Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Classe

der

k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.

Band XXVI. Jahrgang 1896.

München.

Verlag der K. Akademie.

1897.

In Commission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).

Ueber partielle Differentialgleichungen II. Ordnung, die sich durch gewöhnliche Differentialgleichungen integrieren lassen.

Von E. v. Weber.

(*Eingelaufen 7. November.*)

In einer Note aus dem Jahre 1870[1]) hat Herr Darboux hinreichende Criterien dafür angegeben, dass eine partielle Differentialgleichung 2. Ordnung in 3 Variabeln sich mit Hülfe von Systemen gewöhnlicher Differentialgleichungen allgemein integrieren lasse. Späterhin hat Herr König[2]) diese Theorie des Näheren dargelegt, und zugleich auf Grund einiger von Herrn M. Lévy[3]) angegebenen Sätze die Behauptung aufgestellt, dass alle Classen partieller Differentialgleichungen 2. Ordnung, deren Integration auf diejenige gewöhnlicher Differentialgleichungen hinauskommt, durch die Darboux'schen Criterien erschöpft werden; doch scheint weder für jene Lévy'schen Sätze, noch für das daran anknüpfende König'sche Theorem ein Beweis bisher veröffentlicht zu sein. In der vorliegenden Mitteilung soll deshalb versucht werden, das letztgenannte Theorem durch geometrische bezw. begriffliche Ueberlegungen zu begründen, indem zunächst die Forderung, dass eine gegebene

---

[1]) Ann. de l'école norm. t. VII, 1870; in meiner Arbeit: „Ueber gewisse Systeme Pfaff'scher Gleichungen" (Sitzungsber. d. k. bayer. Ak. d. Wiss., Bd. XXV, 1895. Heft III), habe ich diese Ansätze zu einer allgemeinen Integrationstheorie der part. Differentialprobleme in 3 Variabeln erweitert.

[2]) Math. Ann. 24.

[3]) Comptes Rendus 75 p. 1094 (1872).

Gleichung 2. Ordnung sich durch gewöhnliche Differentialgleichungen integrieren lasse, auf eine wichtige, von den Charakteristiken der Gleichung zu erfüllende Bedingung zurückgeführt, und sodann der Nachweis geliefert wird, dass diese Bedingung im Wesentlichen mit den Darboux'schen Criterien äquivalent ist. Wir gewinnen solcherweise nicht nur einen Beweis des König'schen Satzes, sondern auch einen tieferen Einblick in die Eigenart des geometrischen Gebildes, das durch eine partielle Differentialgleichung dargestellt wird; daneben finden wir Gelegenheit, die Tragweite der von der Geometrie der Flächenelemente[1]) an die Hand gegebenen Methoden in einer interessanten Anwendung zu prüfen.

1. Es sei gegeben eine partielle Differentialgleichung 2. Ordnung:

$$(1) \qquad f\,(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0,$$

worin z die abhängige, x, y die unabhängigen Variabeln bedeuten, während unter p, q die ersten, unter r, s, t die zweiten Ableitungen von z nach x und y verstanden werden. Die Gleichung (1) integrieren heisst, alle zweifach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten von Wertsystemen $x, y \,.\,.\, t$, d. i. von Flächenelementen 2. Ordnung angeben, welche die Relationen (1), sowie die totalen Differentialgleichungen:

$$(2) \quad dz = p\,dx + q\,dy,\ dp = r\,dx + s\,dy,\ dq = s\,dx + t\,dy$$

identisch erfüllen. Ist nun die Gleichung (1) „mit Hülfe gewöhnlicher Differentialgleichungen" allgemein integrierbar, so lässt sich diese Eigenschaft geometrisch offenbar so aussprechen: „Man erhält die allgemeinste zweifach ausgedehnte Integralmannigfaltigkeit der Gleichung (1) durch passende Aneinanderreihung von je ∞^1 ihrer einfach aus-

---

[1]) Für die Theorie der Flächenelemente höherer Ordnung vgl. ausser den zahlreichen Arbeiten von Lie und Bäcklund noch das Buch von Goursat „Leçons sur l'integration des équations aux dérivées partielles du 2. ordre" Paris 1896, sowie meine Aufsätze in den Math. Ann. 44, 46 und 47.

gedehnten Integralmannigfaltigkeiten, also von Streifen 2. Ordnung, die ihrerseits als Integrale eines gewissen Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$(3)\quad \varphi_j\left(x, y, \ldots t, \frac{dy}{dx}, \ldots \frac{dt}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \ldots\right) = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots)$$

definirt sind, und dieses System muss selber lediglich mit Hülfe gewöhnlicher Differentialgleichungen ermittelt werden können."

2. Ueber die Gleichungen (3) können wir nun sofort folgende nähere Angaben machen. Da die Integrale von (3) Streifen darstellen, deren Elemente die Gleichung (1) befriedigen, müssen die Relationen (2) sowie die folgende:

$$(4)\quad \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz + \ldots + \frac{\partial f}{\partial t}dt = 0$$

unter den Gleichungen (3) enthalten sein. Die linken Seiten der übrigen Relationen (3) aber werden von gewissen arbiträren Funktionen und Parametern abhängen; wird über diese willkürlichen Elemente in einer bestimmten Weise verfügt, so möge das System (3) in das folgende übergehen:

$$(3\text{a})\quad \overline{\varphi}_j(x, y, \ldots) = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots)$$

Je ∞^1 Integralstreifen dieses Systems müssen sich zu einer Integralmannigfaltigkeit von (1) zusammenordnen und die Gleichungen (3) müssen allgemein genug sein, um alle (nicht singulären) Integrale von (1) in dieser Weise zu liefern. Damit aber durch Einführung des Systems (3) in die Rechnung eine wirkliche Vereinfachung des Integrationsgeschäfts erzielt werde, d. h. damit die Ermittelung des Systems (3) nicht ein Problem von ebenso hoher Ordnung sei als die Herstellung des (von zwei arbiträren Funktionen eines Arguments abhängenden) allgemeinen Integrals von (1), werden wir verlangen, dass in die linken Seiten von (3) ausser einer endlichen Zahl von Parametern nur noch die Coefficienten höchstens einer arbiträren Funktion eines Arguments eingehen. Aus der endlichgliedrigen[1]) Schaar von Integralstreifen des einzelnen Systems (3a) muss sich somit eine unendlichgliedrige Schaar zweifach ausgedehnter Integralmannigfaltigkeiten von (1) aufbauen lassen, da sonst die Gesamtheit der Systeme (3a) nicht hinreichen würde, um das allgemeine Integral von (1) in dieser Weise entstehen zu lassen.

3. Ein einzelner Streifen 2. O., der einem bestimmten Systeme (3a) genügt, muss nach dem Vorigen unbegrenzt vielen Integralflächen von (1) angehören; bekanntlich aber kommt nur den „Charakteristiken 2. O.“ der Gleichung (1) diese Eigenschaft zu. Sind die Wurzeln Λ_1, Λ_2 der Gleichung

$$R\Lambda^2 - S\Lambda + T = 0 \quad \left(R = \frac{\partial f}{\partial r} \text{ etc.}\right),$$

wie wir von jetzt ab annehmen, nicht vermöge (1) identisch, so gibt es zwei verschiedene Systeme von Charakteristiken 2. O., die bez. durch die beiden Gruppen von Gleichungen:

$$(5) \quad \left.\begin{array}{l} dy = \Lambda_i dx, \ dz = (p + \Lambda_i q)\, dx, \\ dp = (r + \Lambda_i s)\, dx, \ dq = (s + \Lambda_i t)\, dx \\ R\,dr + (S - R\Lambda_i)\, ds + M\,dx = 0 \\ R\,ds + (S - R\Lambda_i)\, dt + N\,dx = 0 \end{array}\right\} \quad (i = 1, 2)$$

definiert sind,[2]) und deren Individuen kurzweg mit $C_i^{(2)}$ bezeichnet werden sollen. Eines der beiden Systeme (5), etwa das erste, muss somit unter den Relationen (3) enthalten sein,[3]) d. h.: „Die Integrale eines jeden der Systeme (3a) bestehen aus Charakteristiken $C_1^{(2)}$.“

4. Zur Ableitung einer weiteren wichtigen Eigenschaft des Gleichungensystems (3) wollen wir einige Hülfssätze aus der Theorie der Charakteristiken einschalten.

---

[1]) d. h. von einer endlichen Parameterzahl abhängenden.

[2]) $M = \frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial z} + r\frac{\partial f}{\partial p} + s\frac{\partial f}{\partial q}$, $N = \frac{\partial f}{\partial y} + q\frac{\partial f}{\partial z} + s\frac{\partial f}{\partial p} + t\frac{\partial f}{\partial q}$

[3]) Die Relation (4) ist eine Folge von (5),

Durch $\nu - 1$-malige partielle Differentiation von (1) nach x und y erhalte man die ν Gleichungen:

$$(6)\quad A_\varkappa^{(\nu)} \equiv M_\varkappa^{(\nu)} + R\,\alpha_{\varkappa-1}^{(\nu+1)} + S\,\alpha_\varkappa^{(\nu+1)} + T\,\alpha_{\varkappa+1}^{(\nu+1)} = 0 \quad (\varkappa = 1 \,..\, \nu),$$

worin

$$\alpha_i^{(k)} = \frac{\partial^k z}{\partial x^{k-i}\,\partial y^i}$$

gesetzt ist, während unter den $M_\varkappa^{(\nu)}$ gewisse leicht zu bildende Funktionen der Variabeln $x, y, z, p, \,..\, \alpha_\nu^{(\nu)}$ verstanden werden. Es gibt nun für jedes $\nu \geqq 2$ zwei verschiedene Systeme von Charakteristiken ν. O.,[1]) d. h. von Streifen ν. O., welche bez. definiert sind durch die beiden Gleichungssysteme:

$$(7)\left\{\begin{array}{l} dy - \varLambda_i\,dx = 0,\; d\,\alpha_\varkappa^{(\lambda)} - (\alpha_\varkappa^{(\lambda+1)} + \varLambda_i\,\alpha_{\varkappa+1}^{(\lambda+1)})\,dx = 0 \\ R\,d\,\alpha_{\sigma-1}^{(\nu)} + (S - R\,\varLambda_i)\,d\,\alpha_\sigma^{(\nu)} + M_\sigma^{(\nu)}\,dx = 0, \\ (\varkappa = 0, 1, \,..\, \lambda;\; \lambda = 0, 1, \,..\, \nu - 1,\; \sigma = 1 \,..\, \nu)^{2)} \end{array}\right\}(i = 1, 2),$$

und gelegentlich als „Streifen $C_i^{(\nu)}$" bezeichnet werden sollen. Die ∞^1 Flächenelemente ν. O. $x, y, z, p \,..\, \alpha_\nu^{(\nu)}$ eines solchen Streifens befriedigen überdies die sämtlichen $\frac{1}{2}\nu(\nu - 1)$ Relationen

$$(8)\qquad f = 0,\; A_\varkappa^{(\lambda)} = 0,\; (\varkappa = 1 \,..\, \lambda;\; \lambda = 2, 3 \,...\, \nu - 1)$$

5. Wir führen noch historisch die folgenden Sätze[3]) an:

a) Jede (nicht singuläre) Integralfläche von (1) ist von ∞^1 charakteristischen Streifen ν. O. eines jeden der beiden Systeme überdeckt; b) durch jede Charakteristik $C_i^{(\nu)}$ sind ∞^1 sie enthaltende Charakteristiken $C_i^{(\nu+1)}$ bestimmt, und zwar ist die einzelne unter diesen $C_i^{(\nu+1)}$ durch Angabe eines ihrer Flächenelemente $\nu + 1$. O. eindeutig festgelegt; umgekehrt ist auf jedem Streifen $C_i^{(\nu+1)}$ ein ganz

---

[1]) Vgl. meine Arbeit: „Die Charakteristiken der partiellen Differentialgleichungen, Math. Ann. Bd. 47, sowie das pag. 426 citierte Buch von Goursat, Chap. IV.

[2]) Es wird der Kürze halber $\alpha_0^{(0)} = z,\; \alpha_0^{(1)} = p, \,..\, \alpha_2^{(2)} = t$ gesetzt.

[3]) Goursat, l. c. Chap. IV: Math. Ann. 47, pag. 230 ff.

bestimmter Streifen $C_i^{(\nu)}$ gelegen; c) durch je zwei, verschiedenen Systemen angehörige Charakteristiken $C_1^{(\nu)}$, $C_2^{(\nu)}$ geht eine und nur eine Integralfläche der Gleichung (1).

6. Wir denken uns nun einen charakteristischen Streifen ν. Ordnung $\overline{C}_1$ des ersten Systems, sowie ein auf ihm gelegenes Flächenelement ν. O. $\overline{e}$ fest gewählt; eine beliebige Charakteristik ν. O. $\overline{C}_2$ des anderen Systems, die $\overline{e}$ enthält, bestimmt dann nach Satz c) zusammen mit $\overline{C}_1$ eine Fläche V der unendlichgliedrigen Schaar von Integralflächen, die durch $\overline{C}_1$ hindurchgehen, und man erhält auf diesem Wege alle Flächen dieser Schaar. Nach Satz a) kann man sich nun die Charakteristik $\overline{C}_1$ continuirlich so über die Fläche V hin verschoben denken, dass sie in jeder ihrer Lagen wieder eine Charakteristik von (1) darstellt. Sei C_1' eine dieser neuen Lagen, V' irgend eine zweite durch C_1' hindurchgehende Integralfläche, C_1'' eine auf V' verlaufende Charakteristik ν. O., die aus C_1' durch continuirliche Verschiebung über V' hin hervorgeht etc.; durch beliebige Wiederholung dieses Processes gelange man schliesslich zu der Charakteristik C_1. Wir wollen den Uebergang von $\overline{C}_1$ zu C_1 als „Monodromie der Charakteristik $\overline{C}_1$" bezeichnen.

7. Zwei benachbarte Streifen ν. O. sollen „vereinigt liegend" genannt werden, wenn sie beide der gleichen Fläche, oder, was dasselbe ist, dem gleichen Streifen $\nu + 1$. O. angehören. Jede Charakteristik ν. O. $\overline{C}_1$ kann durch „infinitesimale" Monodromie in einfach unendlich viele benachbarte, mit ihr vereinigt liegende Charakteristiken ν. O. übergehen; diese sind bezüglich auf den ∞^1 nach Satz b) durch $\overline{C}_1$ hindurchgehenden charakteristischen Streifen $\nu + 1$. O. gelegen.

8. Zu jedem Streifen 2. O, der eines der Differentialgleichungssysteme (3a) befriedigt, muss es nun eine continuirliche Schaar von Nachbarstreifen geben, die mit ihm vereinigt liegen und demselben System (3a) Genüge leisten; denn gäbe es nur einen oder einige solcher Streifen, so könnte man

durch Aneinanderreihung von ∞^1 Integralstreifen des Systems (3a) nur eine endlichgliederige Schaar von Integralmannigfaltigkeiten der Gleichung (1) gewinnen. Aus den Bemerkungen der letzten zwei Nummern folgt jetzt: „Genügt eine Charakteristik $C_1^{(2)}$ einem der Systeme (3a), so genügen demselben Systeme alle ∞^1 mit ihr vereinigt liegenden Nachbarcharakteristiken, mithin überhaupt alle Charakteristiken, die aus $C_1^{(2)}$ durch Monodromie hervorgehen." Hieraus ergiebt sich nun sofort das folgende

Theorem I. „Damit die Gleichung (1) sich mit Hülfe „gewöhnlicher Differentialgleichungen integrieren „lasse, ist **notwendig**, dass jede einzelne Charakteristik „2. Ordnung wenigstens **eines** der beiden Systeme durch „Monodromie nur eine endlichgliederige Schaar von „Lagen annehme."

9. Wir setzen fortan voraus, dass die zuletzt genannte Bedingung für alle Charakteristiken $C_1^{(2)}$ der Gleichung (1) erfüllt sei. Aus Satz b) schliesst man dann leicht: „Versteht man unter ν irgend eine Zahl > 2, so geht auch jede Charakteristik $C_1^{(\nu)}$ durch Monodromie nur in eine endlichgliedrige Schar von Lagen über; umgekehrt, trifft die letztere Voraussetzung für irgend eine Zahl ν zu, so gilt sie für beliebiges ν." Innerhalb der Mannigfaltigkeit von Lagen nun, in die eine beliebige $C_1^{(2)}$ durch Monodromie übergeführt werden kann, ist unserer Annahme zufolge das einzelne Individuum durch Angabe einer endlichen Anzahl von successiven Flächenelementen 2. Ordnung eindeutig festgelegt; wir bezeichnen diese Anzahl mit $n-1$. Einerseits sind nun durch ein Flächenelement n. O., das den Relationen (8) genügt, gerade $n-1$ auf ihm gelegene successive Elemente 2. O. einer $C_1^{(2)}$ eindeutig mitbestimmt; andererseits existiert eine und nur eine Charakteristik $C_1^{(n)}$, die eine gegebene $C_1^{(2)}$ und ein gegebenes Element n. O. enthält, wie aus Satz b) leicht hervorgeht; hieraus folgert man das

Theorem II. „Hat die Zahl n die angegebene Bedeutung, so geht jede Charakteristik $C_1^{(n)}$ durch Mo-

„nodromie in eine Schaar von Lagen über, innerhalb „deren jedes Individuum durch Angabe eines Flächen-„elementes n. O. eindeutig festgelegt ist.“

10. Wir nehmen an, es lasse sich aus den Gleichungen eines der Systeme (5) durch Multiplication mit geeigneten Funktionen von $x, y, z, p, \ldots \alpha_\nu^{(\nu)}$ und Addition eine Relation der Form

$$dF = 0 \tag{9}$$

ableiten, wo F eine Funktion der Variabeln $x, y, z, p, \ldots \alpha_\nu^{(\nu)}$ bedeutet, die sich vermöge der Beziehungen (8) nicht auf eine blosse Constante reduciert, und wo das Zeichen d sich auf alle in F auftretenden Variabeln bezieht. Wir sagen dann: „Die Definitionsgleichungen (5) der Charakteristiken $C_i^{(\nu)}$ besitzen die integrable Combination (9) oder das Integral $F = \text{const.}$, wenn sich F vermöge der Bedingungen (8) nicht auf eine von den höchsten Ableitungen $\alpha_0^{(\nu)} \ldots \alpha_\nu^{(\nu)}$ freie Form bringen lässt. Da die Funktion F auch dadurch charakterisiert ist, dass der Ausdruck

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \sum_0^\nu{}_k \sum_0^k{}_r \frac{\partial F}{\partial \alpha_r^{(k)}} \alpha_r^{(k+1)} + A_i \left(\frac{\partial F}{\partial y} + \sum_0^\nu{}_k \sum_0^k{}_r \frac{\partial F}{\partial \alpha^{(k)}} \alpha_{r+1}^{(k+1)} \right)$$

vermöge der Relationen (6) und (8) identisch verschwindet [1]), so wäre in dem letztgenannten Fall die Gleichung (9) offenbar eine integrable Combination der Definitionsgleichungen eines der vorhergehenden Systeme von Charakteristiken $C_i^{(\tau)}$ $(\tau < \nu)$.

11. Die Relationen (8) definieren eine gewisse Schaar von Wertsystemen $x, y, z, \ldots \alpha_\nu^{(\nu)}$, die wir kurz als die „Elementmannigfaltigkeit R_ν“ bezeichnen wollen. Es sei $\bar{e}$ irgend ein der Mannigfaltigkeit R_ν angehörendes Flächenelement ν. O. mit den Coordinaten $\bar{x}, \bar{y}, \ldots \bar{\alpha}_\nu^{(\nu)}$. Wenn nun keines der Charakteristikensysteme $C_2^{(2)}, C_2^{(3)} \ldots C_2^{(\nu)}$ ein Integral zulässt [2]), so werden die von $\bar{e}$ auslaufenden charakteristischen Streifen $C_2^{(\nu)}$

[1]) Vgl. meine pag. 425 unter [1]) citierte Mitteilung, Abschnitt II.

[2]) Vgl. indes die zweite Anmerkung pag. 437.

offenbar die gesamte Mannigfaltigkeit R_ν „überstreichen“, d. h. denkt man sich das Element $\bar{e}$ durch continuirliche Verschiebung längs einer von ihm auslaufenden Charakteristik $C_2^{(\nu)}$ in eine neue Lage e', aus dieser durch Verschiebung längs einer andern, von e' auslaufenden Charakteristik $C_2^{(\nu)}$ in eine dritte Lage gebracht etc., so wird es auf diese Weise in alle möglichen Lagen innerhalb R_ν (oder wenigstens innerhalb eines in R_ν enthaltenen Continuums der gleichen Dimensionszahl) übergehen können. Besitzen dagegen die Charakteristikensysteme $C_2^{(2)} \ldots C_2^{(\nu)}$ irgend welche Integrale $F = \text{const.}$ $\Phi = \text{const.} \ldots$, und bezeichnen wir mit $\bar{F}, \bar{\Phi} \ldots$ die Resultate der Substitution der Werte $\bar{x} \ldots \bar{\alpha}_\nu^{(\nu)}$ in $F, \Phi \ldots$ resp., so werden die von $\bar{e}$ auslaufenden Streifen $C_2^{(\nu)}$ nur die Teilmannigfaltigkeit überstreichen können, welche durch die Gleichungen:

$$F = \bar{F}, \ \Phi = \bar{\Phi} \ \ldots$$

aus R_ν ausgeschnitten wird.

12. Es sei nun n wiederum die in N. 9 definierte Zahl, $\bar{e}$ ein der Schaar R_n angehörendes Flächenelement n. O. mit den Coordinaten $\bar{x} \ldots \bar{\alpha}_n^{(n)}$, $\bar{C}_1$ eine von $\bar{e}$ auslaufende Charakteristik n. O. des ersten Systems und $\bar{e}_1$ ihr zu $\bar{e}$ benachbartes Element n. O. Die allgemeinste Lage, in welche $\bar{C}_1$ durch Monodromie übergehen kann, wird nun nach N. 6 in folgender Weise erhalten: man wähle eine beliebige von $\bar{e}$ auslaufende Charakteristik $\bar{C}_2$ des andern Systems und auf ihr ein zweites Element n. O. e', und denke sich diejenige Charakteristik C_1' des ersten Systems construirt, welche e' enthält und auf der durch $\bar{C}_1$ und $\bar{C}_2$ bestimmten Integralfläche verläuft; hierauf wähle man eine beliebige von e' auslaufende Charakteristsk C_2', auf ihr ein Element e'', und erhält wie vorhin eine durch e'' gehende Charakteristik C_1'', welche der durch C_1', C_2' definierten Integralfläche angehört; durch beliebige Wiederholung dieses Verfahrens gelange man schliesslich zu dem Element n. O. e und der von ihm auslaufenden Charakteristik C_1. Es seien $e_1', e_1'' \ldots e_1$ bez. die zu den Elementen $e', e'' \ldots e$ benach-

barten Elemente der Streifen C_1', C_1'' . . C_1. Indem die Charakteristik $\bar{C}_1$ in die neue Lage C_1 übergeht, nimmt gleichzeitig das Elementenpaar $\bar{e}$, $\bar{e}_1$ die neue Lage e, e_1 an, und zwar ist durch Angabe des Elements e das zugehörige Nachbarelement e_1 eindeutig mitbestimmt, da ja der Voraussetzung nach innerhalb der Schaar von Lagen C_1, welche $\bar{C}_1$ durch Monodromie annimmt, jedes Individuum durch ein Element n. O. festgelegt ist. Jedem Element n. O. e, in welches $\bar{e}$ durch Verschiebung längs charakteristischer Streifen des 2. Systems übergehen kann, ist sonach ein ganz bestimmtes Nachbarelement e_1 zugewiesen.

Es gibt nun aber ein und nur ein Element $n+1$. O. der Mannigfaltigkeit R_{n+1}, das die Elemente $\bar{e}$, $\bar{e}_1$, sowie das zu $\bar{e}$ benachbarte Element des Streifens $\bar{C}_2$ enthält; durch dieses Element $n+1$. O. ist nach Satz b) längs $\bar{C}_2$ ein charakteristischer Streifen $n+1$. O. festgelegt, dem oben mit e' bezeichneten Element also ein Element $n+1$. O., mithin auch ein ganz bestimmtes Nachbarelement e_1' zugewiesen u. s. w. Durch Wiederholung dieses Schlusses ergibt sich sofort, dass die vorhin geschilderte Zuordnung der Elemente e, e_1 schon durch Angabe der beiden Nachbarelemente $\bar{e}$, $\bar{e}_1$ vollkommen definirt ist.

13. Es werde nun angenommen, dass die von dem Element $\bar{e}$ ausgehenden Charakteristiken n. O. des zweiten Systems die gesamte Mannigfaltigkeit R_n überstreichen (N. 11); dann ist nach dem Vorigen jedem Element e von R_n ein ganz bestimmtes Nachbarelement e_1 zugeordnet; stellt ferner die Charakteristik C_1 eine der Lagen dar, in welche $\bar{C}_1$ durch Monodromie gebracht werden kann, und ist e irgend eines ihrer Elemente n. O., so enthält sie auch das zu e gehörige Element e_1, ebenso das dem Element e_1 zugewiesene Nachbarelement e_2 u. s. w., d. h. sie wäre nach dem Schlussergebnis der vor. N. durch die Wahl der beiden Nachbarelemente $\bar{e}$, $\bar{e}_1$ und Angabe eines ihrer Elemente e schon eindeutig festgelegt, mit andern Worten: Die endlichgliedrige Schaar von Lagen, in die eine

beliebige Charakteristik $\overline{C}_1$ n. O. durch Monodromie übergehen kann, wäre schon durch Angabe zweier successiver Elemente n. O. $\overline{e}$, $\overline{e}'$ von $\overline{C}_1$ vollkommen definiert, und es gäbe nur einfach unendlich viele derartige Schaaren von Lagen, da ja nur ∞^1 Elemente $\overline{e}'$ existieren, die zu einem gegebenen Element n. O. $\overline{e}$ benachbart und mit ihm auf einer Charakteristik $\overline{C}_1$ gelegen sind. Dies ist aber absurd; denn es würde in diesem Falle die Gleichung (1) überhaupt nur eine endlichgliedrige Schaar von Charakteristiken $C_1^{(n)}$ besitzen. Also können die von irgend einem Element $\overline{e}$ auslaufenden Charakteristiken $C_2^{(n)}$ nicht die ganze Mannigfaltigkeit R_n (auch kein in R_n enthaltenes Continuum gleicher Dimension) überstreichen, und wir haben das

Theorem III. „Besitzt eine partielle Differential- „gleichung 2. Ordnung die Eigenschaft, dass jede ein- „zelne Charakteristik 2. O. des einen Systems durch „Monodromie nur eine endlichgliedrige Schaar von „Lagen annimmt, innerhalb deren jedes Individuum „durch Angabe von $n-1$ successiven Flächenelementen „2. O. festgelegt ist, so existirt in der Reihe der Zahlen „2, 3 . . . n wenigstens eine Zahl ν von der Beschaffen- „heit, dass die Definitionsgleichungen der Charak- „teristiken ν. O. des zweiten Systems eine integrable „Combination zulassen.“

14. Wir behalten die Bezeichnungen der N. 12 bei, und nehmen an, dass die Definitionsgleichungen der Charakteristiken $C_2^{(2)}$, $C_2^{(3)}$ . . $C_2^{(n)}$ irgend welche integrable Combinationen besitzen. Dann wird das Element $\overline{e}$ durch Verschiebung längs charakteristischer Streifen n. O. des 2. Systems eine Schaar von Lagen e annehmen können, welche innerhalb der Mannigfaltigkeit R_n durch ein System von Gleichungen der Form

$$(10) \qquad F = \overline{F}, \ \Phi = \overline{\Phi} \ . \ . \ .$$

definiert ist, und mit $\overline{R}_n$ bezeichnet werde. Durch Angabe des Elements $\overline{e}_1$, das zu $\overline{e}$ benachbart und mit ihm auf einer $C_1^{(n)}$ gelegen ist, wird nach N. 12 jedem Element e von $\overline{R}_n$ ein bestimmtes Nachbarelement e_1 zugewiesen, so zwar, dass die Gesamtheit der Elementenpaare e, e_1 identisch ist mit der Gesamtheit der Lagen, die das Elementenpaar $\overline{e}$, $\overline{e}'$ durch Verschiebung längs charakteristischer Streifen $C_2^{(n)}$ anzunehmen imstande ist. Es sei jetzt $\overline{E}$ irgend ein Element $n+1$. O. der durch die Relationen

$$(11) \quad f=0,\ A_{\varkappa}^{(\lambda)}=0\ (\varkappa=1,2\,..\,\lambda;\ \lambda=2,3\,..\,n)$$

definierten Mannigfaltigkeit R_{n+1}, so sind auf $\overline{E}$ zwei und nur zwei successive Flächenelemente n. O. gelegen, die zusammen einer Charakteristik n. O. $C_1^{(n)}$ angehören können. Bezeichnen wir diese Elemente gerade wieder mit $\overline{e}$, $\overline{e}_1$, ferner die Mannigfaltigkeit von Lagen, in die das Element $\overline{E}$ durch Verschiebung längs charakteristischer Streifen $C_2^{(n+1)}$ übergehen kann, mit $\overline{R}_{n+1}$, dann besteht $\overline{R}_{n+1}$ aus einer Schaar von Elementen $n+1$. O., die man erhält, indem man dem einzelnen Element e von $\overline{R}_n$ entweder die Gesamtheit, oder auch immer nur eines der einfach unendlichen vielen Elemente $n+1$. O. zuweist, welche e selbst und das ihm zugeordnete Nachbarelement e_1 enthalten. Andererseits gibt es zweifach unendlich viele Elemente $n+1$. O., welche ein gegebenes Element n. O. e enthalten und den Relationen (11) Genüge leisten. Mithin ist die Mannigfaltigkeit $\overline{R}_{n+1}$ definiert durch die Relationen (10) (11) und wenigstens eine weitere Gleichung der Form:

$$\Psi(x, y, z, p, \,..\, \alpha_{n+1}^{(n+1)}) = \Psi(\overline{x} \,..\, \overline{\alpha}_{n+1}^{(n+1)}),$$

die sich vermöge (11) nicht auf eine von den höchsten Ableitungen $\alpha_0^{(n+1)} \,..\, \alpha_{n+1}^{(n+1)}$ freie Form bringen lässt. Hieraus folgt das

Theorem IV. „Unter den Voraussetzungen des Theo- „rems III besitzen auch die Definitionsgleichungen der „Charakteristiken $n+1$. O. des zweiten Systems wenig- „stens eine integrable Combination.“

15. Aus den Ergebnissen meiner früheren Mitteilung: „Ueber gewisse Systeme Pfaff'scher Gleichungen“ [1]) erhält man durch geeignete Specialisirung unmittelbar den Satz:

---

[1]) Vgl. die erste Anm. p. 425.

„Gibt es zwei verschiedene Zahlen r, r' von der Beschaffen-„heit, dass die Definitionsgleichungen der Charakteristiken $C_2^{(r)}$ „und $C_2^{(r')}$ je eine integrable Combination zulassen, so kann man „die gegebene Gleichung (1) durch gewöhnliche Differentialgleichungen allgemein integrieren." Aus den citierten Entwickelungen schliesst man auch ohne weiteres, dass unter der gemachten Annahme jede Charakteristik $C_1^{(2)}$ der gegebenen Gleichung durch Monodromie nur eine endlichgliedrige Schaar von Lagen annimmt.[1])

Indem wir diese Resultate mit den Theoremen I, III, IV vergleichen, gewinnen wir schliesslich das

Theorem V. „Die **notwendige** und hinreichende Be-„dingung dafür, dass sich eine partielle Differential-„gleichung 2. Ordnung, deren beide Charakteristiken-„systeme nicht zusammenfallen, mit Hülfe gewöhn-„licher Differentialgleichungen allgemein integrieren „lasse, ist die Existenz zweier verschiedener Zahlen „r, r' von der Eigenschaft, dass die Definitionsglei-„chungen der Charakteristiken sowohl der r. als auch „der r'. Ordnung eines der beiden Systeme je eine inte-„grable Combination besitzen." [2])

---

[1]) Dann gehört nämlich, nach der l. c. gebrauchten Terminologie, jede Charakteristik $C_1^{(r)}$, falls $r > r'$, einem und nur einem „unbeschränkt integrablen Streifensystem $S_0^{(r)}$" an.

[2]) Wir haben im Texte den Fall, dass die gegebene Gleichung (1) in $r, s, t, rt-s^2$ linear ist, der Kürze wegen beiseite gelassen; unter dieser Voraussetzung existieren zwei verschiedene Systeme von charakteristischen Streifen erster Ordnung, und die vorhergehenden Resultate sind nur dahin zu modificieren, dass in Theorem III die Zahl r, in Theorem V die Zahlen r r' auch den Wert eins annehmen können.

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der Bayerischen Akademie der Wissenschaften München

Jahr/Year: 1896

Band/Volume: 1896

Autor(en)/Author(s): Weber Eduard von

Artikel/Article: Ueber Partielle Differentialgleichungen Zweiter Ordnung, die sich durch gewöhnliche Differentialgleichungen integrieren lassen 425-437