

# Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Classe

der

k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.

---

Band XXVI. Jahrgang 1896.

---

**München.**

Verlag der K. Akademie.

1897.

In Commission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).

## Ueber $n$ . Momente von $R_i$ -Complexen im $R_r$ .

Von **S. Kantor**.

(Eingelaufen 5. Dezember.)

Die Reye'sche Momententheorie ist wenn nicht der fruchtbarste und am leichtesten zu verfolgende, sicher aber der gründlichste und anschaulichste Formalismus zur Verallgemeinerung der Polarentheorie. In der Uebertragung dieser Reye'schen Theorie auf den  $R_r$  begegnet man keinen weiteren Schwierigkeiten als jenen, welche überhaupt die Theorie der algebraischen Functionen von mehreren Variabeln verschliessen.

Nicht so, wenn, was bisher in keiner Weise geschehen, die Methode auf den Raum übertragen wird, der als Element den linearen  $R_i$  hat, sie also in die Geometrie der  $R_i$ -Mannigfaltigkeiten eingeführt wird, welche mit Fug  $R_i$ -Complexe heissen sollen. Ohne mich in Einzelheiten einzulassen, will ich in Kürze die wesentlichsten Principien vorführen, von denen auszugehen sein würde. Insbesondere muss derzeit noch unerörtert bleiben, wie dem Momente eines  $R_i$ -Complexes in Bezug auf einen  $R_{r-i-1}$ -Complex eine wirkliche metrische Bedeutung gegeben werden könnte.

1. Im  $R_r$  sei die Formel, welche das Product der Distanzen zweier  $R_i, R_i'$  ausdrückt,<sup>1)</sup> als Moment oder als 1. Moment der  $R_i, R_i'$  bezeichnet, nachdem es noch mit zwei Proportionalitätsfactoren  $m, m'$  (Massen) multiplicirt ist.

<sup>1)</sup> D'Ovidio hat für dieses Product den Ausdruck berechnet (Atti dell' Acc. dei Lincei, Roma 1877):

$$m^2 (R R') = \omega \Sigma a_{c \dots d \dots g \dots h \dots} x_c \dots y_d \dots x_g \dots y_h \dots$$

Diese Festsetzung ist hier, wie schon im  $R_3$ , eine willkürliche. Rational bekannt sind die Coefficienten einer Gleichung, deren Wurzeln die Distanzen von  $R_i, R_{i'}$  sind, im  $R_3$ , z. B. die beiden Distanzen zweier Geraden. Alle symmetrischen Functionen dieser Distanzen sind also rational in den Coefficienten des „absolute“ und den Coordinaten von  $R_i, R_{i'}$  bekannt. Man könnte mithin als 1. Moment eines  $R_i$  in Bezug auf  $R_{i'}$  irgend eine symmetrische Function der  $k$  Distanzen definiren und von hier aus die der Reye'schen Theorie analoge Theorie weiterführen.

Indem ich die obige Festsetzung beibehalte, bezeichne ich als  $n$ . Moment von  $R_i$  nach  $R_{i'}$  die  $n$ . Potenz des 1. Momentes oder das Product der  $n$ . Potenzen der Distanzen, multiplicirt mit  $m m'$ . Als das  $n$ . Moment eines  $R_i$  in Bezug auf  $\pi$  gegebene  $R_{i'}$  bezeichne ich die Summe der  $n$ . Momente von  $R_i$  in Bezug auf die einzelnen  $R_{i'}$ .

2. Die Formel für das Product der Distanzen wird im  $R_r$  nicht linear in den Coefficienten von  $R_i, R_{i'}$ , wenn  $i, i'$  allgemein sind; aber wenn  $i + i' = r - 1$ , dann wird

$$\text{Mom. } (R, R') = \pm \sqrt{\omega a} (\Sigma \pm x_c \dots y_d \dots) \quad 1)$$

wo  $\omega = \frac{1}{A(x^r x^r) A(y^r y^r)}$  und die Factoren  $\omega$  in diesem Nenner die mit den  $x, y$  geränderten Determinanten des absolute sind,  $a$  die Determinante der Form  $A$  selbst ist. Die Determinante  $\Sigma x_c \dots y_d \dots$  ist erstreckt über die den  $R_i$  bestimmenden Punkte  $x$  und die den  $R_{i'}$  bestimmenden Punkte  $y$ .

Theorem I. Das 1. Moment eines  $R_i$  in Bezug auf einen  $R_{r-i-1}$  ist eine bilineare Form in den Coordinaten von  $R_i$  und in den Coordinaten von  $R_{r-i-1}$  und zwar

$$m m' \sqrt{\omega a} (\Sigma p_{\lambda_1 \dots \lambda_{i+1}} \cdot p_{\lambda_{i+2} \dots \lambda_{r+1}}) \quad 2)$$

1) Die Gerade und der  $R_i$  erscheinen hier als Träger eines längs der Geraden oder des  $R_i$  erstreckten, individuellen Massenelementes, das sich also nicht wie in der gewöhnlichen Auffassungsweise aus  $\omega^1$  Massenpunkten zusammensetzt.

Wird die eine Variablenreihe festgehalten und dieses Moment einer homogenen linearen Bedingung unterworfen, so entsteht eine homogene lineare Gleichung in den Variablen der zweiten Reihe. Also:

Theorem II. Besteht unter den  $\pi$  ersten Momenten eines variablen  $R_i$  in Bezug auf eine Anzahl  $\pi$  gegebene  $R_{r-i-1}$  eine homogene lineare Gleichung, so beschreibt der  $R_i$  einen linearen  $R_i$ -Complex.

Ist  $\pi = 1$ , so kann der lineare Complex kein anderer sein, als der durch den festen  $R_{r-i-1}$  als Axe bestimmte singuläre Complex; also:

Theorem III. Verschwindet das 1. Moment eines  $R_i$  und eines  $R_{r-i-1}$ , so schneiden sich dieselben und schneiden sie sich, so verschwindet das Moment.

Das letztere folgt sofort aus 2), indem in der Determinante der Coordinaten der Punkte  $x$  und der Punkte  $y$  zwei Columnen einander gleich werden.

Corollar. Die Coordinaten eines  $R_i$  lassen sich also als die Coefficienten eines linearen  $R_{r-i-1}$ -Complexes auffassen. Oder:

Theorem IV. Damit ein linearer  $R_{r-i-1}$ -Complex ein vollständig singulärer sei, ist nothwendig und hinreichend, dass unter den Coefficienten des Complexes diejenigen Relationen bestehen, welche für die Coordinaten eines  $R_i$  gelten.

Ist also

$$\sum a_{\lambda_1 \dots \lambda_{r-i}} p_{\lambda_1 \dots \lambda_{r-i}} = 0 \quad 3)$$

die Gleichung des linearen  $R_{r-i-1}$ -Complexes, so müssen unter den  $a_{\lambda_1 \dots \lambda_{r-i}}$  die bekannten dreigliederigen quadratischen Relationen bestehen, aber nicht jene des  $R_{r-i-1}$ , sondern jene des  $R_i$ .

Die Coefficienten  $a_{\lambda_1 \dots \lambda_{r-i}}$  sollen nun als die Coordinaten des linearen Complexes bezeichnet werden; genügen sie den erwähnten Relationen, so werden sie identisch mit den Coordinaten  $q$  seiner Axe.

Werden in Problemen, wo  $R_i$  gefragt werden, die erwähnten Relationen weggelassen, so erhält man lineare Complexe bestimmt durch ihre Coordinaten oder Relationen unter denselben; erst wenn die Relationen hinzukommen, bestimmen sich die  $R_i$ . Also:

Theorem V. Jedes Problem, das auf Auffindung von  $R_i$  abzielt, kann als ein Problem der Auffindung jener linearen  $R_{r-i-1}$ -Complexe in einem Complex-Systeme, welche vollständig singular sind, angesehen werden.<sup>1)</sup>

Insbesondere lässt man in 3) die canonischen Relationen, deren Gesammtheit  $\Omega = 0$  heisse, unbeachtet, so hat man eine durch lineare Transformationen des  $R_r$  unzerstörbare Relation eines linearen  $R_i$ -Complexes und eines linearen  $R_{r-i-1}$ -Complexes. Also:

Theorem VI. Die in den Coordinaten eines linearen  $R_i$ - und eines  $R_{r-i-1}$ -Complexes gebildete Form

$$\sum a_{\lambda_1 \dots \lambda_{i+1}} h_{\lambda_{i+2} \dots \lambda_{r+1}} \quad 4)$$

ist eine simultane Invariante der beiden Complexe.

Verswindet diese Invariante, so heisst der  $R_i$ -Complex zum  $R_{r-i-1}$ -Complex conjugirt oder apolar.

Corollar. Im  $R_{2q+1}$  kann ein  $R_q$ -Complex zu sich selbst apolar sein. Es tritt ein, wenn seine Invariante

$$\sum a_{\lambda_1 \dots \lambda_{q+1}} a_{\lambda_{q+2} \dots \lambda_{r+1}} \quad 5)$$

verschwindet.

Da die Relation 5) sich aus den Grassmann-Clebsch-d'Ovidioschen Relationen additiv zusammensetzen lässt, so folgt: Jeder lineare  $R_q$ -Complex mit singulärem  $R_q$  ist im  $R_{2q+1}$  zu sich selbst apolar.

In der Weise des Theoremes II kann jeder lineare  $R_i$ -Complex dargestellt werden; nur fragt es sich um die niedrigste

<sup>1)</sup> Ich bezeichne als vollständig singular einen  $R_{r-i-1}$ -Complex, der einen singulären  $R_i$  besitzt, d. h. den alle seine  $R_{r-i-1}$  schneiden.

Zahl  $\pi$ , welche man erreichen kann, ohne dass der Complex singularär wird. Für  $i = 1$  habe ich dieses Minimum, wenn  $r = 2q + 1$ , als  $q + 1$  gefunden.<sup>1)</sup>

3. Theorem VII. Soll das  $n$ . Moment eines  $R_i$  in Bezug auf  $\pi$  feste  $R_{r-i-1}$  verschwinden, so beschreibt  $R_i$  einen Complex  $n$ . Ordnung, den  $n$ . Nullcomplex, der zu den  $\pi$   $R_{r-i-1}$  gehört.

Die Gleichung  $\sum_1^{\pi} m_i M(R_i R_{r-i-1}^{(i)}) = 0$  wird von der  $n$ . Ordnung in den Coefficienten  $R_i$ .

Theorem VIII. Jeder  $R_i$ -Complex  $n$ . Ordnung kann als  $n$ . Nullcomplex von  $\pi = N_{\binom{r+1}{i+1}, n} + 1$   $R_{r-i-1}$  ausgedrückt werden.

Hier ist  $N_{k,n}$  die Anzahl der Bedingungen, welche eine Form  $n$ . Ordnung in  $k$  homogenen Variablen bestimmen. Der Beweis liegt in der factischen Bestimmung der Massen, während die  $R_{r-i-1}$  noch willkürlich anzunehmen sind.

Zu beachten ist hier, dass die Gleichung des Complexes in der allgemeinsten Weise, d. h. mit Beachtung der Relationen  $\Omega$  geschrieben werden muss, also

$$F + M_1 P_1 + M_2 P_2 + \dots + M_l P_l = 0 \quad (6)$$

worin  $M_i$  willkürliche Functionen  $(n - 2n_1)$ . Ordnung, die  $P_i$  aber willkürliche in den Relationen  $\Omega$  geschriebene Polynome  $n_1$ . Ordnung sind.

In der möglichsten Verringerung der Zahl  $\pi$  besteht das berühmte Problem der canonischen Formen, welches für  $i = 0$  und  $r = 3$ ,  $n = 3$  von Sylvester, Clebsch und Reye gelöst, für  $i = 0$  und  $r = 3$ ,  $n = 4$  von Reye angebahnt wurde.

Auch hier können die  $\Omega$  vorerst latent gelassen werden, so dass ein System  $n$ . Ordnung von linearen  $R_{r-i-1}$ -Complexen entsteht und gilt:

Theorem IX. Jeder  $R_i$ -Complex  $n$ . Ordnung kann auf unendlich viele Arten als der Ort der singularären

<sup>1)</sup> Cr. J. 1897.

$R_i$  von linearen  $R_{r-i-1}$ -Complexen angesehen werden, welche in einem Systeme  $n$ . Ordnung von linearen  $R^{r-i-1}$ -Complexen enthalten sind.

Deswegen auf unendlich viele Arten, weil eben die rationalen Functionen der  $\Omega$  in den Coefficienten von  $F$  mit eingeschlossen sind.

4. Auch die symbolische Normalform von Clebsch (Math. Ann. Bd. II p. 1 „Ueber die Plücker'schen Complexe“) für die  $R_1$ -Complexe in  $R_r$  lässt sich entsprechend im  $R_r$  herstellen, indem man

$$F + \Sigma MP = \left( \Sigma \begin{vmatrix} a_{\lambda_1} & b_{\lambda_1} & c_{\lambda_1} & \dots & p_{\lambda_1 \dots \lambda_i} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \end{vmatrix} \right)^n \quad (7)$$

ansetzt und hierauf die den Relationen  $\Omega$  entsprechenden Prozesse  $A$  anwendet.

5. Es seien nun  $m$   $R_i$  gegeben und ein  $R_{r-i-1}$ , behaftet mit Massen (oder Proportionalitätsfactoren). Ich multiplicire die 1. Momente der  $m$   $R_i$  nach dem  $R_{r-i-1}$  und nenne das Product das Moment des  $m$ -tupels von  $R_i$  nach dem  $R_{r-i-1}$ :

$$\text{II Mom. } (R_i^{(k)}, R_{r-i-1}) \quad (8)$$

$k=1 \dots m$

Ferner bilde ich für  $m$   $R_i$  und  $\pi$   $R_{r-i-1}$  diese Producte bezüglich jedes  $R_{r-i-1}$  und addire diese Producte

$$M = \Sigma_{l=1 \dots \pi} \text{II Mom. } (R_i^{(k)}, R_{r-i-1}^{(l)}) \quad (9)$$

und nenne die Summe das Moment des  $m$ -tupels von  $R_i$  in Bezug auf die gegebenen  $R_{r-i-1}$ .

Seien ferner  $m$  andere  $R_i$  gegeben, welche ich mit  $S_i$  bezeichne und dieselben  $\pi$   $R_{r-i-1}$ , dann bilde ich die eben beschriebene Summe auch für diese:

$$M' = \Sigma_{l=1 \dots \pi} \text{II Mom. } (S_i^{(k)}, R_{r-i-1}^{(l)}) \quad (10)$$

$k=1 \dots m$

Ich fasse ferner jeden  $R_i$  als einen vollständig singulären  $R_{r-i-1}$ -Complex auf und das Product dieser linearen Complexe

als einen  $R_{r-i-1}$ -Complex  $m$ . Ordnung, welcher in  $m$  lineare zerfallen ist. Dann sind die Coefficienten der Gleichung dieses Complexes  $m$ -linear zusammengesetzt aus den Coordinaten der linearen Complexes, also aus den Coordinaten der  $R_i$ .

Bilde ich dann aus den 7) und 8) die lineare Combination  $\lambda \cdot M + \mu M'$ , bezeichne die Producte der Gleichungen der  $R_{r-i-1}$ -Complexes mit  $F_1, F_1'$ , ihre Combination  $\lambda F_1 + \mu F_1'$  mit  $F'$ , so erweist sich, dass  $\lambda M + \mu M'$  proportional ist zu

$$\sum_{i=1 \dots \pi} m_i F^n (R_{r-i-1}^{(i)}) \quad (11)$$

Hierbei bedeutet  $F^n$  die Gleichung des  $R_{r-i-1}$ -Complexes  $n$ . Ordnung in  $R_{r-i-1}$ -Coordinaten und  $F^n (R_{r-i-1}^{(i)})$  bedeutet, dass man diese variablen Coordinaten durch die Coordinaten eines der  $\pi$  gegebenen  $R_{r-i-1}$  ersetzt hat.<sup>1)</sup>

Ich bezeichne 11) als das Moment der  $\pi R_{r-i-1}$  in Bezug auf den  $R_{r-i-1}$ -Complex  $n$ . Ordnung  $F'$ .<sup>2)</sup>

Wenn in 9) die sämmtlichen  $m R_i$  einander gleich werden, so stimmt das Moment mit dem  $n$ . Momente dieses  $R_i$  nach den  $\pi R_{r-i-1}$  überein. Aus 11) folgt, dass als Summe solcher Momente das Moment jedes Complexes  $n$ . Ordnung dargestellt werden kann und daher ist auf andere Art der Reye'sche Satz bewiesen:

Theorem X. Ist ein Massensystem indifferent in Bezug auf seinen  $n$ . Nullcomplex, so ist sein Moment Null in Bezug auf jeden  $R_{r-i-1}$ -Complex  $n$ . Ordnung.

6. Wie bei Reye wird nun definit als Polarcomplex eines  $R_i$ -Complexes  $k$ . Ordnung nach einem  $R_{r-i-1}$ -Complexes, der

1) Jene Ableitung, welche Herr Reye in Cr. J. Bd. 78 für dieses Moment gegeben hat, überträgt sich natürlich nicht hierher.

2) Für  $n = 1$ ,  $\pi = 1$  entsteht das Moment eines  $R_{r-i-1}$  in Bezug auf einen linearen  $R_{r-i-1}$ -Complex und für  $i = r - 2$  beweist man leicht den Satz, dass dieses Moment proportional ist dem Momente des  $R_{r-i-1}$  in Bezug auf den Polar- $R_i$  desselben bezüglich des linearen Complexes, wie Herr Klein für  $r = 3$  bemerkt hat. Der Satz gilt aber nicht mehr für  $i < r - 2$ .

$n$ . Nullcomplex eines Massensystemes ist, als Ort der  $R_{r-i-1}$ , welche  $(n-k)$ -fach gezählt, mit dem Complex  $k$ . Ordnung multiplicirt einen Complex  $n$ . Ordnung geben, in Bezug auf den das Moment des Massensystemes Null ist. Also:

$$\sum_{i=1 \dots r} m_i F^k (R_{r-i-1}^{(i)} (R_i R_{r-i-1}^{(i)})^{n-k} = 0 \tag{12}$$

ist die Gleichung des Polar- $R_i$ -Complexes von  $F^k (R_{r-i-1}^{(i)})$  in Bezug auf den  $R_i$ -Complex  $n$ . Ordnung

$$\sum_{i=1 \dots r} m_i \text{Mom.} (R_i R_{r-i-1}^{(i)})^n = 0 \tag{13}$$

In 12) enthalten nämlich die bilinearen Formen als die eine Reihe von Variablen die Coordinaten des  $R_{r-i-1}^{(i)}$ , welcher in Massensysteme  $(m_1, \dots m_r)$  enthalten ist, und als 2. Reihe von Variablen die Coefficienten  $R_{r-i-1}$ , das sind  $R_i$ -Coordinaten  $p_{\lambda_1 \dots \lambda_i}$ :

Theorem XI. Durch 12) sind eigentlich unendlich viele Polarcomplexe bestimmt.

Denn in den Coefficienten von 13) sind nach dem zu VIII Gesagten eigentlich noch unbestimmte Grössen (die Coefficienten der Functionen  $M$ ) implicirt und diese übergehen durch die Operationen für 12) auch in die dortigen Coefficienten. Während aber in 13) diese Unbestimmten verschwinden, wenn die  $\Omega = 0$  gesetzt werden, wird dies in 12), da die unbestimmten Coefficienten jetzt in anderen Potenzen und Verbindungen eintreten (wegen der Verminderung der Exponenten von  $n$  auf  $n-k$ ), nicht mehr sein, die Unbestimmten bleiben auch mit  $\Omega = 0$ .

Insbesondere kann nun auch von den Polar- $R_i$ -Complexen eines linearen  $R_{r-i-1}$ -Complexes in Bezug auf einen  $R_i$ -Complex  $n$ . Ordnung gesprochen werden und speciell, wenn der  $R_{r-i-1}$ -Complex vollständig singular ist, von den Polarcomplexen eines  $R_i$  in Bezug auf einen  $R_i$ -Complex  $n$ . Ordnung.

7. Verschwindet 12) identisch, so ist  $F^k$  apolar zum  $n$ . Nullcomplex des  $R_{r-i-1}$ -Massensystemes und es wird (wie bei Reye) bewiesen:

Theorem XII. Das Moment des  $R_{r-i-1}$ -Massensystemes ist Null bezüglich aller Complexe  $n$ . Ordnung, welche aus einem zum  $n$ . Nullcomplexen apolaren  $R_{r-i-1}$ -Complexen  $k$ . Ordnung und einem ganz willkürlichen  $R_{r-i-1}$ -Complexen  $(n-k)$ . Ordnung bestehen.

Setzt man in 12)  $k = n$ , so folgt auch noch:

Theorem XIII. Die Bedingung, damit ein  $R_{r-i-1}$ -Complex  $n$ . Ordnung apolar (conjugirt) sei zum  $n$ . Nullcomplexen eines Massensystemes von  $\pi$  gegebenen  $R_{r-i-1}$ , ist

$$\sum_{i=1.. \pi} m_i F^n (R_{r-i-1}^{(i)}) = 0 \tag{14}$$

Nun sind  $m_i a_{\lambda_1 \dots \lambda_{r-i}}^i \dots$  die Coefficienten des  $n$ . Nullcomplexes des Massensystemes wie Theorem VIII aussagt, sonach erscheint 14) sofort in der Form:

Theorem XIV. Die Bedingung, damit ein  $R_i$ -Complex  $n$ . Ordnung  $\sum a_x p_{\lambda_1 \dots \lambda_{i+1}} p_{\lambda'_1 \dots \lambda'_{i+1}} \dots p_{\lambda_1^{(n)} \dots \lambda_{i+1}^{(n)}}$  und ein  $R_{r-i-1}$ -Complex  $n$ . Ordnung  $\sum \alpha_x p_{\lambda_{i+2} \dots \lambda_{r+1}} p_{\lambda'_{i+2} \dots \lambda'_{r+1}} \dots p_{\lambda_{i+2}^{(n)} \dots \lambda_{r+1}^{(n)}}$  conjugirt seien, ist

$$\sum a_x \alpha_x = 0 \tag{15}$$

wo  $a_x, \alpha_x$  Coefficienten complementärer Gleichungsglieder sind.

Ich habe hierin die Formen absichtlich  $n$ -linear geschrieben. Das Theorem, sowie schon X, XII, XIII und 11) gelten mit ihren Herleitungen auch für nicht symmetrische  $n$ -lineare Formen, deren Variablenreihen  $R_i$  resp.  $R_{r-i-1}$ -Coordinaten sind.

Corollar I. Ein  $R_i$ -Complex  $n$ . Ordnung  $F$  ist apolar zu einem  $R_{r-i-1}$ -Complexen  $n$ . Ordnung, der ein  $n$ -fach gezählter

vollständig singulärer Complex ist, wenn sein singulärer  $R_i$  irgend ein  $R_i$  von  $F$  ist.

Corollar II. Eine  $n$ -lineare Form  $F$  in  $R_i$ -Coordinaten ist apolar zu jeder vollständig singulären  $n$ -linearen Form in  $R_{r-i-1}$ -Coordinaten, deren  $n$  singuläre  $R_i$  ein Null- $n$  tupel von  $F$  sind.

Es folgt nun auch leicht: Die Polarcomplexe eines linearen Systemes von  $R_{r-i-1}$ -Complexen in Bezug auf einen gegebenen  $R_i$ -Complex bilden ein lineares System. Die Polarcomplexe eines festen  $R_{r-i-1}$ -Complexes in Bezug auf ein lineares System von  $R_i$ -Complexen bilden ein lineares System. In jedem Falle bilden alle vorhandenen, zu einem gegebenen  $R_i$ -Complexe apolaren Complexe ein lineares System.<sup>1)</sup> — Die Dimension des

1) Auf diesen hier als Folgerungen gebrachten Sätzen beruht eigentlich Herrn Reye's Polarentheorie.

Es gilt ferner das Theorem: Ist eine Schaar von Formen gleichen Grades  $n$  in  $R_r$ -Coordinaten gegeben und bestimmt man die gesammte Schaar zu der jenen apolaren Formen in  $R_{r-i-1}$ -Coordinaten, so haben beide Schaaeren dieselben Combinanten und zwar sowohl in  $R_0$ , als  $R_1, \dots, R_{r-1}$ -Coordinaten.

Sind die gegebenen Formen  $R_0$ -Formen, so ist das Theorem bekannt. Aber sowohl dieses specielle als das eben ausgesprochene gelten merkwürdiger Weise auch dann, wenn der Grad der Formen der zweiten Schaar nicht gleich  $n$ , sondern willkürlich hoch vorausgesetzt wird.

Die äusserste Verallgemeinerung dürfte jetzt folgende sein:

Ist irgend eine Anzahl Formen in  $R_0, R_1, \dots, R_{r-1}$ -Coordinaten, also der Art

$$F_{\pi}(x, p_{\lambda_1 \lambda_2}, \dots, p_{\lambda_1 \dots \lambda_{i+1}}, \dots, u)$$

gegeben und man bestimmt die gesammte Schaar der Formen, welche zu jenen apolar sind, so hat die letztere Schaar dieselben Combinantenformen (sowohl in  $R_0$ , als in  $R_1, \dots, R_{r-1}$ -Coordinaten oder in allen simultan), als die der ersteren Formen.

Hierin braucht sowohl für die Ordnung der Formen der ersten Schaar als der zweiten Schaar eine Beschränkung nicht eingeführt zu werden.

Systemes der Polarcomplexe ist jedoch jetzt nicht gleich der Dimension des Systems aus  $R_i$ -Complexen oder  $R_{r-i-1}$ -Complexen wie für  $i = 0$  (Reye), sondern überschreitet diese in Folge der Relationen  $\Omega$ . —

Hievon und von den letzten Corollaren kann eine Anwendung gemacht werden.

Theorem XV. Zwei lineare, reciprok bezogene  $\infty^\mu$ -Systeme von  $R_i$ -Complexen  $\Gamma_1, \Gamma_2$ , resp. der Ordnungen  $m_1, m_2$  erzeugen einen  $R_i$ -Complex  $\Gamma$  der Ordnung  $m_1 + m_2$  und dieser ist apolar zu einem gegebenen  $R_{r-i-1}$ -Complex  $G$  der Ordnung  $m_1 + m_2$ , dann und nur dann, wenn die vermöge der Conjunction zu  $G$  unter  $\Gamma_1, \Gamma_2$  hervorgerufene Reciprocität  $H$  apolar ist zur gegebenen erzeugenden Reciprocität  $K$ .<sup>1)</sup>

$H$  ist dadurch definirt, dass je zwei  $\Gamma_1, \Gamma_2$ , deren Product ein zu  $G$  apolarer Complex ist, ein Nullpaar von  $H$  sind.

Alle Reciprocitäten  $K$  unter beiden Systemen  $\Sigma_\mu, \Sigma'_\mu$  bilden ein lineares System und die erzeugten  $\Gamma$  bilden ebenfalls ein lineares  $\infty^{(\mu+1)^2-1}$  System, aus welchem durch die Apolarität zu  $G$  ein lineares  $\infty^{(\mu+1)^2-2}$ -System ausgeschieden wird, dem wieder ein lineares System  $\infty^{(\mu+1)^2-2}$  von  $K$  zu Grunde liegen muss. Für dieses letztere System können als Constituenten  $(\mu + 1)^2 - 1$  vollständig singuläre Reciprocitäten betrachtet werden. Für jede solche ist der erzeugte Complex das Product zweier  $\Gamma_1, \Gamma_2$ ; und ist dieses apolar zu  $G$ , so gehört es nach der Definition von  $H$  als Paar der Reciprocität  $H$  an. Dann ist aber nach Corollar I zu XIV die singuläre  $K$  apolar zu  $H$ . Für sie gilt also das Theorem und somit für das totale lineare System  $\infty^{(\mu+1)^2-2}$  von  $K$ .

8. Es erscheint jetzt als specieller Fall von 11), wenn die Form 4) mit einem proportionalen Factor als das Moment des  $R_i$ -Complexes und des  $R_{r-i-1}$ -Complexes bezeichnet wird.

<sup>1)</sup> Der speciellste Fall  $i = 0, \mu = 1, r = 2$  ist von Schlesinger M. A. XXII analytisch bewiesen.

Wird dann der eine Complex festgelassen, werden an Stelle des anderen  $\pi$  verschiedene gesetzt und die so entstehenden  $n$ . Momente addirt, so sei diese Summe das  $n$ . Moment des  $R_i$ -Complexes in Bezug auf die  $\pi$  Complexe.

Theorem XVI. Verschwindet das  $n$ . Moment eines linearen  $R_i$ -Complexes  $\Gamma_i$  in Bezug auf  $\pi$  gegebene  $R_{r-i-1}$ -Complexe, so beschreibt  $\Gamma_i$  ein System  $n$ . Ordnung (im Raume der linearen Complexe).

Wenn die den  $\pi$  festen  $R_{r-i-1}$ -Complexen zugetheilten Massen variiren, so beschreibt dieses  $n$ . Nullsystem selbst wieder ein lineares System.

Theorem XVII. Aus 12) 13) folgen (wenn ohne die Relationen  $\Omega$ ) die Ausdrücke für das zu einem Complexsysteme  $k$ . Ordnung (von  $R_{r-i-1}$ -Complexen) in Bezug auf ein System  $n$ . Ordnung (von  $R_i$ -Complexen) polare System von  $R_i$ -Complexen.

Auer in Süd-Tirol, April 1896.

An das Vorige schliesst sich passend die Mitteilung einer neuen, fundamentalen Auffassungsweise. Ich sage zunächst:

Theorem XVIII. Sind  $J_1, J_2, \dots, J_k, \dots, J_r$  die Weierstrass'schen Invarianten eines Paares von  $M_{r-1}^2$ , so bedeutet das Verschwinden von  $J_k$ , dass der Tangenten- $R_{k-1}$ -Complex der 1.  $M_{r-1}^2$  und der Tangenten- $R_{r-k}$ -Complex der 2.  $M_{r-1}^2$  apolar sind im Sinne von Theorem XIV hier oben.

Der rechnerische Ausdruck von  $J_k$  erweist sich als Summe  $\Sigma \alpha \cdot \alpha'$ , wo  $\alpha$  und  $\alpha'$  complementäre Unterdeterminanten der Determinanten  $J_0$  und  $J_r$  von  $M_{r-1}^2$ ,  $M_{r-1}^{2'}$  sind. Die sind aber auch die Coefficienten der Complexgleichungen von  $M_{r-1}^2$ ,  $M_{r-1}^{2'}$  so dass  $\Sigma \alpha \cdot \alpha'$  der obige Ausdruck 4) ist.

1) Man erhält diese durch Entwicklung der  $\phi$  in Darboux's Abhandlung Liouv. Journ. 1874. Cf. besonders aber Salmon's Geometry of

Ich sage, dass beim Verschwinden von  $J_k$  ( $J_k = 0$ ) die beiden  $M_{r-1}^2$  „apolar im  $k$ . Range“ sind.

Es entsteht die Frage, ob nicht auch bei Punktmannigfaltigkeiten  $M_{r-1}^{m_1}, M_{r-1}^{m_2}$   $k$  verschiedene Apolaritäten definirt werden können. Dies ist consequent möglich und ich definire:

Zwei Punktvarietäten  $M_{r-1}^{m_1}, M_{r-1}^{m_2}$  sind „im  $k$ . Range apolar“, wenn der Complex der Tangenten- $R_{k-1}$  von  $M_{r-1}^{m_1}$  und der Complex der Tangenten- $R_{r-k}$  von  $M_{r-1}^{m_2}$  „apolar im 1. Range“ sind nach der Definition aus Theorem XIV.

Was die Complexgleichungen betrifft, sind sie die Diskriminanten (nach den  $\lambda$ ) der Formen

$$f^{(m_1)}(x_i^{(1)} + \lambda_1 x_i^{(2)} + \dots + \lambda_{k-1} x_i^{(k)}) = 0 \quad (16)$$

$$f^{(m_2)}(x_i^{(1)} + \lambda_1 x_i^{(2)} + \dots + \lambda_{r-k} x_i^{(r-k+1)}) = 0 \quad (17)$$

so dass diese Diskriminanten nach Division durch die Diskriminante der Form ganze, rationale Functionen der  $k$ -gliederigen resp.  $(r-k+1)$ -gliederigen Determinanten aus den  $k$ , resp.  $r-k+1$  Reihen von Coordinaten

$$x_i^{(1)}, \dots, x_i^{(k)} \text{ und } x_i^{(1)}, \dots, x_i^{(r-k+1)} \quad (i = 1, \dots, r+1)$$

werden.

Die Consequenz der Verallgemeinerungen I bis XVII verlangt, dass auch dieser Begriff auf zwei Complexe aus  $R_i$  (also  $R_i$ -Mannigfaltigkeiten) ausgedehnt werde, die als Ausgangspunkt genommen werden, ohne Tangentencomplexe einer  $R_0$ -Mannigfaltigkeit zu sein. Ich nenne Doppelgerade eines  $R_i$ -Complexes einen  $R_1$ , der in jedem  $R_2$  durch ihn Doppeltangente der in den  $R_3$  entfallenden Strahlencurve des Complexes ist und Doppel- $R_i$  eines  $R_i$ -Complexes einen  $R_i$ , der in jedem  $R_{i+1}$  durch ihn Doppel- $R_i$  der in den  $R_{i+1}$  entfallenden  $R_i$ -Envelope des Complexes ist.

---

three dimensions und verschiedene Arbeiten Klein's. — C. Segre hat in M. A. XXIII bei Behandlung der  $J_k$  die obige Bedeutung nicht bemerkt.

Für einen gegebenen  $R_i$ -Complex  $\Gamma$  nenne ich seinen Tangential- $R_{i+l}$ -Complex jenen, der die  $R_{i+l}$  enthält, in denen der auf den  $R_{i+l}$  entfallende  $R_i$ -Complex aus  $\Gamma$  einen Doppel- $R_i$  besitzt. Hiemit definire ich nun:

Zwei  $R_i$ -Complexe  $\Gamma_1, \Gamma_2$  im  $R_r$  sind apolar im  $k$ . Range, wenn der Tangential- $R_{i+k-1}$ -Complex von  $\Gamma_1$  und der Tangential- $R_{r-i-k}$ -Complex von  $\Gamma_2$  apolar im 1. Range sind.

Sein Tangential- $R_i$ -Complex ist hierbei  $\Gamma_1$  selbst. Ebenso für  $R_i$ -Complex  $\Gamma_1$  und  $R_r$ -Complex  $\Gamma_2$ .

Kopenhagen, den 18. October 1896.

# ZOBODAT - [www.zobodat.at](http://www.zobodat.at)

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: [Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der Bayerischen Akademie der Wissenschaften München](#)

Jahr/Year: 1896

Band/Volume: [1896](#)

Autor(en)/Author(s): Kantor Seligmann

Artikel/Article: [Ueber N-Momente von Ri-Complexen im Rr 531-544](#)