Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Classe

der

k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.

Band XXVI. Jahrgang 1896.

München.
Verlag der K. Akademie.
1897.

In Commission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).

Ueber n. Momente von R_i-Complexen im R_r.

Von **S. Kantor.**

(*Eingelaufen 5. Dezember.*)

Die Reye'sche Momententheorie ist wenn nicht der fruchtbarste und am leichtesten zu verfolgende, sicher aber der gründlichste und anschaulichste Formalismus zur Verallgemeinerung der Polarentheorie. In der Uebertragung dieser Reye'schen Theorie auf den R_r begegnet man keinen weiteren Schwierigkeiten als jenen, welche überhaupt die Theorie der algebraischen Functionen von mehreren Variabeln verschliessen.

Nicht so, wenn, was bisher in keiner Weise geschehen, die Methode auf den Raum übertragen wird, der als Element den linearen R_i hat, sie also in die Geometrie der R_i-Mannigfaltigkeiten eingeführt wird, welche mit Fug R_i-Complexe heissen sollen. Ohne mich in Einzelheiten einzulassen, will ich in Kürze die wesentlichsten Principien vorführen, von denen auszugehen sein würde. Insbesondere muss derzeit noch unerörtert bleiben, wie dem Momente eines R_i-Complexes in Bezug auf einen R_{r-i-1}-Complex eine wirkliche metrische Bedeutung gegeben werden könnte.

1. Im R_r sei die Formel, welche das Product der Distanzen zweier R_i, $R_{i'}$ ausdrückt,[1]) als Moment oder als 1. Moment der R_i, $R_{i'}$ bezeichnet, nachdem es noch mit zwei Proportionalitätsfactoren m, m' (Massen) multiplicirt ist.

[1]) D'Ovidio hat für dieses Product den Ausdruck berechnet (Atti dell' Acc. dei Lincei, Roma 1877):

$$m^2\,(RR') = \omega\,\Sigma\, a_{c\ldots d\ldots, g\ldots h\ldots}\, x_{c\ldots}\, y_{d\ldots}\, x_{g\ldots}\, y_{h\ldots}$$

Diese Festsetzung ist hier, wie schon im R_3, eine willkürliche. Rational bekannt sind die Coefficienten einer Gleichung, deren Wurzeln die Distanzen von R_i, $R_{i'}$ sind, im R_3, z. B. die beiden Distanzen zweier Geraden. Alle symmetrischen Functionen dieser Distanzen sind also rational in den Coefficienten des „absolute" und den Coordinaten von R_i, $R_{i'}$ bekannt. Man könnte mithin als 1. Moment eines R_i in Bezug auf $R_{i'}$ irgend eine symmetrische Function der k Distanzen definiren und von hier aus die der Reye'schen Theorie analoge Theorie weiterführen.

Indem ich die obige Festsetzung beibehalte, bezeichne ich als n. Moment von R_i nach $R_{i'}$ die n. Potenz des 1. Momentes oder das Product der n. Potenzen der Distanzen, multiplicirt mit $m\,m'$. Als das n. Moment eines R_i in Bezug auf $\varkappa$ gegebene $R_{i'}$ bezeichne ich die Summe der n. Momente von R_i in Bezug auf die einzelnen $R_{i'}$.

2. Die Formel für das Product der Distanzen wird im R_r nicht linear in den Coefficienten von R_i, $R_{i'}$, wenn i, i' allgemein sind; aber wenn $i + i' = r - 1$, dann wird

$$\text{Mom. } (R, R') = \pm \sqrt{\omega\, a}\, (\Sigma \pm x_c \ldots y_d \ldots) \tag{1}$$

wo $\omega = \dfrac{1}{A\,(x^r x^r)\, A\,(y^r y^r)}$ und die Factoren in diesem Nenner die mit den x, y geränderten Determinanten des absolute sind, a die Determinante der Form A selbst ist. Die Determinante $\Sigma x_c \ldots y_d \ldots$ ist erstreckt über die den R_i bestimmenden Punkte x und die den $R_{i'}$ bestimmenden Punkte y.

Theorem I. Das 1. Moment eines R_i in Bezug auf einen R_{r-i-1} ist eine bilineare Form in den Coordinaten von R_i und in den Coordinaten von R_{r-i-1} und zwar

$$m\, m' \sqrt{\omega\, a}\, \left(\Sigma\, p_{\lambda_1 \ldots \lambda_{i+1}} \cdot p_{\lambda_{i+2} \ldots \lambda_{r+1}}\right) \tag{2}$$

[1]) Die Gerade und der R_i erscheinen hier als Träger eines längs der Geraden oder des R_i erstreckten, individuellen Massenelementes, das sich also nicht wie in der gewöhnlichen Auffassungsweise aus ∞^1 Massenpunkten zusammensetzt.

Wird die eine Variabelnreihe festgehalten und dieses Moment einer homogenen linearen Bedingung unterworfen, so entsteht eine homogene lineare Gleichung in den Variabeln der zweiten Reihe. Also:

Theorem II. Besteht unter den π ersten Momenten eines variablen R_i in Bezug auf eine Anzahl π gegebene R_{r-i-1} eine homogene lineare Gleichung, so beschreibt der R_i einen linearen R_i-Complex.

Ist $\pi = 1$, so kann der lineare Complex kein anderer sein, als der durch den festen R_{r-i-1} als Axe bestimmte singuläre Complex; also:

Theorem III. Verschwindet das 1. Moment eines R_i und eines R_{r-i-1}, so schneiden sich dieselben und schneiden sie sich, so verschwindet das Moment.

Das letztere folgt sofort aus 2), indem in der Determinante der Coordinaten der Punkte x und der Punkte y zwei Colonnen einander gleich werden.

Corollar. Die Coordinaten eines R_i lassen sich also als die Coefficienten eines linearen R_{r-i-1}-Complexes auffassen. Oder:

Theorem IV. Damit ein linearer R_{r-i-1}-Complex ein vollständig singulärer sei, ist nothwendig und hinreichend, dass unter den Coefficienten des Complexes diejenigen Relationen bestehen, welche für die Coordinaten eines R_i gelten.

Ist also

$$\Sigma a_{\lambda_1 \dots \lambda_{r-i}} p_{\lambda_1 \dots \lambda_{r-i}} = 0 \tag{3}$$

die Gleichung des linearen R_{r-i-1}-Complexes, so müssen unter den $a_{\lambda_1 \dots \lambda_{r-i}}$ die bekannten dreigliederigen quadratischen Relationen bestehen, aber nicht jene des R_{r-i-1}, sondern jene des R_i.

Die Coefficienten $a_{\lambda_1 \dots \lambda_{r-i}}$ sollen nun als die Coordinaten des linearen Complexes bezeichnet werden; genügen sie den erwähnten Relationen, so werden sie identisch mit den Coordinaten q seiner Axe.

Werden in Problemen, wo R_i gefragt werden, die erwähnten Relationen weggelassen, so erhält man lineare Complexe bestimmt durch ihre Coordinaten oder Relationen unter denselben; erst wenn die Relationen hinzukommen, bestimmen sich die R_i. Also:

Theorem V. Jedes Problem, das auf Auffindung von R_i abzielt, kann als ein Problem der Auffindung jener linearen R_{r-i-1}-Complexe in einem Complex-Systeme, welche vollständig singulär sind, angesehen werden.[1])

Insbesondere lässt man in 3) die canonischen Relationen, deren Gesammtheit $\Omega = 0$ heisse, unbeachtet, so hat man eine durch lineare Transformationen des R_r unzerstörbare Relation eines linearen R_i-Complexes und eines linearen R_{r-i-1}-Complexes. Also:

Theorem VI. Die in den Coordinaten eines linearen R_i- und eines R_{r-i-1}-Complexes gebildete Form

$$\Sigma a_{\lambda_1 \cdots \lambda_{i+1}} h_{\lambda_{i+2} \cdots \lambda_{r+1}} \tag{4}$$

ist eine simultane Invariante der beiden Complexe.

Verschwindet diese Invariante, so heisst der R_i-Complex zum R_{r-i-1}-Complex conjugirt oder apolar.

Corollar. Im R_{2q+1} kann ein R_q-Complex zu sich selbst apolar sein. Es tritt ein, wenn seine Invariante

$$\Sigma a_{\lambda_1 \cdots \lambda_{q+1}} a_{\lambda_{q+2} \cdots \lambda_{r+1}} \tag{5}$$

verschwindet.

Da die Relation 5) sich aus den Grassmann-Clebsch-d'Ovidioschen Relationen additiv zusammensetzen lässt, so folgt: Jeder lineare R_q-Complex mit singulärem R_q ist im R_{2q+1} zu sich selbst apolar.

In der Weise des Theoremes II kann jeder lineare R_i-Complex dargestellt werden; nur frägt es sich um die niedrigste

---

[1]) Ich bezeichne als vollständig singulär einen R_{r-i-1}-Complex, der einen singulären R_i besitzt, d. h. den alle seine R_{r-i-1} schneiden.

Zahl π, welche man erreichen kann, ohne dass der Complex singulär wird. Für $i = 1$ habe ich dieses Minimum, wenn $r = 2q + 1$, als $q + 1$ gefunden.[1])

3. Theorem VII. Soll das n. Moment eines R_i in Bezug auf π feste R_{r-i-1} verschwinden, so beschreibt R_i einen Complex n. Ordnung, den n. Nullcomplex, der zu den π R_{r-i-1} gehört.

Die Gleichung $\sum\limits_1^{\pi} l\, m_i\, M(R_i R^{(l)}_{r-i-1}) = 0$ wird von der n. Ordnung in den Coefficienten R_i.

Theorem VIII. Jeder R_i-Complex n. Ordnung kann als n. Nullcomplex von $\pi = N_{\binom{r+1}{i+1}, n} + 1$ R_{r-i-1} ausgedrückt werden.

Hier ist $N_{k,n}$ die Anzahl der Bedingungen, welche eine Form n. Ordnung in k homogenen Variabeln bestimmen. Der Beweis liegt in der factischen Bestimmung der Massen, während die R_{r-i-1} noch willkürlich anzunehmen sind.

Zu beachten ist hier, dass die Gleichung des Complexes in der allgemeinsten Weise, d. h. mit Beachtung der Relationen Ω geschrieben werden muss, also

$$F + M_1 P_1 + M_2 P_2 + \ldots + M_l P_l = 0 \qquad 6)$$

worin M_l willkürliche Functionen $(n - 2n_1)$. Ordnung, die P_l aber willkürliche in den Relationen Ω geschriebene Polynome n_1. Ordnung sind.

In der möglichsten Verringerung der Zahl π besteht das berühmte Problem der canonischen Formen, welches für $i = 0$ und $r = 3$, $n = 3$ von Sylvester, Clebsch und Reye gelöst, für $i = 0$ und $r = 3$, $n = 4$ von Reye angebahnt wurde.

Auch hier können die Ω vorerst latent gelassen werden, so dass ein System n. Ordnung von linearen R_{r-i-1}-Complexen entsteht und gilt:

Theorem IX. Jeder R_i-Complex n. Ordnung kann auf unendlich viele Arten als der Ort der singulären

[1]) Cr. J. 1897.

R_i von linearen R_{r-i-1}-Complexen angesehen werden, welche in einem Systeme n. Ordnung von linearen R^{r-i-1}-Complexen enthalten sind.

Deswegen auf unendlich viele Arten, weil eben die rationalen Functionen der Ω in den Coefficienten von F mit eingeschlossen sind.

4. Auch die symbolische Normalform von Clebsch (Math. Ann. Bd. II p. 1 „Ueber die Plücker'schen Complexe") für die R_1-Complexe in R_r lässt sich entsprechend im R_r herstellen, indem man

$$F + \Sigma M P = \left(\Sigma \left| \begin{matrix} a_{\lambda_1} & b_{\lambda_1} & c_{\lambda_1} & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{matrix} \right| p_{\lambda_1 \ldots \lambda_i}\right)^n \tag{7}$$

ansetzt und hierauf die den Relationen Ω entsprechenden Processe $\varDelta$ anwendet.

5. Es seien nun $m\, R_i$ gegeben und ein R_{r-i-1}, behaftet mit Massen (oder Proportionalitätsfactoren). Ich multiplicire die 1. Momente der $m\, R_i$ nach dem R_{r-i-1} und nenne das Product das Moment des m-tupels von R_i nach dem R_{r-i-1}:

$$\prod_{k=1\ldots m} \text{Mom.}\,(R_i^{(k)},\ R_{r-i-1}) \tag{8}$$

Ferner bilde ich für $m\, R_i$ und $\pi\, R_{r-i-1}$ diese Producte bezüglich jedes R_{r-i-1} und addire diese Producte

$$M = \sum_{l=1\ldots\pi} \left(\prod_{k=1\ldots m} \text{Mom.}\ (R_i^{(k)},\ R_{r-i-1}^{(l)}\right) \tag{9}$$

und nenne die Summe das Moment des m-tupels von R_i in Bezug auf die gegebenen R_{r-i-1}.

Seien ferner m andere R_i gegeben, welche ich mit S_i bezeichne und dieselben $\pi\, R_{r-i-1}$, dann bilde ich die eben beschriebene Summe auch für diese:

$$M' = \sum_{l=1\ldots\pi} \left(\prod_{k=1\ldots m} \text{Mom.}\,(S_i^{(k)},\ R_{r-i-1}^{(l)}\right) \tag{10}$$

Ich fasse ferner jeden R_i als einen vollständig singulären R_{r-i-1}-Complex auf und das Product dieser linearen Complexe als einen R_{r-i-1}-Complex m. Ordnung, welcher in m lineare zerfallen ist. Dann sind die Coefficienten der Gleichung dieses Complexes m-linear zusammengesetzt aus den Coordinaten der linearen Complexe, also aus den Coordinaten der R_i.

Bilde ich dann aus den 7) und 8) die lineare Combination $\lambda \cdot M + \mu M'$, bezeichne die Producte der Gleichungen der R_{r-i-1}-Complexe mit F_1, F_1', ihre Combination $\lambda F_1 + \mu F_1'$ mit F, so erweist sich, dass $\lambda M + \mu M'$ proportional ist zu

$$\sum_{l=1\ldots\pi} m_i F^n (R^{(l)}_{r-i-1}) \tag{11}$$

Hierbei bedeutet F^n die Gleichung des R_{r-i-1}-Complexes n. Ordnung in R_{r-i-1}-Coordinaten und $F^n(R^{(l)}_{r-i-1})$ bedeutet, dass man diese variabeln Coordinaten durch die Coordinaten eines der π gegebenen R_{r-i-1} ersetzt hat.[1])

Ich bezeichne 11) als das Moment der πR_{r-i-1} in Bezug auf den R_{r-i-1}-Complex n. Ordnung F.[2])

Wenn in 9) die sämmtlichen m R_i einander gleich werden, so stimmt das Moment mit dem n. Momente dieses R_i nach den πR_{r-i-1} überein. Aus 11) folgt, dass als Summe solcher Momente das Moment jedes Complexes n. Ordnung dargestellt werden kann und daher ist auf andere Art der Reye'sche Satz bewiesen:

Theorem X. Ist ein Massensystem indifferent in Bezug auf seinen n. Nullcomplex, so ist sein Moment Null in Bezug auf jeden R_{r-i-1}-Complex n. Ordnung.

6. Wie bei Reye wird nun definirt als Polarcomplex eines R_i-Complexes k. Ordnung nach einem R_{r-i-1}-Complexe, der

---

[1]) Jene Ableitung, welche Herr Reye in Cr. J. Bd. 78 für dieses Moment gegeben hat, überträgt sich natürlich nicht hierher.

[2]) Für $n = 1$, $\pi = 1$ entsteht das Moment eines R_{r-i-1} in Bezug auf einen linearen R_{r-i-1}-Complex und für $i = r - 2$ beweist man leicht den Satz, dass dieses Moment proportional ist dem Momente des R_{r-i-1} in Bezug auf den Polar-R_i desselben bezüglich des linearen Complexes, wie Herr Klein für $r = 3$ bemerkt hat. Der Satz gilt aber nicht mehr für $i < r - 2$.

n. Nullcomplex eines Massensystemes ist, als Ort der R_{r-i-1}, welche $(n-k)$-fach gezählt, mit dem Complexe k. Ordnung multiplicirt einen Complex n. Ordnung geben, in Bezug auf den das Moment des Massensystemes Null ist. Also:

$$\sum_{l=1\ldots\pi} m_l\, F^k\,(R^{(l)}_{r-i-1})\,(R_i\, R^{(l)}_{r-i-1})^{n-k} = 0 \qquad 12)$$

ist die Gleichung des Polar-R_i-Complexes von $F^k\,(R_{r-i-1})$ in Bezug auf den R_i-Complex n. Ordnung

$$\sum_{l=1\ldots\pi} m_l \text{ Mom. } (R_i\, R^{(l)}_{r-i-1})^n = 0 \qquad 13)$$

In 12) enthalten nämlich die bilinearen Formen als die eine Reihe von Variabeln die Coordinaten des $R^{(l)}_{r-i-1}$, welcher in Massensysteme $(m_1, \ldots m_\pi)$ enthalten ist, und als 2. Reihe von Variabeln die Coefficienten R_{r-i-1}, das sind R_i-Coordinaten $p_{\lambda_1 \ldots \lambda_i}$:

Theorem XI. Durch 12) sind eigentlich unendlich viele Polarcomplexe bestimmt.

Denn in den Coefficienten von 13) sind nach dem zu VIII Gesagten eigentlich noch unbestimmte Grössen (die Coefficienten der Functionen M) implicirt und diese übergehen durch die Operationen für 12) auch in die dortigen Coefficienten. Während aber in 13) diese Unbestimmten verschwinden, wenn die $\Omega = 0$ gesetzt werden, wird dies in 12), da die unbestimmten Coefficienten jetzt in anderen Potenzen und Verbindungen eintreten (wegen der Verminderung der Exponenten von n auf $n-k$), nicht mehr sein, die Unbestimmten bleiben auch mit $\Omega = 0$.

Insbesondere kann nun auch von den Polar-R_i-Complexen eines linearen R_{r-i-1}-Complexes in Bezug auf einen R_i-Complex n. Ordnung gesprochen werden und speciell, wenn der R_{r-i-1}-Complex vollständig singulär ist, von den Polarcomplexen eines R_i in Bezug auf einen R_i-Complex n. Ordnung.

7. Verschwindet 12) identisch, so ist F^k apolar zum n. Nullcomplex des R_{r-i-1}-Massensystemes und es wird (wie bei Reye) bewiesen:

Theorem XII. Das Moment des R_{r-i-1}-Massensystemes ist Null bezüglich aller Complexe n. Ordnung, welche aus einem zum n. Nullcomplexe apolaren R_{r-i-1}-Complexe k. Ordnung und einem ganz willkürlichen R_{r-i-1}-Complexe $(n-k)$. Ordnung bestehen.

Setzt man in 12) $k=n$, so folgt auch noch:

Theorem XIII. Die Bedingung, damit ein R_{r-i-1}-Complex n. Ordnung apolar (conjugirt) sei zum n. Nullcomplexe eines Massensystemes von π gegebenen R_{r-i-1}, ist

$$\sum_{l=1..\pi} m_l F^n (R^{(l)}_{r-i-1}) = 0 \tag{14}$$

Nun sind $m_i\, a^q_{\lambda_1 \dots \lambda_{r-i}}\, a^r_{\dots} \dots$ die Coefficienten des n. Nullcomplexes des Massensystems wie Theorem VIII aussagt, sonach erscheint 14) sofort in der Form:

Theorem XIV. Die Bedingung, damit ein R_i-Complex n. Ordnung $\Sigma\, a_\varkappa\, p_{\lambda_1 \dots \lambda_{i+1}}\, p_{\lambda'_1 \dots \lambda'_{i+1}} \dots p_{\lambda^{(n)}_1 \dots \lambda^{(n)}_{i+1}}$ und ein R_{r-i-1}-Complex n. Ordnung $\Sigma\, \alpha_\varkappa\, p_{\lambda_{i+2} \dots \lambda_{r+1}}\, p_{\lambda'_{i+2} \dots \lambda'_{r+1}} \dots p_{\lambda^{(n)}_{i+2} \dots \lambda^{(n)}_{r+1}}$ conjugirt seien, ist

$$\Sigma\, a_\varkappa\, \alpha_\varkappa = 0 \tag{15}$$

wo $a_\varkappa$, $\alpha_\varkappa$ Coefficienten complementärer Gleichungsglieder sind.

Ich habe hierin die Formen absichtlich n-linear geschrieben. Das Theorem, sowie schon X, XII, XIII und 11) gelten mit ihren Herleitungen auch für nicht symmetrische n-lineare Formen, deren Variablenreihen R_i resp. R_{r-i-1}-Coordinaten sind.

Corollar I. Ein R_i-Complex n. Ordnung Γ ist apolar zu einem R_{r-i-1}-Complexe n. Ordnung, der ein n-fach gezählter vollständig singulärer Complex ist, wenn sein singulärer R_i irgend ein R_i von Γ ist.

Corollar II. Eine n-lineare Form Γ in R_i-Coordinaten ist apolar zu jeder vollständig singulären n-linearen Form in R_{r-i-1}-Coordinaten, deren n singuläre R_i ein Null-$n$tupel von Γ sind.

Es folgt nun auch leicht: Die Polarcomplexe eines linearen Systemes von R_{r-i-1}-Complexen in Bezug auf einen gegebenen R_i-Complex bilden ein lineares System. Die Polarcomplexe eines festen R_{r-i-1}-Complexes in Bezug auf ein lineares System von R_i-Complexen bilden ein lineares System. In jedem Falle bilden alle vorhandenen, zu einem gegebenen R_i-Complexe apolaren Complexe ein lineares System.[1]) — Die Dimension des

1) Auf diesen hier als Folgerungen gebrachten Sätzen beruht eigentlich Herrn Reye's Polarentheorie.

Es gilt ferner das Theorem: Ist eine Schaar von Formen gleichen Grades n in R_i-Coordinaten gegeben und bestimmt man die gesammte Schaar zu der jenen apolaren Formen in R_{r-i-1}-Coordinaten, so haben beide Schaaren dieselben Combinanten und zwar sowohl in R_0-, als R_1-, ... R_{r-1}-Coordinaten.

Sind die gegebenen Formen R_0-Formen, so ist das Theorem bekannt. Aber sowohl dieses specielle als das eben ausgesprochene gelten merkwürdiger Weise auch dann, wenn der Grad der Formen der zweiten Schaar nicht gleich n, sondern willkürlich hoch vorausgesetzt wird.

Die äusserste Verallgemeinerung dürfte jetzt folgende sein:

Ist irgend eine Anzahl Formen in R_0, R_1, . . . R_{r-1}-Coordinaten, also der Art

$$F_\pi(x, p_{\lambda_1 \lambda_2}, \ldots, p_{\lambda_1 \ldots \lambda_{i+1}}, \ldots, u)$$

gegeben und man bestimmt die gesammte Schaar der Formen, welche zu jenen apolar sind, so hat die letztere Schaar dieselben Combinantenformen (sowohl in R_0, als in R_1, . . . R_{r-1}-Coordinaten oder in allen simultan), als die der ersteren Formen.

Hierin braucht sowohl für die Ordnung der Formen der ersten Schaar als der zweiten Schaar eine Beschränkung nicht eingeführt zu werden.

Systemes der Polarcomplexe ist jedoch jetzt nicht gleich der Dimension des Systems aus R_i-Complexen oder R_{r-i-1}-Complexen wie für $i=0$ (Reye), sondern überschreitet diese in Folge der Relationen Ω. —

Hievon und von den letzten Corollaren kann eine Anwendung gemacht werden.

Theorem XV. Zwei lineare, reciprok bezogene ∞^{μ}-Systeme von R_i-Complexen Γ_1, Γ_2, resp. der Ordnungen m_1, m_2 erzeugen einen R_i-Complex Γ der Ordnung m_1+m_2 und dieser ist apolar zu einem gegebenen R_{r-i-1}-Complex G der Ordnung m_1+m_2, dann und nur dann, wenn die vermöge der Conjunction zu G unter Γ_1, Γ_2 hervorgerufene Reciprocität H apolar ist zur gegebenen erzeugenden Reciprocität K.[1])

H ist dadurch definirt, dass je zwei Γ_1, Γ_2, deren Product ein zu G apolarer Complex ist, ein Nullpaar von H sind.

Alle Reciprocitäten K unter beiden Systemen Σ_{μ}, Σ_{μ}' bilden ein lineares System und die erzeugten Γ bilden ebenfalls ein lineares $\infty^{(\mu+1)^2-1}$ System, aus welchem durch die Apolarität zu G ein lineares $\infty^{(\mu+1)^2-2}$-System ausgeschieden wird, dem wieder ein lineares System $\infty^{(\mu+1)^2-2}$ von K zu Grunde liegen muss. Für dieses letztere System können als Constituenten $(\mu+1)^2-1$ vollständig singuläre Reciprocitäten betrachtet werden. Für jede solche ist der erzeugte Complex das Product zweier Γ_1, Γ_2; und ist dieses apolar zu G, so gehört es nach der Definition von H als Paar der Reciprocität H an. Dann ist aber nach Corollar I zu XIV die singuläre K apolar zu H. Für sie gilt also das Theorem und somit für das totale lineare System $\infty^{(\mu+1)^2-2}$ von K.

8. Es erscheint jetzt als specieller Fall von 11), wenn die Form 4) mit einem proportionalen Factor als das Moment des R_i-Complexes und des R_{r-i-1}-Complexes bezeichnet wird.

---

[1]) Der speciellste Fall $i=0$, $\mu=1$, $r=2$ ist von Schlesinger M. A. XXII analytisch bewiesen.

Wird dann der eine Complex festgelassen, werden an Stelle des anderen π verschiedene gesetzt und die so entstehenden n. Momente addirt, so sei diese Summe das n. Moment des R_i-Complexes in Bezug auf die π Complexe.

Theorem XVI. Verschwindet das n. Moment eines linearen R_i-Complexes Γ_i in Bezug auf π gegebene R_{r-i-1}-Complexe, so beschreibt Γ_i ein System n. Ordnung (im Raume der linearen Complexe).

Wenn die den π festen R_{r-i-1}-Complexen zugeteilten Massen variiren, so beschreibt dieses n. Nullsystem selbst wieder ein lineares System.

Theorem XVII. Aus 12) 13) folgen (wenn ohne die Relationen Ω) die Ausdrücke für das zu einem Complexsysteme k. Ordnung (von R_{r-i-1}-Complexen) in Bezug auf ein System n. Ordnung (von R_i-Complexen) polare System von R_i-Complexen.

Auer in Süd-Tirol, April 1896.

An das Vorige schliesst sich passend die Mitteilung einer neuen, fundamentalen Auffassungsweise. Ich sage zunächst:

Theorem XVIII. Sind $J_1, J_2, \ldots J_k, \ldots J_r$ die Weierstrass'schen Invarianten eines Paares von M^2_{r-1}, so bedeutet das Verschwinden von J_k, dass der Tangenten-R_{k-1}-Complex der 1. M^2_{r-1} und der Tangenten-R_{r-k}-Complex der 2. M^2_{r-1} apolar sind im Sinne von Theorem XIV hier oben.

Der rechnerische Ausdruck von J_k erweist sich als Summe $\Sigma\, \alpha \cdot \alpha'$, wo α und α' complementäre Unterdeterminanten der Determinanten J_0 und J_r von M^2_{r-1}, $M^{2'}_{r-1}$ sind. Die sind aber auch die Coefficienten der Complexgleichungen von M^2_{r-1}, $M^{2'}_{r-1}$,[1]) so dass $\Sigma\, \alpha \cdot \alpha'$ der obige Ausdruck 4) ist.

---

[1]) Man erhält diese durch Entwickelung der Φ in Darboux's Abhandlung Liouv. Journ. 1874. Cf. besonders aber Salmon's Geometry of

Ich sage, dass beim Verschwinden von J_k ($J_k = 0$) die beiden M_{r-1}^2 „apolar im k. Range" sind.

Es entsteht die Frage, ob nicht auch bei Punktmannigfaltigkeiten $M_{r-1}^{m_1}$, $M_{r-1}^{m_2}$ k verschiedene Apolaritäten definirt werden können. Dies ist consequent möglich und ich definire:

Zwei Punktvarietäten $M_{r-1}^{m_1}$, $M_{r-1}^{m_2}$ sind „im k. Range apolar", wenn der Complex der Tangenten-R_{k-1} von $M_{r-1}^{m_1}$ und der Complex der Tangenten-R_{r-k} von $M_{r-1}^{m_2}$ „apolar im 1. Range" sind nach der Definition aus Theorem XIV.

Was die Complexgleichungen betrifft, sind sie die Diskriminanten (nach den λ) der Formen

$$f^{(m_1)}\,(x_i^{(1)} + \lambda_1\, x_i^{(2)} + \ldots + \lambda_{k-1}\, x_i^{(k)}) = 0 \qquad 16)$$

$$f^{(m_2)}\,(x_i^{(1)} + \lambda_1\, x_i^{(2)} + \ldots + \lambda_{r-k}\, x_i^{(r-k+1)}) = 0 \qquad 17)$$

so dass diese Diskriminanten nach Division durch die Diskriminante der Form ganze, rationale Functionen der k-gliederigen resp. $(r-k+1)$-gliederigen Determinanten aus den k, resp. $r-k+1$ Reihen von Coordinaten

$$x_i^{(1)}, \ldots . \, x_i^{(k)} \text{ und } x_i^{(1)}, \ldots . \, x_i^{(r-k+1)} \qquad (i = 1, \ldots . \, r+1)$$

werden.

Die Consequenz der Verallgemeinerungen I bis XVII verlangt, dass auch dieser Begriff auf zwei Complexe aus R_i (also R_i-Mannigfaltigkeiten) ausgedehnt werde, die als Ausgangspunkt genommen werden, ohne Tangentencomplexe einer R_0-Mannigfaltigkeit zu sein. Ich nenne Doppelgerade eines R_1-Complexes einen R_1, der in jedem R_2 durch ihn Doppeltangente der in den R_2 entfallenden Strahlencurve des Complexes ist und Doppel-R_i eines R_i-Complexes einen R_i, der in jedem R_{i+1} durch ihn Doppel-R_i der in den R_{i+1} entfallenden R_i-Enveloppe des Complexes ist.

---

three dimensions und verschiedene Arbeiten Klein's. — C. Segre hat in M. A. XXIII bei Behandlung der J_k die obige Bedeutung nicht bemerkt.

Für einen gegebenen R_i-Complex Γ nenne ich seinen Tangential-R_{i+1}-Complex jenen, der die R_{i+1} enthält, in denen der auf den R_{i+1} entfallende R_i-Complex aus Γ einen Doppel-R_i besitzt. Hiemit definire ich nun:

Zwei R_i-Complexe Γ_1, Γ_2 im R_r sind apolar im k. Range, wenn der Tangential-R_{i+k-1}-Complex von Γ_1 und der Tangential-R_{r-i-k}-Complex von Γ_2 apolar im 1. Range sind.

Sein Tangential-R_i-Complex ist hierbei Γ_1 selbst. Ebenso für R_i-Complex Γ_1 und $R_{i'}$-Complex Γ_2.

Kopenhagen, den 18. October 1896.