neuen Fläche gedacht wird; der im oberen Blatte der ersten Fläche genau über der gegebenen Ellipse liegenden Ellipse entspricht dann die reelle Axe $Y = 0$, insofern sie das obere Blatt der neuen Riemann'schen Fläche begrenzt.

Ueberschreitet nun Z im unteren Blatte die reelle Axe, so überschreitet z die gegebene Ellipse. Ueber der Halbebene $Y < 0$ breiten wir eine aus zwei Blättern bestehende Riemann'sche Fläche aus, welche längs der Axe $Y = 0$ im unteren Blatte stetig mit der soeben besprochenen Fläche zusammenhängt, und deren Blätter durch die Verzweigungspunkte $-i$ und $\alpha - i\beta$ mit einander verbunden sind. Das obere Blatt derselben wird wieder durch die reelle Axe $Y = 0$ begrenzt, hängt hier aber in keiner Weise mit dem oberen Blatte der über der Halbebene $Y > 0$ soeben construirten Fläche zusammen. Was entspricht nun dieser über der Halbebene $Y < 0$ construirten zweiblättrigen Fläche in der Ebene der Variabeln z oder besser: in der über dieser Ebene vermöge der Gleichung (10) zu construirenden Fläche?

4. Wir setzen

$$u + iv = \arcsin(x + iy) \tag{11}$$

oder:

$$x = \sin u \frac{e^v + e^{-v}}{2}, \qquad y = \operatorname{cosin} u \frac{e^v - e^{-v}}{2},$$

so dass ein System confocaler Ellipsen und Hyperbeln mit den Brennpunkten ± 1 durch die Gleichungen

$$\frac{4x^2}{(e^v + e^{-v})^2} + \frac{4y^2}{(e^v - e^{-v})^2} = 1, \tag{12}$$

$$\frac{x^2}{\sin^2 u} - \frac{y^2}{\cos^2 u} = 1 \tag{13}$$

in bekannter Weise dargestellt wird. Für reelle Werthe von Z ist andererseits nach (6) und (7):

$$1 = \operatorname{abs}\left(\frac{X - i}{X + i}\right)^2$$

$$= k^2 \sin^2 \operatorname{am}\left(\frac{K}{\pi}(u + iv) - \frac{K}{2}\right) \cdot \sin^2 \operatorname{am}\left(\frac{K}{\pi}(u - iv) - \frac{K}{2}\right) \cdot$$

$$= k^2 \left[\frac{\sin^2 \operatorname{am}\left(\frac{K}{\pi} u - \frac{K}{2}\right) - \sin^2 \operatorname{am}\left(\frac{iK}{\pi} v\right)}{1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am}\left(\frac{Ki}{\pi} u - \frac{K}{2}\right) \sin^2 \operatorname{am}\left(\frac{iK}{\pi} v\right)}\right]^3.$$

Damit diese Relation erfüllt sei, muss

$$v = \frac{K'\pi}{2K} \pm 2n \frac{\pi K'}{K} \tag{14}$$

gesetzt werden, unter n eine ganze Zahl verstanden; denn es ist in der That

$$\sin \operatorname{am}\left(\frac{iK'}{2}\right) = \frac{i}{\sqrt{k}}.$$

Vermöge der Gleichung (7) werden also der reellen Axe $Y = 0$ unendlich viele, einander confocale Ellipsen des Systems (12) zugeordnet, deren Parameter v durch (14) gegeben sind.

Im Innern der gegebenen Ellipse (10) kann keine andere liegen, deren Parameter v durch (11) gegeben wird. Mit wachsendem v wächst auch die grosse Axe der betreffenden Ellipse (12). Der zu (10) gehörige Parameterwerth v_0 wird also aus (14) für $n = 0$ gefunden:

$$v_0 = \frac{K'\pi}{2K} = i \cdot \arcsin a - \frac{i\pi}{2}, \tag{15}$$

denn es genügt, positive Werthe von v in Betracht zu ziehen.

Tritt nun Z aus der oberen Halbebene über die X-Axe in die untere Halbebene ein, so überschreitet z die gegebene Ellipse; und der zweiblättrigen Fläche, welche über der unteren Halbebene construirt wurde, entspricht der ringförmige Flächenraum zwischen der gegebenen Ellipse mit dem Parameter v_0 und der Ellipse mit dem Parameter

$$v_1 = \frac{5K'\pi}{2K}.$$

Zwei Punkte dieses Ringes sind dadurch ausgezeichnet, dass sie den Verzweigungspunkten $-i$ und $-\beta i$ jener Fläche entsprechen; es sind die Punkte ε_1 und ε_2, wobei nach (8):

$$\frac{K}{\pi} \arcsin \varepsilon_1 - \frac{K}{2} = iK',$$

also:

$$\varepsilon_1 = \sin\left(\frac{iK'\pi}{K} + \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{cosin}\left(\frac{iK'\pi}{K}\right) \tag{16}$$

und

$$\frac{1+\beta}{1-\beta} = \frac{1}{k} = k \sin^2 \operatorname{am}\left(\frac{K}{\pi} \arcsin \varepsilon_2 - \frac{K}{2}\right).$$

Berücksichtigt man (6) und die Relation

$$\sin \operatorname{am}(K + iK') = \frac{1}{k},$$

so folgt hieraus:

$$\frac{K}{\pi} \arcsin \varepsilon_2 - \frac{K}{2} = K + iK',$$

oder:

$$\varepsilon_2 = \sin\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{iK'\pi}{K}\right) = -\operatorname{cosin}\left(\frac{iK'\pi}{K}\right). \tag{17}$$

Die Punkte ε_1 und ε_2 liegen auf der reellen Axe, symmetrisch zum Mittelpunkt der Ellipse.

Ueberschreitet nun z den äusseren Rand des elliptischen Ringes, so tritt Z wieder in die obere Halbebene ($Y > 0$) ein. Letztere ist mit zwei Blättern von Neuem überdeckt zu denken, die mit einander in den Punkten i und βi verzweigt sind, mit den zuerst betrachteten Blättern aber nicht zusammenhängen. Diesen beiden Blättern entspricht in der z-Ebene wieder ein elliptischer Ring, begrenzt durch die Ellipsen

$$v_1 = \frac{5K'\pi}{2K} \quad \text{und} \quad v_2 = \frac{9K'\pi}{2K}.$$

In diesem Ringe liegen die beiden Punkte

$$\varepsilon_3 = \operatorname{cosin}\left(\frac{3iK'\pi}{K}\right), \qquad \varepsilon_4 = -\operatorname{cosin}\left(\frac{3iK'\pi}{K}\right),$$

welche den Punkten i und βi zugeordnet sind, u. s. f. Es ergeben sich über der Halbebene $Y > 0$ und $Y < 0$ abwechselnd zweiblättrige Riemann'sche Flächen, denen je ein durch confocale Ellipsen begrenzter Ring entspricht.

Ebenso verläuft die Fortsetzung der abbildenden Function, wenn z im oberen Blatte der zur Ellipse (10) gehörigen Riemann'schen Fläche den ursprünglichen Rand (die genau über jener Ellipse gelegene Curve) überschreitet, so dass sich ein jeder der beiden ursprünglich über der Halbebene $Y > 0$ construirten Fläche unendlich viele weitere Doppel-Halbebenen, abwechselnd für $Y > 0$ und $Y < 0$ anschliessen.

5. Die Abbildung des Aeusseren einer Ellipse auf die Halbene wird ebenfalls durch eine Gleichung der Form (1) vermittelt; es ist nur die rechte Seite zuvor so abzuändern, dass z für einen bestimmten Punkt $A + Bi$ der Halbebene $Y > 0$ unendlich gross erster Ordnung wird; ferner sind die Brennpunkte nicht besonders zu berücksichtigen, da sich ausserhalb der Ellipse kein Brennpunkt befindet, die Punkte A, B, A_1, B_1 sind daher nicht einzuführen. An Stelle von (1) entsteht so die Gleichung:

$$\int \frac{dz}{\sqrt{z^2 - 1}} = C \int \frac{dZ}{(Z - \Omega)(Z - \Omega_1)} + C',$$

wo $\Omega = A + iB$, $\Omega_1 = A - iB$ gesetzt ist, und durch Ausführung der Integration

$$z + \sqrt{z^2 - 1} = \left(\frac{Z - \Omega_1}{Z - \Omega}\right)^{\alpha} \cdot \beta,$$

wo α und β Constante bedeuten. Damit z unendlich gross erster Ordnung wird für $Z = \Omega$, muss $\alpha = 1$ sein; und wenn der Punkt $z = a$ (Scheitel der Ellipse) dem Punkte $Z = \infty$ entsprechen soll, so folgt

$$\beta = a + \sqrt{a^2 - 1}.$$

Setzt man noch

$$T = \frac{Z - \Omega}{Z - \Omega_1},$$

so ergibt sich die bekannte und vielfach behandelte Abbildung[1])

$$z = \frac{1}{2}\left(T\beta + \frac{1}{\beta T}\right), \tag{18}$$

welche das Aeussere der Ellipse in das Innere eines Kreises conform überführt. Es ist nicht nöthig, auf dieselbe näher einzugehen.

[1]) Vergl. z. B. Holzmüller, Einleitung in die Theorie der isogonalen Verwandtschaften. Leipzig, 1882. S. 140 ff.

II. Hyperbel.

6. Das von einem Hyperbelaste an dessen concaver Seite begrenzte Gebiet der Ebene ist als ein solches zu behandeln, dessen Rand im Unendlichen eine Ecke besitzt; und zwar bilden die beiden an dieser Ecke zusammen stossenden Tangenten des Randes einen Winkel gleich demjenigen, den die Asymptoten der Hyperbel einschliessen ($= \alpha$).

Die Brennpunkte der Hyperbel mögen an den Stellen ± 1 liegen, und zwar der Brennpunkt $+1$ im Innern des abzubildenden Flächenstückes. Demselben möge der Punkt $Z = +i$ in der Halbebene $Y > 0$ entsprechen; dann ergibt sich nach Analogie zu (1) und (2) die Gleichung

$$\int \frac{dz}{\sqrt{z^2 - 1}} = C \int \frac{dZ}{\sqrt{Z^2 + 1}} + C', \tag{19}$$

und durch Integration

$$z \pm \sqrt{z^2 - 1} = \beta \left(Z + \sqrt{Z^2 + 1}\right)^{\gamma}, \tag{20}$$

worin die Constanten β und γ und die zusammengehörigen Vorzeichen der beiden Quadratwurzeln noch zu bestimmen sind.

Um γ zu finden, entwickeln wir z^{-1} nach Potenzen von Z^{-1} mittelst der Gleichung

$$z\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{1}{z^2}}\right) = \beta Z^{\gamma} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{Z^2}}\right)^{\gamma}.$$

Für das obere Zeichen ergibt sich eine Gleichung der Form

$$z^{-1} = Z^{-\gamma} \left(c_0 + c_1 Z^{-2} + c_2 Z^{-4} + \ldots\right), \tag{21}$$

und für das untere Zeichen

$$z^{-1} = Z^{\gamma} \left(c_0' + c_1' Z^{-2} + c_2' Z^{-4} + \ldots\right). \tag{21 a}$$

Im ersten Falle wäre also $\gamma = \frac{\alpha}{\pi}$, im zweiten $\gamma = -\frac{\alpha}{\pi}$; denn an der Stelle $z^{-1} = 0$ bilden die Tangenten des Randes unseres Flächenstückes mit einander den Winkel α, der durch die Abbildung in den Winkel π gestreckt werden soll. Die

Constante β bestimmt sich dadurch, dass dem Brennpunkte $z=1$ der Punkt $Z=i=e^{\frac{\pi i}{2}}$ zugeordnet wurde; wir erhalten im ersten Falle

$$(22)\qquad 1=\beta e^{\frac{\gamma\pi i}{2}}=\beta e^{\frac{a i}{2}}=\beta(a+i\sqrt{1-a^2}),$$

und im andern Falle

$$(22\,\mathrm{a})\qquad 1=\beta\cdot e^{\frac{\gamma\pi i}{2}}=\beta e^{-\frac{a i}{2}}=\beta(a-i\sqrt{1-a^2}).$$

Die Entwicklungen (21) und (21a) beruhen auf den Potenzreihen für $\sqrt{1-\frac{1}{z^2}}$ und $\sqrt{1+\frac{1}{Z^2}}$. Erstere gilt für $x>1$, letztere für $Y>1$ bei reellen Werthen von z, denen rein imaginäre Werthe von Z entsprechen, da im Bilde dieselbe Symmetrie bestehen muss, wie in dem gegebenen Flächenstücke. Macht nun z im positiven Sinne einen halben Umgang um $z=1$, so beschreibt zugleich Z einen halben Umgang um $Z=i$. Für $x>1$ lautet daher die Gleichung (20):

$$(23)\quad x\pm\sqrt{x^2-1}=\beta(iY+\sqrt{1-Y^2})^\gamma=\beta e^{\frac{\gamma\pi i}{2}}(Y+\sqrt{Y^2-1})^\gamma$$

also für $x<1$:

$$x\pm i\sqrt{1-x^2}=\beta e^{\frac{\gamma\pi i}{2}}(Y+i\sqrt{1-Y^2})^\gamma.$$

Lassen wir nun $x=a$, also $Y=0$ werden, so kommt

$$a\pm i\sqrt{1-a^2}=e^{\pm\frac{ai}{2}}=\beta e^{\gamma\pi i}.$$

Das obere Zeichen gilt für den Fall (22), das untere für (22a). In beiden Fällen ist diese Gleichung eine Identität. Wir haben also schliesslich die Abbildungsformel

$$(24)\qquad \frac{z+\sqrt{z^2-1}}{a-\sqrt{a^2-1}}=(Z+\sqrt{Z^2+1})^{\frac{a}{\pi}},$$

wobei die Vorzeichen der Quadratwurzeln durch (23) für $x > 1$ definirt sind. Aendert man die beiden Vorzeichen auf der linken Seite, so muss rechts das Vorzeichen des Exponenten geändert werden. Bei unserer Vorzeichen-Definition entspricht dem Quadranten $X < 0$, $Y > 0$ der Theil des Hyperbel-Flächenstückes, in dem $x > 0$, $y > 0$ ist. Die Auflösung von (24) ergibt:

$$(24\mathrm{a})\quad z = \frac{1}{2}\left\{ e^{-\frac{ai}{2}}\left(Z + \sqrt{Z^2+1}\right)^{\frac{a}{\pi}} + e^{+\frac{ai}{2}}\left(-Z + \sqrt{Z^2+1}\right)^{\frac{a}{\pi}} \right\}.$$

Diese letztere Gleichung lässt deutlich erkennen, dass rein imaginären Werthen von Z reelle Werthe von z entsprechen.

7. Um den Verlauf der durch (24) dargestellten Function über das ursprüngliche Gebiet hinaus zu verfolgen; denken wir uns über der z-Ebene wieder diejenige zweiblättrige Riemann'sche Fläche construirt, welche z_1 als Function von z gemäss der Gleichung

$$(25)\qquad \left(\frac{z+z_1}{2a}\right)^2 + \left(\frac{z-z_1}{2b}\right)^2 = 1$$

darstellt, wo $a^2 + b^2 = 1$. Diese Fläche hat zwei sich aufhebende Verzweigungspunkte für $z = 0$ und zwei einfache Verzweigungen in den Brennpunkten ± 1. Den Brennpunkt $+1$ verbinden wir längs der reellen Axe ($y = 0$) mit dem unendlich fernen Punkte durch eine Uebergangslinie. Im unteren Blatte liegt die gegebene Hyperbel, im oberen unmittelbar darüber eine congruente Hyperbel (vergl. oben Nr. 3). Diese beiden Blätter, begrenzt bez. durch die genannten beiden Hyperbeln, sind durch (24) auf zwei über der Halbebene $Y > 0$ liegende Blätter einer anderen Riemann'schen Fläche conform abgebildet; und die beiden Blätter der letzteren hängen mit einander längs einer Uebergangslinie zusammen, die vom Punkte $Z = i$ längs der Axe $X = 0$ nach dem Punkte $Z = \infty$ verläuft.

Ueberschreitet z die Hyperbel (25), so tritt Z aus der oberen Halbebene in die untere ($Y < 0$) ein und über dieser entsteht eine zweiblätterige Fläche, die der für $Y > 0$ construirten völlig symmetrisch ist, mit derselben aber nur im unteren, nicht auch im oberen Blatte längs der Axe $Y = 0$ zusammenhängt. Dem Rande des oberen Blattes längs dieser Axe entspricht in der z-Ebene eine näher zu bestimmende Curve C; das von dieser Curve und der gegebenen Hyperbel eingeschlossene Flächenstück ist der ursprünglich innerhalb des Hyperbelastes construirten zweiblättrigen Fläche zugeordnet; letztere hat sich bei dieser Zuordnung in eine einblättrige verwandelt, und die Curve C geht aus derjenigen Hyperbel hervor, welche das obere Blatt der ursprünglichen Fläche begrenzt (unmittelbar über der gegebenen Hyperbel liegend); die Curve C wird durch folgende Ueberlegung bestimmt.

Wir setzen zur Abkürzung

$$(26)\qquad P = \left(X + \sqrt{X^2 + 1}\right)^{\frac{\alpha}{\pi}}, \qquad \varepsilon_n = \left(2n - \frac{1}{2}\right)\alpha,$$

wo P eine reelle positive Zahl bedeutet, und bezeichnen mit z_n den allgemeinsten Werth, den die Function (24 a) unter Berücksichtigung ihrer Mehrdeutigkeit annehmen kann; dann wird

$$z_n = \frac{1}{2}(P + P^{-1}) \operatorname{cosin} \varepsilon_n + \frac{1}{2}(P - P^{-1}) \sin \varepsilon_n .$$

Ist also $z_n = x_n + i\, y_n$, so besteht längs der reellen Axe ($Y = 0$) die Identität

$$(27)\qquad \frac{x_n^2}{\cos^2 \varepsilon_n} - \frac{y_n^2}{\sin^2 \varepsilon_n} = 1\,,$$

d. h. die Gleichung einer zu (25) confocalen Hyperbel, die für $n = 0$ mit (25) selbst identisch ist. Der Scheitel der Hyperbel nähert sich mit wachsenden n dem Anfangspunkte, überschreitet denselben und wandert nach links, bis

$$(28)\qquad \varepsilon_n < \pi < \varepsilon_{n+1}\,,$$

um dann wieder auf die rechte Seite überzuspringen, u. s. f. Unsere Curve C ist offenbar durch den Werth $n = 1$ gegeben; den beiden über der unteren Halbebene ($Y < 0$) bezw. innerhalb der Hyperbel (25) ausgebreiteten Blättern, entspricht daher der Flächenstreifen zwischen dem betrachteten Hyperbelaste (25) und dem analogen Aste der für $n = 1$ durch (27) dargestellten confocalen Hyperbel.

Geht Z im oberen Blatte wieder in das Gebiet $Y > 0$, so entstehen hier zwei neue, den früheren congruente Blätter, die vermöge (24) auf einen zweiten Flächenstreifen der z-Ebene abgeleitet sind, der von den beiden für $n = 1$ und $n = 2$ durch (27) dargestellten Hyperbeln begrenzt wird, u. s. f.

Besonders zu beachten ist, wie sich hierbei die von i nach $i\,\infty$, bez. von $-i$ nach $-i\,\infty$ verlaufenden geradlinigen Uebergangslinien dieser Doppel-Halb-Ebenen transformiren. Die Uebergangslinie der ersten zweiblättrigen Fläche ($Y > 0$) ging über in die reelle Axe der z-Ebene für $1 < x < \infty$. Allgemein finden wir aus (24a) als Coordinaten ξ_n, η_n eines Punktes der Uebergangslinie:

$$\xi_n + i\,\eta_n = \frac{1}{2}\,[\operatorname{cosin} \alpha_n\,(Q + Q^{-1}) + i \sin \alpha_n\,(Q - Q^{-1})],$$

also:

$$\frac{\xi_n^2}{\sin^2 \alpha_n} - \frac{\eta_n^2}{\operatorname{cosin}^2 \alpha_n} = 1; \tag{29}$$

dabei ist

$$Q = \left(Y + \sqrt{Y^2 - 1}\right)^{\frac{\alpha}{\pi}}, \quad \alpha_n = 2\,n\,\alpha$$

Den fraglichen Uebergangslinien entprechen daher Hyperbeln, welche ebenfalls zu (25) confocal sind und bez. innerhalb der erwähnten Flächenstreifen liegen. Den Punkten $\pm i$ der Z-Ebene ist die Reihe von Punkten

$$\xi'_n = \operatorname{cosin} \alpha_n, \quad \eta'_n = 0 \tag{30}$$

zugeordnet.

8. Eine besondere Beachtung beansprucht der Flächenstreifen, dessen begrenzende Hyperbeln durch die Gleichung (27) mit dem Index n und die entsprechende mit dem Index $n + 1$

dargestellt werden, falls n durch die Ungleichung (28) bestimmt wird. Dann nämlich liegt die Hyperbel mit dem Index $n+1$ rechts von der Hyperbel mit dem Index n; der fragliche Flächenstreifen aber schliesst sich links an die erstere Hyperbel an, ist an einer noch zu bestimmenden Stelle verzweigt, bedeckt also das Innere des Hyperbelastes mit dem Index n ganz oder theilweise doppelt und dehnt sich in dem zweiten Blatte bis an die Hyperbel mit dem Index $n+1$ aus. Die beiden Blätter gehen längs der reellen Axe in einander über, zwischen dem Punkte $-\infty$ und dem zu bestimmenden Verzweigungspunkte. Dieser Linie entspricht in der Z-Ebene eine Curve, welche durch folgende Rechnung gefunden wird.

Die Auflösung der Gleichung (24) ergibt:

$$Z = \frac{i}{2}\left[\left(z+\sqrt{z^2-1}\right)^{-\frac{\pi}{\alpha}} + \left(z+\sqrt{z^2-1}\right)^{\frac{\pi}{\alpha}}\right].$$

Ist z reell und >1, so ist Z imaginär und abs $Z>1$, wie es nach Nr. 7 sein muss.

Sei $z=x$ und $x<-1$, $x=-\xi$, also $\xi>1$, so wird, wenn m eine ganze Zahl bedeutet

$$\begin{aligned}2Z &= i\,e^{(2m+1)\frac{\pi\pi i}{\alpha}}\left(\xi-\sqrt{\xi^2-1}\right)^{\frac{\pi}{\alpha}}\\ &\quad + i\,e^{-(2m+1)\frac{\pi\pi i}{\alpha}}\left(\xi+\sqrt{\xi^2-1}\right)^{\frac{\pi}{\alpha}}\end{aligned}$$

oder, wenn $R=\xi+\sqrt{\xi^2-1}$ gesetzt wird:

$$(31)\qquad \begin{aligned}2X &= (R-R^{-1})\sin(2m+1)\frac{\pi^2}{\alpha}\\ 2Y &= (R+R^{-1})\operatorname{cosin}(2m+1)\frac{\pi^2}{\alpha},\end{aligned}$$

und hieraus:

$$(32)\qquad \left(\frac{Y}{\operatorname{cosin}(2m+1)\frac{\pi^2}{\alpha}}\right)^2 - \left(\frac{X}{\sin(2m+1)\frac{\pi^2}{\alpha}}\right)^2 = 1.$$

Den Punkten $y = 0$, $x < -1$ der reellen Axe entspricht daher in der Z-Ebene eine Hyperbel, deren Brennpunkte an den Stellen $\pm i$ liegen. Dem Brennpunkte -1 der gegebenen Hyperbel entspricht insbesondere der Scheitel der Hyperbel (32):

$$X = 0\,, \qquad Y = \cos\text{in}\,(2m+1)\frac{\pi^2}{a}\,.$$

Für $m = 0$ ist hierdurch die zunächst gestellte Frage beantwortet: Der gesuchte Verzweigungspunkt des durch die Ungleichung (28) bestimmten zweiblättrigen Flächenstreifens ist mit dem Brennpunkte -1 der gegebenen Hyperbel identisch. Die für $m = 1$ durch (32) dargestellte Hyperbel würde in analoger Weise für einen Flächenstreifen der z-Ebene zu benutzen sein, für den die Indices der begrenzenden Hyperbeln durch die Ungleichung

$$\varepsilon_n < 3\pi < \varepsilon_{n+1}$$

charakterisirt sind, u. s. f.

Ein entsprechendes Verhalten tritt ein, wenn die Ungleichung

$$\varepsilon_n < 2m\pi < \varepsilon_{n+1}$$

erfüllt ist. Der fragliche Flächenstreifen wird zweiblättrig; seine Uebergangslinie erstreckt sich längs der reellen Axe von $x = 1$ in's Unendliche, und ihr entspricht in der Z-Ebene die Hyperbel

$$(33) \qquad \left(\frac{Y}{\cos\text{in}\left(2m\dfrac{\pi^2}{a}\right)}\right)^2 - \left(\frac{X}{\sin\left(2m\dfrac{\pi^2}{a}\right)}\right)^2 = 1\,.$$

9. Sowohl über der Z-Ebene als über der z-Ebene werden sich in der geschilderten Weise unendlich viele Blätter ausbreiten. Nur wenn a ein rationales Vielfaches von π ist, wird die Anzahl der Blätter beiderseitig eine endliche, in dem die abbildende Function eine algebraische wird.

Besonders ausgezeichnet ist der Fall $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Als gegeben erscheint eine gleichseitige Hyperbel (25). Dem Innern des rechts liegenden Astes entspricht conform die obere Halbebene $Y > 0$; und zwar ist sowohl jenes Innere als die Halbebene zweiblättrig zu denken. Der Doppelhalbebene $Y < 0$, deren unteres Blatt sich an das untere Blatt der Doppelhalbebene $Y > 0$ anschliesst, entspricht der Streifen zwischen der gegebenen Hyperbel und der Hyperbel (27), wenn $\varepsilon_n = \frac{3\pi}{4}$ genommen wird; dann fällt aber diese Hyperbel mit dem links liegenden Aste der gegebenen gleichseitigen Hyperbel zusammen. Dem zweiblättrig zu denkenden Innern dieses linken Astes entspricht also wieder ein Blätterpaar der Halbebene $Y > 0$, welches dem ersten Blätterpaare vollkommen congruent ist; man kann daher das obere Blatt des Paares $Y < 0$ längs der reellen Axe direct mit dem oberen Blatte des ersten Paares in Zusammenhang gebracht denken. Jedem Punkte der Halbebene $Y > 0$ entsprechen daher zwei Punkte der z-Ebene, einer im Innern des rechts liegenden Zweiges der gleichseitigen Hyperbel, der andere an symmetrischer Stelle im Innern des links liegenden Astes. Ebenso entsprechen jedem Punkte der Halbebene $Y < 0$ zwei Punkte der z-Ebene, der eine rechts, der andere links von der Axe $x = 0$, welch' letztere jetzt an Stelle der Hyperbel (29) tritt. Jedem Punkte z aber entspricht nur ein Punkt Z. Es ist jetzt nicht mehr nöthig, die betrachteten Flächenstücke zweiblättrig zu denken; und es muss Z eine ganze rationale Function zweiten Grades von z werden. In der That erhält man aus (24a) die vielfach studirte Abbildungsformel[1])

$$(34) \qquad 2z^2 = -i(Z + i).$$

10. Durch einen Hyperbelast wird die z-Ebene in zwei Theile getheilt; der eine Theil liegt an der concaven, der andere

[1]) Vgl. z. B. Holzmüller a. a. O. S. 103 ff.

an der convexen Seite der Hyperbel. Die conforme Abbildung des ersteren (des „Innern") wurde in Vorstehendem behandelt; es fragt sich jetzt, wie der letztere (das „Aeussere" des Hyperbelastes) conform auf die Halbebene abgebildet wird. Da in dem fraglichen Gebiete ein Brennpunkt (nämlich -1) enthalten ist, ergibt unser allgemeiner Ansatz wieder eine Gleichung von der Form (19), wenn man festsetzt, dass dem Brennpunkte -1 der Punkt $+i$ der Halbebene $Y>0$ zugeordnet sein soll. Die Bestimmung der Constanten β und γ in (20) ist aber jetzt eine andere. Da die Asymptoten des begrenzenden Hyperbelastes jetzt den Winkel $2\pi-\alpha$ einschliessen, so erkennt man sofort, dass in den frühern Formeln nur α durch $2\pi-\alpha$ zu ersetzen ist; und somit ergibt sich aus (24):

$$(35)\qquad z+\sqrt{z^2-1} = -e^{\frac{\alpha i}{2}}\left(Z+\sqrt{Z^2+1}\right)^{\frac{2\pi-\alpha}{\pi}}$$

und aus (24a):

$$(35\text{a})\quad z=\frac{-1}{2}\left\{e^{\frac{\alpha i}{2}}\left(Z+\sqrt{Z^2+1}\right)^{\frac{2\pi-\alpha}{\pi}}+e^{-\frac{\alpha i}{2}}\left(-Z+\sqrt{Z^2+1}\right)^{\frac{2\pi-\alpha}{\pi}}\right\}.$$

In der That ist dann

$$z = -1 \qquad \text{für} \quad Z = i,$$

$$z = -\operatorname{cosin}\frac{\alpha}{2} \qquad „ \quad Z = 0.$$

Unsere obigen Erörterungen über das gegenseitige Entsprechen der über beiden Ebenen auszubreitenden Riemann'schen Flächen wiederholen sich jetzt genau in der gleichen Weise. Wir haben Doppel-Halbebenen über der Z-Ebene und Flächenstreifen in der z-Ebene, letztere wieder begrenzt durch die Hyperbeln (27). Ein solcher Streifen dehnt sich jetzt von der ersten Hyperbel, deren linker Ast als Grenze in Betracht kam, über den linken Ast der nächsten Hyperbel hinweg bis zum rechten Aste der letzteren aus und ist somit als zweiblättrig zu denken, so dass sofort beim ersten Streifen, wie bei allen folgenden die Ueberlegungen von Nr. 8 Anwendung finden. Auch die Hyperbeln (29) behalten ihre Bedeutung.

Ist α ein rationales Vielfaches von π, so ist die Function (34) algebraisch. Der einfachste Fall ist derjenige der gleichseitigen Hyperbel $\left(\alpha = \frac{\pi}{2}\right)$. Es wird

$$2z^2 = iZ(4Z^2 + 3). \tag{35}$$

Ueber der z-Ebene haben wir eine dreiblättrige Fläche, die in 4 Theile zu zerlegen ist, über der Z-Ebene eine zweiblättrige Fläche. Der erste Theil ist das gegebene Flächenstück und entspricht der oberen Halbebene $Y > 0$. Der zweite Theil umfasst das Innere des begrenzenden (linken) Astes der gleichseitigen Hyperbel, und zwar in doppelter Belegung, und dehnt sich im zweiten Blatte über diesen Ast nach rechts bis zur Axe $x = 0$ aus (denn es ist hier $\alpha_1 = 0$ in (29), also $\xi_1 = 0$); er ist auf die Halbebene $Y < 0$ abgebildet. Der dritte Theil ist symmetrisch zum zweiten gegen diese Axe und der Halbebene $Y > 0$ zugeordnet. Der vierte Theil ist symmetrisch zum ersten; er besteht aus dem Innern des zweiten (rechts liegenden) Astes der Hyperbel und ist wieder auf die Halbebene $Y < 0$ bezogen.

11. Es erübrigt noch dasjenige Flächenstück in Betracht zu ziehen, welches von den beiden Aesten der Hyperbel eingeschlossen wird. Im Innern desselben befindet sich kein Brennpunkt, so dass an Stelle von (19) die Gleichung

$$\int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = C \int \frac{dZ}{Z} + C' \tag{36}$$

zu benutzen ist, oder

$$z + \sqrt{z^2 - 1} = \beta \cdot Z^{\gamma},$$

wo β und γ neue Constante bedeuten. Unser Gebiet dehnt sich nach zwei verschiedenen Seiten in's Unendliche aus; es ist zu behandeln, als wenn der begrenzende Rand im Punkt $z = \infty$ zwei Ecken bildete, von denen jede den Winkel $\pi - \alpha$ ein-schliesst, wenn α dieselbe Bedeutung hat, wie oben in (24). Bei dem Ansatze (36) entsprechen diesen beiden Ecken die Punkte $Z = 0$ und $Z = \infty$, welche mit Hülfe linearer Transformation durch zwei beliebige andere Punkte der Axe $Y = 0$ ersetzt werden können. Es folgt hieraus, dass

$$\gamma = \frac{\pi - \alpha}{\pi}$$

gesetzt werden muss.

Wie aus den Symmetrie-Verhältnissen hervorgeht, entspricht die Axe $X = 0$ der Axe $x = 0$, während die Axe $y = 0$ durch einen Halbkreis abgebildet wird, dessen Mittelpunkt in $Z = 0$ liegt. Der Radius desselben ist noch willkürlich, wir wählen ihn gleich der Einheit, so dass der Mittelpunkt der Hyperbel ($z = 0$) in den Punkt $Z = i$ übergeht; dem entsprechend muss

$$\beta = e^{\frac{\alpha i}{2}} = a + \sqrt{a^2 - 1}$$

gesetzt werden. Wir erhalten somit:

$$z + \sqrt{z^2 - 1} = e^{\frac{\alpha i}{2}} Z^{\frac{\pi - \alpha}{\pi}}, \tag{37}$$

und aufgelöst:

$$z = \frac{1}{2}\left\{e^{\frac{\alpha i}{2}} Z^{\frac{\pi - \alpha}{\pi}} + e^{-\frac{\alpha i}{2}} Z^{\frac{\alpha - \pi}{\pi}}\right\}. \tag{37a}$$

12. Die Fortsetzung der Abbildung über das ursprüngliche Gebiet hinaus ist wieder durch die Mehrdeutigkeit der Function (37a) gegeben; wir haben allgemein

$$2z = e^{-\left(2n - \frac{1}{2}\right)\alpha i} Z^{\frac{\pi - \alpha}{\pi}} + e^{\left(2n - \frac{1}{2}\right)\alpha i} Z^{\frac{\alpha - \pi}{\pi}}$$

und für reelle Werthe von Z, wenn $P = X^{\frac{\pi - \alpha}{\pi}}$,

$$x = \frac{1}{2}\left(P + P^{-1}\right) \operatorname{cosin}\left(2n - \frac{1}{2}\right)\alpha,$$

$$y = \frac{1}{2}\left(P^{-1} - P\right) \sin\left(2n - \frac{1}{2}\right)\alpha.$$

Dadurch sind wieder gewisse Hyperbeln des zugehörigen confocalen Systems als Begrenzungslinien der auf die Halbebene $Y > 0$ und $Y < 0$ abgebildeten Flächenstücke gegeben, und es wiederholen sich im Wesentlichen die Ueberlegungen von Nr. 7. Zu beachten ist, dass jetzt die Halbebenen der Z-Ebene immer einblättrig zu denken sind. Insbesondere kann ein solches Flächenstück einen Brennpunkt enthalten und den betreffenden Bereich der z-Ebene theilweise doppelt überdecken. Dabei tritt der ausserhalb der Brennpunkte gelegene Theil der x-Axe als Uebergangslinie ein. Um die ihr entsprechende Curve der Z-Ebene zu finden, sei $x > 1$ und

$$Q = (x + \sqrt{x^2 - 1})^{\frac{\pi}{\pi - \alpha}}$$

reell und positiv, dann folgt aus (37) durch Auflösung:

$$X + i\,Y = Q \left(\sin \frac{\pi - \alpha}{2} - i \operatorname{cosin} \frac{\pi - \alpha}{2}\right)^{\frac{\pi}{\pi - \alpha}} \cdot e^{2m\beta i},$$

wenn $\beta = \dfrac{\pi^2}{\pi - \alpha}$ und m eine ganze Zahl bedeutet, also

$$(38) \qquad X = Q \cos 2m\beta, \qquad Y = Q \sin 2m\beta.$$

Hierdurch ist eine gerade Linie dargestellt, welche mit der X-Axe den Winkel $2m\beta$ bildet. Der ausserhalb des Kreises $X^2 + Y^2 = 1$ gelegene Theil derselben $(Q > 1)$ entspricht dem positiven Zeichen von $\sqrt{x^2 - 1}$, der innerhalb gelegene Theil $(Q < 1)$ dem negativen Vorzeichen von $\sqrt{x^2 - 1}$. Dem Schnittpunkte des Kreises mit der Linie (38) entspricht ein Brennpunkt der gegebenen Hyperbel.

Die Abbildung ist wieder algebraisch, wenn α ein rationaler Bruchtheil von π ist. Für die gleichseitige Hyperbel $\left(\alpha = \dfrac{\pi}{2}\right)$ finden wir insbesondere aus (37):

$$z^2 = \frac{(Z + i)^2}{4iZ}.$$

Beide Ebenen sind doppelt überdeckt zu denken. Der ersten oberen Halbebene $Y > 0$ entspricht die Fläche zwischen den beiden Aesten der Hyperbel, gedacht im unteren Blatte. Die daran sich anschliessende untere Halbebene ist auf das doppelt zu denkende Innere des einen Hyperbelastes abgebildet. Das zweite Blatt der Z-Ebene ist in symmetrischer Weise auf die andere Hälfte der über der z-Ebene auszubreitenden Fläche bezogen.

III. Parabel.

13. Bei der Parabel bedarf das Verhalten der Abbildungsfunction im Unendlichen einer genaueren Erörterung. Durch Transformation mit reciproken Radien wird aus dem Innern einer Parabel das Innere eines mit Spitze versehenen Ovals, und diese Spitze geht aus dem unendlich fernen Punkte der Parabel hervor. Sei nämlich die Gleichung der Parabel in der Form

$$(z - z_1)^2 + 4\,p\,(z + z_1) + 4\,p^2 = 0$$

gegeben, so geht dieselbe durch die Substitution

$$z = \frac{1}{\zeta}, \qquad z_1 = \frac{1}{\zeta_1}$$

über in:

$$(\zeta - \zeta_1)^2 + 4\,p\,\zeta\zeta_1\,(\zeta + \zeta_1) - 4\,p^2\,\zeta^2\zeta_1^2 = 0$$

oder

$$p^2\,(\xi^2 + \eta^2)^2 - 2\,p\,(\xi^2 + \eta^2)\,\xi + \eta^2 = 0.$$

Die ξ-Axe ist Tangente des im Anfangspunkt liegenden Rückkehrpunktes; das Oval schneidet ausserdem die ξ-Axe an der Stelle $\xi = \dfrac{p}{2}$. In der Spitze stossen zwei Zweige des Randes unter dem Winkel Null zusammen. Dieser Winkel soll in einen solchen von der Grösse π gestreckt werden; bei der Abbildung von Kreisbogenpolygonen geschieht das bekanntlich dadurch, dass z^{-1} zu $\log Z$ proportional ist, wenn $z = 0$ eine solche Ecke mit dem Winkel Null darstellt, und ihr der Punkt $Z = 0$ zugeordnet wird. In unserem Falle haben wir es mit einer über der z-Ebene ausgebreiteten zweiblättrigen Fläche zu thun; in ihr ist nicht ζ, sondern $\sqrt{\zeta}$ in der Nähe der Stelle $\zeta = 0$ eine unendlich kleine Grösse erster Ordnung. Es muss also $\zeta^{-\frac{1}{2}}$ oder $\sqrt{z}$ in der Nähe dieser Stelle sich verhalten wie $\log Z$ für $Z = 0$.

Wir setzen nun fest, dass dem Brennpunkte $z = p$ der Punkt $Z = i$ der Bildebene und dem Punkte $z = \infty$ der Punkt $Z = \infty$ zugeordnet sei. Dann ergibt unser allgemeiner Ansatz

$$\int \frac{dz}{\sqrt{z-p}} = C \int \frac{dZ}{\sqrt{1+Z^2}} + C', \tag{39}$$

also

$$\sqrt{z-p} = \frac{C}{2} \log (Z + \sqrt{1+Z^2}) + \frac{C'}{2}.$$

Die Y-Axe muss eine Symmetrie-Linie der Abbildung sein; es muss daher der Scheitel $z = \frac{p}{2}$ dem Punkte $Z = 0$ entsprechen, ausserdem dem Punkte $z = \frac{p}{2}$ der Punkt $Z = i$. Dadurch sind C und C' bestimmt, und wir finden

$$\sqrt{z-p} = \frac{\sqrt{2p}}{\pi} \log (Z + \sqrt{1+Z^2}) - i\sqrt{\frac{p}{2}}. \tag{40}$$

Machen wir in (39) die Substitution

$$T^2 = -\frac{Z-i}{Z+i}, \qquad \zeta = z - p,$$

so ergibt sich

$$\frac{1}{2}\int_0^{\zeta} \frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta}} = \frac{i\sqrt{2p}}{\pi} \int_0^{T} \frac{dT}{1+T^2},$$

und wenn noch $p = 2$ gesetzt wird

$$T^2 = \frac{i-Z}{i+Z} = \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}\sqrt{2-z}\right), \tag{41}$$

was im Wesentlichen die von Schwarz gegebene Formel ist.

Die weitere Discussion geschieht jetzt ebenso, wie bei der Ellipse. Führen wir Polarcoordinaten ϱ, ω ein, indem wir setzen

$$z - p = \varrho e^{iw},$$

so zerfällt für reelle Werthe von Z, falls die Mehrdeutigkeit des Logarithmus berücksichtigt wird, die Gleichung (40) in die beiden

$$\sqrt{\varrho} \cdot \cos \frac{w}{2} = \frac{\sqrt{2p}}{\pi} \log (X + \sqrt{1 + X^2})$$

$$\sqrt{\varrho} \cdot \sin \frac{w}{2} = -\sqrt{\frac{p}{2}} + 2n\sqrt{2p}.$$

Aus der zweiten Gleichung folgt durch Quadriren

$$\varrho = \frac{p\,(4n - 1)^2}{1 - \cos w},$$

wo n eine ganze Zahl bedeutet. Der Axe $Y = 0$ ist daher eine unendliche Reihe confocaler Parabeln zugeordnet. Bei Fortsetzung der Abbildungsfunction über das ursprüngliche Gebiet hinaus erscheint die obere bezw. untere Doppelhalbebene abgebildet auf einen von zwei confocalen Parabeln begrenzten Flächenstreifen. Mit geringen Modificationen wiederholen sich somit die in Nr. 4 gemachten Erörterungen.

14. Soll das Aeussere der Parabel auf die Halbebene $Y > 0$ abgebildet werden, so ist zu beachten, dass sich im Innern desselben kein Verzweigungspunkt unserer Riemann'schen Fläche befindet, und dass im Unendlichen eine Ecke mit dem Winkel 2π sich befindet. Unser Ansatz führt daher zu folgender Gleichung:

$$\int \frac{\sqrt{z - p}}{dz} = C \int dZ + C'.$$

Sollen die Punkte $z = 0$ und $z = \frac{p}{2}$ bezw. den Punkten $Z = i$ und $Z = 0$ entsprechen, so finden wir

$$\sqrt{z - p} = \sqrt{p}\, Z + i\sqrt{\frac{p}{2}}.$$

Es ist also z eine ganze quadratische Function von Z, und wir kommen auf eine bereits vielfach behandelte Aufgabe, deren wiederholte Besprechung nicht nothwendig ist.