Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Classe

der

k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.

Band XXVI. Jahrgang 1896.

München.
Verlag der K. Akademie.
1897.

In Commission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).

Ueber die sogenannte Grenze und die Grenzgebiete zwischen Convergenz und Divergenz.

Von **Alfred Pringsheim.**

(Eingelaufen 12. Dezember.)

§ 1. Ueber die Du Bois-Reymond'sche Function $\tau(\alpha)$ als Grenze zwischen Convergenz und Divergenz.

In seinen „Untersuchungen über die Convergenz und Divergenz der Fourier'schen Darstellungsformeln"[1]) hat Du Bois-Reymond eine Function $\tau(\alpha)$ eingeführt,[2]) welche für $\alpha = 0$ ohne Maxima und Minima verschwindet und „die **Grenze der Convergenz und Divergenz** des Integrals:

$$\int_0^\alpha d\,\alpha \cdot \frac{\tau(\alpha)}{\alpha}$$

bildet". Dazu bemerkt er zunächst in einer erläuternden Fussnote: „Die Einführung dieser Function $\tau(\alpha)$ kann als Widerspruch mit dem Schluss angesehen werden, dass es keine Function gibt, welche die Grenze zwischen Convergenz und Divergenz bildet. **Ein Widerspruch ist indessen hier nicht vorhanden.** Die genauere Erörterung dieser etwas subtilen Frage werde ich demnächst an anderem Orte geben.[3]) Hier nur in Kürze die Andeutung, dass die Function τ zu den von der

[1]) Abh. d. bayer. Akad. d. W., Cl. II, Bd. XII (1876).

[2]) A. a. O. Einleitung, p. XV.

[3]) Dies ist, so viel ich weiss, leider nicht geschehen.

Seite der Divergenz wie von der Seite der Convergenz her sich ihr nähernden Functionen in ähnlicher Beziehung steht, wie der Kreis zu den ihm umschriebenen und eingeschriebenen Linien ....“

Dies mag auf den ersten Blick ganz plausibel erscheinen, auch wenn man davon absieht, dass das zur Erläuterung herangezogene Beispiel des Kreises als Grenze der umschriebenen und eingeschriebenen Polygone durchaus unpassend gewählt ist. Denn der Kreis kann unabhängig von jenem Grenz-Processe reingeometrisch oder analytisch vollständig definirt werden: derselbe erscheint also bei dem fraglichen Grenz-Processe als ein a priori schon vorhandenes Object, welches lediglich zu einer unendlichen Folge von umschriebenen oder eingeschriebenen Polygonen in eine gewisse Beziehung gesetzt wird, genau so, wie z. B. die rationale Grenze eines unbegrenzten periodischen Decimalbruches zu der betreffenden Folge von endlichen Decimalbrüchen.

Im übrigen führt gerade diese letzte Bemerkung unmittelbar auf ein völlig zutreffendes Analogon, nämlich die Einführung der Irrationalzahlen auf Grund der Cantor'schen Definitions-Methode.[1]) Hier wird einer passend gewählten unbegrenzten Folge von rationalen Zahlen (z. B. einem nicht-periodischen unbegrenzt fortsetzbaren Decimalbruche) ein neues Zahlzeichen und damit eine neue Zahl zugeordnet und als Grenze jener Folge von Rationalzahlen bezeichnet. Dieser neuen Zahl können dann bestimmte Eigenschaften nur in der Weise beigelegt werden, dass dieselben durch entsprechende Eigen-

---

[1]) Du Bois-Reymond verwirft freilich in seiner „Allgemeinen Functionen-Theorie“ (Tübingen 1882) jene „rein formale“ Auffassungsweise des Zahlbegriffes (a. a. O. p. 55), ohne aber etwas besseres oder überhaupt nur brauchbares an deren Stelle zu setzen. Weder der Du Bois-Reymond'sche „Idealist“, noch sein „Empirist“ gelangen zu einer arithmetisch-strengen Definition des allgemeinen Zahlbegriffes. Was im übrigen bei dieser angeblich „philosophischen“, schwerlich aber „mathematischen“ Betrachtungsweise herauskommt, davon liefert die genauere Untersuchung der in Rede stehenden Function $\tau(a)$ ein beredtes Beispiel.

schaften der betheiligten rationalen Zahlen definirt werden. So gilt z. B. jene neue Zahl (Irrationalzahl) als positiv, wenn alle Terme der definirenden Zahlenfolge von irgend einem bestimmten ab über einer gewissen positiven Zahl liegen; sie heisst grösser als irgend eine rationale Zahl a, wenn alle Terme von irgend einem bestimmten ab $\geqq a + \varepsilon$ sind (wo $\varepsilon > 0$), u. s. f.

In analoger Weise kann man einer passend gewählten unbegrenzten Functionen-Folge ein neues Functions-Zeichen zuordnen und gelangt damit zur Einführung einer neuen, etwa als Grenz-Function jener Folge zu bezeichnenden Function, sobald es gelingt, für jenes neue Functions-Zeichen bestimmte Eigenschaften, Grössen-Beziehungen, Rechnungs-Operationen durch diejenigen zu definiren, welche den einzelnen Individuen der betreffenden Functionen-Folge zukommen. In diesem Sinne kann man z. B. e^x als Grenz-Funktion der Folge:

$$\left(1+\frac{x}{1}\right)^1, \left(1+\frac{x}{2}\right)^2, \ldots \left(1+\frac{x}{\nu}\right)^\nu, \ldots\ldots$$

oder lg x als Grenz-Function der Folge:

$$1\cdot(\sqrt[1]{x}-1),\ 2\cdot(\sqrt[2]{x}-1),\ \ldots\ \nu\cdot(\sqrt[\nu]{x}-1),\ \ldots$$

einführen.

Von einem Versuche, die fragliche Function $\tau(\alpha)$ in solcher Weise wirklich zu definiren, ist nun freilich bei Du Bois-Reymond mit keinem Worte die Rede. Er sagt darüber lediglich Folgendes:[1])

„Wenn man die Grenze zwischen Convergenz und Divergenz auch nicht wirklich darstellen kann, so hindert dies nicht, in den Calcul eine **ideale** Function $\tau(\alpha)$ einzuführen, von solcher Beschaffenheit, dass das Integral

---

[1]) A. a. O. p. 45.

$$\int_0^a d\alpha \cdot \frac{\tau(\alpha)}{\alpha}$$

convergirt, dass aber jedes Integral

$$\int_0^a d\alpha \cdot \frac{\varphi(\alpha)}{\alpha}$$

divergirt, in welchem $\varphi(\alpha) > \tau(\alpha)$ gedacht sind."

Ich muss bekennen, dass ich von einer solchen „idealen" Function keine rechte Vorstellung habe. Angenommen aber, sie liesse sich in dem oben bezeichneten Sinne wirklich definiren, so kann man nach einer bekannten Methode sofort auch Functionen $\tau_1(\alpha) > \tau(\alpha)$ (und sogar: $\tau_1(\alpha) \succ \tau(\alpha)$) herstellen, für welche das Integral:

$$\int_0^a d\alpha \cdot \frac{\tau_1(\alpha)}{\alpha}$$

ebenfalls noch convergirt: alsdann stellt aber $\tau(\alpha)$ nicht die praetendirte Grenze zwischen Convergenz und Divergenz dar.

Hiernach erscheint die Einführung einer solchen Function $\tau(\alpha)$ unzulässig, nicht deshalb, weil sie durch bekannte Functionen nicht dargestellt werden kann, sondern weil die blosse Annahme ihrer Existenz auf einen logischen Widerspruch führt.

Man könnte nun etwa zur Rettung dieser Function $\tau(\alpha)$ auf die Riemann'schen Flächen hinweisen, deren sich gegenseitig durchsetzende Blätter zwar nicht mit unseren Denkgesetzen, aber, genau genommen, mit unserem[1]) geometrischen Vorstellungs-Vermögen im Widerspruche stehen. Man tolerirt aber diesen Widerspruch lediglich wegen des praktischen Nutzens, welchen die fragliche Fiction der Functionen-Theorie thatsächlich gestiftet hat. Ein solcher ist ihr jedoch aus der Einführung der Function $\tau(\alpha)$ bisher nicht

---

[1]) Vielleicht auch nur mit dem meinigen?

erwachsen[1]) und steht auch kaum zu erhoffen: in Folge dessen liegt auch keinerlei Grund vor, die so wunderbar vollkommene und präcise Sprache der Analysis durch dergleichen „ideale" Zuthaten zu verunzieren.

§ 2. Ueber Grenzgebiete zwischen Convergenz und Divergenz.

Während sich die Annahme einer Grenze zwischen der Convergenz und Divergenz des Integrals

$$\int_0^a d\alpha \cdot \frac{\varphi(\alpha)}{\alpha}$$

als unzulässig erwiesen hat, kann man in gewissem Sinne von Grenzgebieten zwischen der Convergenz und Divergenz eines solchen Integrales reden. Der Sinn und die Tragweite dieses Begriffes soll jetzt einer genaueren Untersuchung unterworfen werden und zwar will ich dieselbe, um sie möglichst elementar zu gestalten, zunächst nicht für ein bestimmtes Integral, sondern für eine unendliche Reihe führen. Dabei kann es sich selbstverständlich lediglich um Reihen mit lauter gleichbezeichneten (etwa positiven) und monoton gegen Null abnehmenden Gliedern handeln, da für andere Reihen (geradeso wie für bestimmte Integrale von Functionen mit unendlich vielen Maximis und Minimis) die Möglichkeit derartiger Betrachtungen a priori ausgeschlossen erscheint.

Es seien nun c_ν, d_ν ($\nu = 0, 1, 2, \ldots$) zwei monoton gegen Null abnehmende Folgen positiver Zahlen von der Beschaffenheit, dass Σc_ν convergirt, Σd_ν divergirt und dass $d_\nu > c_\nu$

[1]) Du Bois-Reymond sagt hierüber — am Schlusse der oben citirten Fussnote — selbst Folgendes: „**Praktisch** braucht man übrigens unter τ nicht die Grenze der Convergenz und Divergenz selbst sich vorzustellen, sondern es genügt, darunter eine Function sich zu denken, die der Grenze näher liegt, als alle anderen in den gerade vorgelegten Calcul eingehenden."

für jedes endliche ν, $\lim\limits_{\nu=\infty} \dfrac{d_\nu}{c_\nu} = \infty$. Nach bekannten Sätzen aus der Reihenlehre[1]) können hierbei die c_ν und d_ν als „beliebig nahe" an einander liegend angenommen werden, d. h. so, dass der Quotient $\dfrac{d_\nu}{c_\nu}$ mit unbegrenzt wachsenden Werthen von ν beliebig langsam ins Unendliche wächst.

Bedeutet jetzt a_ν ($\nu = 0, 1, 2, \ldots$) eine andere positive, monotone Zahlenfolge, so convergirt die Reihe Σa_ν, wenn für alle Werthe von ν, zum mindesten von einem bestimmten Werthe $\nu = n$ ab:

(A) $$a_\nu \leqq c_\nu;$$

sie divergirt, wenn für $\nu \geqq n$:

(B) $$a_\nu \geqq d_\nu.$$

Ist dagegen, wie gross auch ν werden mag:

(C) $$c_\nu \leqq a_\nu \leqq d_\nu,$$

(wobei man die Gleichheitszeichen so zu verstehen hat, dass die schon unter (A) und (B) erledigten Fälle: $a_\nu = c_\nu$, bezw. $a_\nu = d_\nu$ für $\nu \geqq n$, wegfallen), so kann die Reihe Σa_ν noch convergiren oder divergiren. Wir wollen alsdann sagen, sie gehöre demjenigen Grenzgebiete zwischen Convergenz und Divergenz an, welches durch die Schranken (c_ν), (d_ν) definirt wird.

Nun darf man aber ja nicht glauben — und dieser Irrthum ist thatsächlich von Du Bois Reymond und anderen Reihen-Theoretikern begangen worden — dass bei irgend einer Wahl dieser Schranken alle überhaupt möglichen Reihen mit positiven, monoton abnehmenden Gliedern in drei wohlgesonderte Classen vom Charakter (A), (B), (C) zerlegt werden könnten. Vielmehr gilt der folgende Satz:

Wie man auch die monotonen Zahlenfolgen (c_ν), (d_ν) annehmen mag, so giebt es stets unendlich viele mo-

---

[1]) S. z. B. meine „Allgemeine Theorie der Divergenz und Convergenz etc.", Math. Ann., Bd. 35.

notone Zahlenfolgen (a'_ν), welche **keiner** der drei Classen (A), (B), (C) angehören; nämlich solche, welche **eine** der beiden Schranken (c_ν), (d_ν) oder auch **beide** unendlich oft durchsetzen, also durch eins der folgenden drei Ungleichungs-Paare charakterisirt werden:

$$(A') \qquad a_\lambda < c_\lambda \qquad c_\mu \leqq a_\mu \leqq d_\mu$$
$$(B') \qquad a_\lambda > d_\lambda \qquad c_\mu \leqq a_\mu \leqq d_\mu$$
$$(C') \qquad a_\lambda < c_\lambda \qquad a_\mu > d_\mu$$

(Dabei bedeuten die λ und μ von einander verschiedene Zahlen, von denen beide Kategorien in unbegrenzter Anzahl vorkommen und die in den Fällen (A'), (B') die Reihe der ganzen Zahlen ν, zum mindestens für $\nu \geqq n$, vollständig erschöpfen).

Beweis. Es bedeute p_ν $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$ eine ganz willkürlich anzunehmende Folge beliebiger positiver Zahlen, m_0 eine positive ganze Zahl oder auch die Null. Man bestimme sodann eine ganze Zahl $m_1 > m_0$ und weiter eine unbegrenzte Folge wachsender ganzer Zahlen $m_2, m_3, \ldots$ in der Weise, dass:

$$p_1 \cdot d_{m_1} < p_0 \cdot c_{m_0}, \quad p_2 \cdot c_{m_2} < p_1 \cdot d_{m_1}, \quad p_3 \cdot d_{m_3} < p_2 \cdot c_{m_2}, \text{ u. s. f.,}$$

was offenbar stets (auf unendlich viele Arten) möglich ist, da sowohl die c_ν, als die d_ν mit wachsenden Werthen von ν monoton gegen Null abnehmen. Man erhält durch dieses Verfahren eine unbegrenzte monoton abnehmende Folge von der Form:

$$p_0 \cdot c_{m_0}, \; p_1 \cdot d_{m_1}, \; \ldots \; p_{2k} \cdot c_{m_{2k}}, \; p_{2k+1} \cdot c_{m_{2k+1}}, \; \ldots$$

Setzt man jetzt:

$$(1) \qquad p_{2k} \cdot c_{m_{2k}} = a'_{m_{2k}}, \quad p_{2k+1} \cdot d_{m_{2k+1}} = a'_{m_{2k+1}} \quad (k = 0, 1, 2 \ldots)$$

und bestimmt im übrigen a'_ν für alle ganzzahligen Werthe von ν, die zwischen m_λ und $m_{\lambda+1}$ $(\lambda = 0, 1, 2, \ldots)$ liegen, in der Weise, dass a'_ν für $\nu = m_\lambda, m_\lambda + 1, \ldots m_{\lambda+1}$ monoton von a'_{m_λ} zu $a'_{m_{\lambda+1}}$ abnimmt, so bilden die a'_ν für $\nu = 0, 1, 2 \ldots$ eine unbegrenzte monoton abnehmende Folge, welche unendlich viele Terme von der Form (1) enthält.

Durch passende Wahl der bisher noch willkürlich gelassenen Zahlen p_ν kann man schliesslich erreichen, dass die Zahlenfolge (a'_ν) einer der drei Classen (A′), (B′), (C′) angehört. Nimmt man z. B. $p_{2k} < 1$, $p_{2k+1} > 1$, so wird nach Gl. (1):

$$a'_{m_{2k}} < c_{m_{2k}}, \quad a'_{m_{2k+1}} > d_{m_{2k+1}},$$ [1]

so dass also die Folge (a'_ν) der Classe (C′) angehört.

Berücksichtigt man ferner, dass (zum mindesten von einer bestimmten Stelle $\nu = n$ ab) $d_\nu > p \cdot c_\nu$ sein muss, wenn p beliebig > 1 angenommen wird, so folgt für $p_{2k} < 1$, $p_{2k+1} \left\{ \begin{matrix} < 1 \\ > \frac{1}{p} \end{matrix} \right\}$:

$$a'_{m_{2k}} < c_{m_{2k}}, \quad a'_{m_{2k+1}} = p_{2k+1} \cdot d_{m_{2k+1}} \left\{ \begin{matrix} < d_{m_{2k+1}}, \\ > c_{m_{2k+1}}, \end{matrix} \right.$$

d. h. die Folge (a'_ν) gehört in diesem Falle der Classe (A′) an.

Analog wird für $p_{2k} \left\{ \begin{matrix} > 1 \\ < p \end{matrix} \right\}$, $p_{2k+1} > 1$:

$$a'_{m_{2k}} = p_{2k} \cdot c_{m_{2k}} \left\{ \begin{matrix} > c_{m_{2k}}, \\ < d_{m_{2k}}, \end{matrix} \right. \quad a'_{m_{2k+1}} > d_{m_{2k+1}},$$

so dass die Folge (a'_ν) zur Classe (B′) gehört. —

Aus dem eben bewiesenen Satze ergiebt sich nun unmittelbar das folgende Resultat:

Wie man auch die monotonen Zahlenfolgen (c_ν), (d_ν) wählen mag, so giebt es stets unendlich viele monoton

[1] Man hat sogar:

$$a'_{m_{2k}} \prec c_{m_{2k}}, \quad a'_{m_{2k+1}} \succ c_{m_{2k+1}},$$

wenn man:

$$\lim_{k=\infty} p_{2k} = 0, \quad \lim_{k=\infty} p_{2k+1} = \infty$$

annimmt.

abnehmende Reihen $\Sigma a'_\nu$, welche **nicht** dem von den Schranken (c_ν), (d_ν) eingeschlossenen **Grenzgebiete** angehören, und deren Convergenz oder Divergenz **dennoch nicht** durch Vergleichung von a'_ν mit c'_ν oder d'_ν entschieden werden kann.

Versteht man insbesondere unter (a'_ν) eine monotone Zahlenfolge, welche beide Schranken (c_ν), (d_ν) unendlich oft durchsetzt (d. h. den Ungleichungen (C') genügt) und setzt man: $c_\nu = \frac{1}{C_\nu}$, $d_\nu = \frac{1}{D_\nu}$, so hat man für unendlich viele Werthe von ν:

$$(2) \qquad \text{theils: } a'_\nu < \frac{1}{C_\nu}, \quad \text{theils: } a'_\nu > \frac{1}{D_\nu},$$

also:

$$\text{theils: } D_\nu \cdot a'_\nu < \frac{D_\nu}{C_\nu}, \quad \text{theils: } C_\nu \cdot a'_\nu > \frac{C_\nu}{D_\nu},$$

d. h. schliesslich:[1])

$$\lim_{\nu=\infty} \inf D_\nu \cdot a'_\nu = 0, \quad \lim_{\nu=\infty} \sup C_\nu \cdot a'_\nu = \infty$$

$$\left(\text{wegen: } \lim_{\nu=\infty} \frac{C_\nu}{D_\nu} = \lim_{\nu=\infty} \frac{d_\nu}{c_\nu} = \infty\right),$$

in Worten: Das mit Hülfe der C_ν, D_ν herstellbare Kriterien-Paar für Convergenz und Divergenz versagt in diesem Falle.

Das gleiche gilt dann offenbar auch von jedem durch weitere Verschärfung[2]) aus C_ν, D_ν abzuleitenden Kriterien-Paare. Denn nimmt man $C'_\nu \prec C_\nu$, $D'_\nu \succ D_\nu$, wo wiederum:

---

[1]) Ich bezeichne als unteren bezw. oberen Limes (lim. inf. bezw. lim. sup.) das nämliche, was Cauchy als „la plus petite bezw. la plus grande des limites" zu bezeichnen pflegt. Die nach dem Vorgange von Du Bois-Reymond neuerdings fast allgemein üblich gewordene, nicht gerade sehr bequeme Bezeichnung: „Untere bezw. obere Unbestimmtheitsgrenze" ist lediglich ein neuer Name für jenen schon Cauchy vollständig geläufigen Begriff.

[2]) S. meine oben citirte Convergenz-Theorie, a. a. O. p. 302.

$\lim\limits_{\nu=\infty} \frac{C'_\nu}{D'_\nu} = \infty$, so bestehen die Ungleichungen (2) a fortiori, auch wenn man C_ν, D_ν durch C'_ν, D'_ν ersetzt, und folglich hat man immer wieder:

$$\liminf_{\nu=\infty} D'_\nu \cdot a'_\nu = 0, \quad \limsup_{\nu=\infty} C'_\nu \cdot a'_\nu = \infty.$$

§ 3. Die wahre Schranke für die Convergenz einer unendlichen Reihe.

Aus den Betrachtungen des vorigen Paragraphen geht hervor, dass es in keinem Falle **gleichzeitig** eine allgemein gültige Schranke für die Convergenz und eine solche für die Divergenz in dem Sinne geben kann, dass die Terme aller convergenten Reihen (mit monotonen Gliedern) von irgend einem bestimmten Stellenzeiger ab durchweg unterhalb der einen (oberen) Schranke, die aller divergenten Reihen oberhalb der anderen (unteren) Schranke liegen. Dagegen lässt sich zeigen, dass eine solche Schranke für die Convergenz allein existirt, dass dieselbe aber merklich höher liegt, als von früheren Reihen-Theoretikern angenommen wurde.[1]) Es gilt nämlich der folgende Satz:

[1]) Hierauf habe ich bereits in der citirten Abhandlung hingewiesen (a. a. O. p. 347 ff.), woselbst auch der hier folgende Satz bereits aufgestellt und bewiesen wird. Ich reproducire denselben hier nochmals, theils wegen seines unmittelbaren Zusammenhanges mit den vorangehenden und noch folgenden Betrachtungen, theils auch, weil der hier gegebene Beweis seines wesentlicheren (zweiten) Theiles mir vollkommener erscheint, als der a. a. O. und Math. Ann., Bd. 37, p. 601 mitgetheilte. Was übrigens den (sehr leicht zu beweisenden) ersten Theil jenes Satzes betrifft, so hat man dessen Richtigkeit wohl seit lange als selbstverständlich angesehen. Bewiesen wurde aber immer nur, dass Σa_ν divergirt, wenn $\lim\limits_{\nu=\infty} \nu \cdot a_\nu > 0$, und daraus folgt nur soviel, dass im Falle der Convergenz von Σa_ν stets $\lim\limits_{\nu=\infty} \nu \cdot a_\nu = 0$ sein muss, falls dieser Grenzwerth überhaupt existirt. Gerade diesen Existenz-Beweis liefert aber der erste Theil des fraglichen Satzes.

Bei einer **convergenten** Reihe mit niemals zunehmenden Gliedern hat man allemal:

$$a_\nu \prec \frac{1}{\nu} \quad \text{d. h.} \lim_{\nu=\infty} \nu \cdot a_\nu = 0.$$

Bedeutet dagegen (m_ν) eine mit ν **beliebig langsam** in's Unendliche wachsende monotone Zahlenfolge, so giebt es stets **convergente** Reihen Σa_ν mit monotonen Gliedern, für welche:

$$\limsup_{\nu=\infty} \nu \cdot m_\nu \cdot a_\nu = \infty,$$

d. h. die Reihe Σa_ν enthält unendlich viele Terme, welche **infinitär grösser** sind, als die **entsprechenden** der **divergenten** Reihe $\Sigma \frac{1}{\nu \cdot m_\nu}$.

Oder anders ausgesprochen:

Für Reihen mit monotonen Termen a_ν bildet zwar die Beziehung:

$$\lim_{\nu=\infty} \nu \cdot a_\nu = 0$$

eine **nothwendige Convergenz**-Bedingung, **nicht** aber irgend eine Beziehung von der Form:

$$\lim_{\nu=\infty} \nu \cdot m_\nu \cdot a_\nu = 0,$$

wie **langsam** auch m_ν mit ν in's Unendliche wachsen möge.

Beweis. In Folge der vorausgesetzten Convergenz von Σa_ν lässt sich nach Annahme einer beliebig kleinen positiven Zahl ε eine ganze Zahl m so fixiren, dass für $\mu \geqq m$ und jede noch so grosse ganze Zahl ϱ:

$$a_{\mu+1} + a_{\mu+2} + \cdots + a_{\mu+\varrho} < \varepsilon.$$

Setzt man hier speciell einmal $\varrho = \mu$, das andere Mal $\varrho = \mu + 1$, und beachtet, dass allgemein $a_\nu \leqq a_{\nu+1}$, so folgt:

$$\left.\begin{array}{r} \mu \cdot a_{2\mu} \leqq a_{\mu+1} + a_{\mu+2} + \dots + a_{2\mu} \\ (\mu+1) \cdot a_{2\mu+1} \leqq a_{\mu+1} + a_{\mu+2} + \dots + a_{2\mu+1} \end{array}\right\} < \varepsilon \quad (\mu \geqq m)$$

und daher:

$$2\mu \cdot a_{2\mu} < 2\varepsilon$$

$$(2\mu+1) \cdot a_{2\mu+1} < 2(\mu+1) \cdot a_{2\mu+1} < 2\varepsilon$$

also schliesslich:

$$\nu \cdot a_\nu < 2\varepsilon \qquad (\nu \geqq 2m)$$

d. h.:

$$\lim_{\nu=\infty} \nu \cdot a_\nu = 0.$$

Um den zweiten Theil des ausgesprochenen Satzes zu beweisen, wähle man eine für jeden Werth von x, der eine gewisse Zahl x_0 übersteigt, stetige und positive, mit x monoton in's Unendliche wachsende Function $f(x)$ von der Beschaffenheit, dass

$$f(x+1) - f(x) < 1 \tag{1}$$

$$f(\nu) \prec m_\nu. \tag{2}$$

Vermöge der ersten Festsetzungen besitzt die Gleichung:

$$y = f(x) \qquad (x > x_0) \tag{3}$$

eine Auflösung von der Form:

$$x = \varphi(y) \qquad (\text{also: } \varphi(f(x)) = x = f(\varphi(x))), \tag{4}$$

wo $\varphi(y)$ eine für $y > y_0 = f(x_0)$ eindeutig definirte, positive und mit y monoton in's Unendliche wachsende Function bedeutet.

Alsdann folgt aus Ungl. (1) und Gl. (3):

$$f(x+1) < y + 1$$

und daher:

$$\varphi(f(x+1)) = x + 1 < \varphi(y+1),$$

also mit Benützung von Gl. (4):

$$\varphi(y+1) - \varphi(y) > 1. \tag{5}$$

Bedeutet jetzt $\Sigma \frac{1}{C_\lambda}$ eine beliebig anzunehmende convergente Reihe, deren Glieder durchweg der Bedingung genügen:

$$C_\lambda - C_{\lambda-1} \geqq 1 \qquad (\lambda = 1, 2, 3, \ldots),$$

so hat man nach Ungl. (5) auch:

(6) $$\varphi(C_\lambda) - \varphi(C_{\lambda-1}) > 1,$$

so dass also zwischen $\varphi(C_{\lambda-1})$ und $\varphi(C_\lambda)$ stets mindestens **eine** ganze Zahl liegen muss.

Nun nehme man noch eine Folge positiver, mit wachsendem ν monoton abnehmender Zahlen k_ν so an, dass $\lim_{\nu=\infty} k_\nu = k$ von Null verschieden ausfällt (z. B. $k_\nu = k + \frac{1}{\nu}$, $k_\nu = k \cdot e^{\frac{1}{\nu}}$ etc.) und setze:

(7) $$a_\nu = \frac{k_\nu}{C_{\lambda-1} \cdot \varphi(C_\lambda)}$$

für alle ganzzahligen Werthe ν, welche durch die Bedingung definirt sind:

(8) $$\varphi(C_{\lambda-1}) \leqq \nu < \varphi(C_\lambda).$$

Die so definirten Terme a_ν nehmen dann offenbar mit wachsendem ν monoton ab.

Ausserdem lässt sich zeigen, dass $\limsup_{\nu=\infty} \nu \cdot m_\nu \cdot a_\nu = \infty$ und die Reihe Σa_ν convergent ist.

Bezeichnet man nämlich mit p_λ die grösste ganze Zahl, die kleiner als $\varphi(C_\lambda)$ ist, also diejenige ganze Zahl, welche durch die Bedingung definirt wird:

(9) $$\varphi(C_\lambda) - 1 \leqq p_\lambda < \varphi(C_\lambda),$$

so kann man zunächst die Ungleichungen (8) durch die folgenden ersetzen:

(10) $$p_{\lambda-1} < \nu \leqq p_\lambda$$

und man hat sodann:

$$p_\lambda \cdot f(p_\lambda) \cdot a_{p_\lambda} = k_{p_\lambda} \cdot \frac{f(p_\lambda)}{C_{\lambda-1}} \cdot \frac{p_\lambda}{\varphi(C_\lambda)}$$

$$> k_{p_\lambda} \cdot \frac{f(\varphi(C_{\lambda-1}))}{C_{\lambda-1}} \cdot \frac{\varphi(C_\lambda)-1}{\varphi(C_\lambda)} \quad \begin{array}{l}(\text{wegen}:\\ p_\lambda \geqq \varphi(C_\lambda)-1 > \varphi(C_{\lambda-1}))\end{array}$$

$$= k_{p_\lambda} \cdot \frac{\varphi(C_\lambda)-1}{\varphi(C_\lambda)}$$

also:

$$\lim_{\lambda=\infty} p_\lambda \cdot f(p_\lambda) \cdot a_{p_\lambda} \geqq k,$$

d. h.

$$\lim_{\nu=\infty} \sup \nu \cdot f(\nu) \cdot a_\nu \geqq k \tag{11}$$

und daher mit Berücksichtigung von Ungl. (2):

$$\lim_{\nu=\infty} \sup \nu \cdot m_\nu \cdot a_\nu = \infty\,. \tag{12}$$

Setzt man ferner:

$$\sum_{p_n+1}^{\infty}{}^{\nu}\, a_\nu = \sum_{n+1}^{\infty}{}^{\lambda}\, A_\lambda, \quad \text{wo:} \quad A_\lambda = \sum_{p_{\lambda-1}+1}^{p_\lambda}{}^{\nu}\, a_\nu,$$

so wird:

$$A_\lambda = \sum_{p_{\lambda-1}+1}^{p_\lambda}{}^{\nu} \frac{k_\nu}{C_{\lambda-1} \cdot \varphi(C_\lambda)} < k_0 \cdot \frac{p_\lambda - p_{\lambda-1}}{C_{\lambda-1} \cdot \varphi(C_\lambda)}$$

$$< \frac{k_0}{C_{\lambda-1}} \cdot \frac{p_\lambda - p_{\lambda-1}}{p_\lambda} \quad (\text{wegen: } p_\lambda < \varphi(C_\lambda))$$

$$< \frac{k_0}{C_{\lambda-1}},$$

woraus die Convergenz der fraglichen Reihe unmittelbar hervorgeht.

Damit ist aber der oben ausgesprochene Satz vollständig bewiesen.

Will man wirklich Reihen Σa_ν von der eben charakterisirten Beschaffenheit herstellen, so kann man etwa über C_λ so verfügen, dass man setzt:

$$C_\lambda = \lambda^\varrho, \quad \text{wo: } \varrho > 1,$$

also nach Gl. (7):

(13) $$a_\nu = \frac{k_\nu}{(\lambda - 1)^\varrho \cdot \varphi(\lambda^\varrho)}$$

für alle ν, welche durch die Bedingung (8) definirt sind, d. h. für:

(14) $$\varphi((\lambda - 1)^\varrho) \leqq \nu < \varphi(\lambda^\varrho).$$

Mit Hülfe dieser Ungleichungen lässt sich sodann λ auch explicite durch ν ausdrücken. In Folge der Beziehung: $f(\varphi(x)) = x$ ergiebt sich nämlich aus (14):

$$(\lambda - 1)^\varrho \leqq f(\nu) < \lambda^\varrho$$

und hieraus folgt weiter:

(15) $$\lambda - 1 = \left[\sqrt[\varrho]{f(\nu)}\right]$$

(wenn man durch das Symbol $[x]$ die grösste in x enthaltene ganze Zahl bezeichnet).

Somit geht der Ausdruck (13) in den folgenden über:

(16) $$a_\nu = \frac{k_\nu}{\left[\sqrt[\varrho]{f(\nu)}\right]^\varrho \cdot \varphi\left(\left[1 + \sqrt[\varrho]{f(\nu)}\right]^\varrho\right)}.$$

Da aber offenbar:

$$\left[\sqrt[\varrho]{f(\nu)}\right] \sim \sqrt[\varrho]{f(\nu)} \quad \text{und daher:} \quad \left[\sqrt[\varrho]{f(\nu)}\right]^\varrho \sim f(\nu),$$

so kann man, ohne den Charakter der Reihe Σa_ν zu verändern, den Term (16) auch durch den folgenden etwas einfacheren ersetzen:

(17) $$a_\nu = \frac{k_\nu}{f(\nu) \cdot \varphi\left(\left[1 + \sqrt[\varrho]{f(\nu)}\right]^\varrho\right)}.$$

Ist dann z. B. $m_\nu = \lg \nu$ vorgelegt, so wähle man etwa: $f(x) = (\lg x)^{\frac{1}{\sigma}} = y$ (wo $\sigma > 1$), also: $x = e^{y^\sigma} = \varphi(y)$; alsdann wird, wenn man noch $\varrho\sigma = \tau$ setzt:

(18) $$a_\nu = \frac{k_\nu}{\sqrt[\sigma]{\lg \nu} \cdot e^{\left[1 + \sqrt[\tau]{\lg \nu}\right]^\tau}} \quad (\text{wo: } \tau > \sigma > 1).$$

Die Reihe Σa_ν ist alsdann convergent, obschon ihre monoton abnehmenden Glieder der Bedingung genügen:

$$\limsup_{\nu=\infty} \nu \cdot \lg \nu \cdot a_\nu = \infty.$$

Sie reagirt als auf keins der üblichen Convergenz-Kriterien.

§ 4. Es giebt keine Schranke für die Divergenz.

Nach dem Satze des vorigen Paragraphen bildet jede Zahlenfolge von der Form $\left(\frac{\varepsilon}{\nu}\right)$, wo ε eine beliebig klein anzunehmende positive Zahl bedeutet, eine Convergenz-Schranke in dem Sinne, dass die Terme einer monotonen Zahlenfolge (a_ν) von einer angebbaren Stelle ab jene Schranke nicht mehr erreichen dürfen, wenn Σa_ν convergiren soll. Ersetzt man dagegen ε durch ε_ν, wo ε_ν $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$ mit unbegrenzt wachsendem ν beliebig langsam gegen Null abnimmt, so giebt es unendlich viele convergente Reihen Σa_ν, deren (monoton abnehmende) Glieder a_ν der Schranke $\left(\frac{\varepsilon_\nu}{\nu}\right)$ unendlich oft durchsetzen.

Aus der bewiesenen Existenz der Convergenz-Schranke $\left(\frac{\varepsilon}{\nu}\right)$ folgt aber, wie schon zu Anfang des vorigen Paragraphen angedeutet wurde, unmittelbar die Nicht-Existenz einer Divergenz-Schranke. Denn bezeichnet (b_ν) irgend eine positive monotone Zahlenfolge, so giebt es nach § 2 stets unendlich viele monotone Zahlenfolgen (a_ν), welche die beiden Schranken $\left(\frac{\varepsilon}{\nu}\right)$ und (b_ν) unendlich oft durchsetzen, sodass Σa_ν sicher divergiren muss. Da man hierbei für (b_ν) die Terme einer beliebig stark convergirenden Reihe $\Sigma \frac{1}{C_\nu}$ wählen und diese wiederum noch durch eine wesentlich stärker convergirende ersetzen kann, so ergiebt sich also der Satz:

Wie stark auch die Reihe $\Sigma \frac{1}{C_\nu}$ **convergiren** möge, so giebt es stets **divergente** Reihen Σa_ν, unter deren (monoton abnehmenden) Gliedern unbegrenzt viele **infinitär kleiner** sind, als die **entsprechenden** der Reihe $\Sigma \frac{1}{C_\nu}$, d. h. man hat:

$$\lim_{\nu=\infty} \inf C_\nu \cdot a_\nu = 0.$$

Wir können aber auch geradezu ein einfaches Verfahren angeben, um bei beliebig vorgeschriebenem C_ν solche divergente Reihen Σa_ν wirklich herzustellen.

Es bedeute $\varphi(x)$ wiederum eine positive, mit wachsenden positiven Werthen von (x) monoton zunehmende Function, welche der Bedingung genügt:

$$(1) \qquad \varphi(\nu) \succ C_\nu, \text{ also a fortiori: } \varphi(x) \succ x,$$

und es werde gesetzt:

$$(2) \quad \varphi_1(x) = \varphi(x), \quad \varphi_2(x) = \varphi(\varphi_1(x)), \ldots \varphi_\lambda(x) = \varphi(\varphi_{\lambda-1}(x)), \ldots$$

Bezeichnet dann b eine beliebige positive Zahl > 1, so lässt sich zunächst in Folge der Beziehung (1) eine positive Zahl a so fixiren, dass

$$(3) \qquad \varphi_1(x) > b \cdot x \quad \text{für: } x \geqq a.$$

Alsdann wird aber — immer für $x \geqq a$:

$$\begin{aligned} \varphi_2(x) &= \varphi_1(\varphi_1(x)) > b \cdot \varphi_1(x) \\ \varphi_3(x) &= \varphi_1(\varphi_2(x)) > b \cdot \varphi_2(x) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (4) \qquad \varphi_\lambda(x) &= \varphi_1(\varphi_{\lambda-1}(x)) > b \cdot \varphi_{\lambda-1}(x) \quad \text{u. s. f.} \end{aligned}$$

Die Terme $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ... $\varphi_\lambda(x)$, ... bilden also eine unbegrenzte, mit λ monoton in's Unendliche wachsende, positive Zahlenfolge. Und zwar hat man für $x \geqq a$ und $\lambda = 2, 3, 4, \ldots$ nach Ungl. (4) und (3):

$$(5) \quad \varphi_\lambda(x) - \varphi_{\lambda-1}(x) > (b-1) \cdot \varphi_{\lambda-1}(x) > (b-1) \cdot b \cdot x,$$

folglich bei passender Wahl von b und a (z. B. für $b \geqq 2$, $a \geqq \frac{1}{2}$) jedenfalls:

(6) $$\varphi_\lambda(a) - \varphi_{\lambda-1}(a) > 1 \qquad (\lambda = 2, 3, 4, \ldots),$$

so dass zwischen $\varphi_{\lambda-1}(a)$ und $\varphi_\lambda(a)$ stets mindestens eine ganze Zahl liegt.

Nimmt man jetzt wiederum noch eine Folge beliebiger positiver, monoton abnehmender Zahlen $k_\nu (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$ mit dem von Null verschiedenen Grenzwerthe $\lim\limits_{\nu=\infty} k_\nu = k$ an, so soll gesetzt werden:

(7) $$a_\nu = \frac{k_\nu}{\varphi_\lambda(a)}$$

für alle ganzzahligen ν, welche durch die Bedingung definirt sind:

(8) $$\varphi_{\lambda-1}(a) - 1 \leqq \nu < \varphi_\lambda(a) - 1 \quad (\lambda = 2, 3, 4, \ldots).$$

Alsdann nehmen offenbar die a_ν mit wachsendem ν monoton ab, und es lässt sich andererseits zeigen, dass $\lim\limits_{\lambda=\infty} \inf C_\nu \cdot a_\nu = 0$ und die Reihe Σa_ν divergent ist.

Bezeichnet man nämlich (analog wie in § 3) mit p_λ die grösste ganze Zahl, die kleiner als $\varphi_\lambda(a)$ ist, so dass also:

(9) $$\varphi_\lambda(a) - 1 \leqq p_\lambda < \varphi_\lambda(a),$$

so lässt sich zunächst die Bedingung (8) durch die folgende ersetzen:

(10) $$p_{\lambda-1} \leqq \nu < p_\lambda.$$

In Folge dessen ergiebt sich:

$$a_{p_\lambda} = \frac{k_{p_\lambda}}{\varphi_{\lambda+1}(a)} = \frac{k_{p_\lambda}}{\varphi(\varphi_\lambda(a))}$$
$$< \frac{k_{p_\lambda}}{\varphi(p_\lambda)} \quad (\text{wegen: } p_\lambda < \varphi_\lambda(a))$$

also:

$$\lim_{\lambda=\infty} \varphi(p_\lambda) \cdot a_{p_\lambda} \leqq k$$

d. h.

(11) $$\lim_{\nu=\infty} \inf \varphi(\nu) \cdot a_\nu \leqq k$$

und schliesslich mit Berücksichtigung von Ungl. (1):

(12) $$\liminf_{\nu=\infty} C_\nu \cdot a_\nu = 0.$$

Ferner hat man:

$$\sum_{p_1}^{\infty}{}^{\nu} a_\nu = \sum_{2}^{\infty}{}^{\lambda} A_\lambda, \text{ wenn gesetzt wird: } A_\lambda = \sum_{p_{\lambda-1}}^{p_\lambda - 1}{}^{\nu} a_\nu.$$

Da sodann:

$$A_\lambda = \sum_{p_{\lambda-1}}^{p_\lambda - 1}{}^{\nu} \frac{k_\nu}{\varphi_\lambda(a)} > k \cdot \frac{p_\lambda - p_{\lambda-1}}{\varphi_\lambda(a)} = k \cdot \frac{p_\lambda - p_{\lambda-1}}{p_\lambda} \cdot \frac{p_\lambda}{\varphi_\lambda(a)},$$

so ergiebt sich sofort die Divergenz der fraglichen Reihe, da $\frac{p_\lambda - p_{\lambda-1}}{p_\lambda}$ das allgemeine Glied einer divergenten Reihe bildet und $\lim_{\lambda=\infty} \frac{p_\lambda}{\varphi_\lambda(a)} = 1$ ist (s. Ungl. (9)).

Beispiel. Es sei: $C_\nu = \nu^\varrho$, wo $\varrho > 1$. Man kann also setzen:

$$\varphi(x) = x^\sigma, \quad \text{wo: } \sigma > \varrho.$$

Alsdann wird:

$$\varphi_2(x) = (x^\sigma)^\sigma = x^{\sigma^2}, \; \ldots \; \varphi_\lambda(x) = x^{\sigma^\lambda}.$$

Nimmt man der Einfachheit halber die oben mit a bezeichnete Zahl auch $= \sigma$ (was z. B. sicher gestattet ist, wenn $\sigma \geqq 2$, da alsdann:

$$\varphi_\lambda(\sigma) - \varphi_{\lambda-1}(\sigma) = \sigma^{\sigma^\lambda} - \sigma^{\sigma^{\lambda-1}} \geqq 2^{2^\lambda} - 2^{2^{\lambda-1}} > 1),$$

so wird nach (7) und (8):

(13) $$a_\nu = \frac{k_\nu}{\sigma^{\sigma^\lambda}}, \text{ solange: } \sigma^{\sigma^{\lambda-1}} - 1 \leqq \nu < \sigma^{\sigma^\lambda} - 1.$$

Um auch hier wiederum λ explicite durch ν auszudrücken, hat man:

$$\sigma^{\lambda-1} \leqq \overset{\sigma}{\log}(\nu+1) < \sigma^{\lambda}$$

$$\lambda - 1 \leqq \overset{\sigma}{\log_2}(\nu+1) < \lambda$$

d. h.

(14) $$\lambda - 1 = \left[\overset{\sigma}{\log_2}(\nu+1)\right]$$

und daher

(15) $$a_\nu = \frac{k_\nu}{\sigma^{\sigma^{1+\left[\overset{\sigma}{\log_2}(\nu+1)\right]}}}.$$

Diese Reihe Σa_ν ist divergent, obschon ihre (monoton abnehmenden) Glieder der Bedingung genügen:

$$\liminf \nu^{\varrho} \cdot a_\nu = 0 \qquad (\text{wo: } \varrho > 1).$$

Sie kann also auf keins der gewöhnlichen Divergenz-Kriterien reagiren.

Die vorstehenden Betrachtungen und Resultate lassen sich ohne weiteres auch auf Integrale von der Form $\int_{x_0}^{\infty} f(x) \cdot dx$ übertragen, wo $f(x)$ mit unbegrenzt wachsendem x monoton gegen Null abnimmt. Denn dieses Integral convergirt und divergirt stets gleichzeitig mit der Reihe $\Sigma f(\nu)$.

Jede Curve: $y = \frac{\varepsilon}{x}$ bildet also — bei beliebig kleinem $\varepsilon > 0$ — stets eine Schranke für die Convergenz jenes Integrals, d. h. alle monotonen Curven $y = f(x)$ mit convergentem Integral müssen schliesslich durchweg merklich unter dieser Schranke verlaufen, während sie andererseits jede Curve von der Form: $y = \frac{1}{x \cdot \vartheta(x)}$ noch unendlich oft überschneiden können, wenn auch $\vartheta(x)$ mit x beliebig langsam in's Unendliche wächst.

Dagegen existirt überhaupt keine Schranke für die Divergenz des Integrals, d. h. dasselbe kann divergiren, auch wenn die monotone Curve $y = f(x)$ jede Curve $y = \varphi(x)$ mit beliebig stark convergirendem Integral $\int_{x_0}^{\infty} \varphi(x) \cdot dx$ unendlich oft durchsetzt.
