Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Classe

der

k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.

Band XXVII. Jahrgang 1897.

München.
Verlag der k. Akademie.
1898.

In Commission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).

Sitzung vom 6. Februar 1897.

1. Herr Hugo Seeliger legt eine Abhandlung des Professors der Mechanik an der hiesigen technischen Hochschule, Herrn Dr. August Föppl: „Ueber eine mögliche Erweiterung des Newton'schen Gravitationsgesetzes" vor.

2. Herr Alfred Pringsheim macht eine Mittheilung: „Zur Theorie der Doppelreihen."

Ueber eine mögliche Erweiterung des Newton'schen Gravitations-Gesetzes.

Von **A. Föppl.**

(Eingelaufen 6. Februar.)

In einer jüngst erschienenen Schrift[1]) habe ich an einigen Stellen in unbestimmten Ausdrücken darauf hingewiesen, dass meiner Schätzung nach die Gravitationstheorie heute noch nicht ihre endgültige Fassung erlangt haben dürfte. Wer das Recht zu einer solchen Aeusserung in Anspruch nehmen will, muss nachweisen können, dass mindestens noch eine von der herrschenden Anschauung abweichende Erklärung des Weltsystems möglich ist. Diesen Nachweis beabsichtige ich hier zu liefern.

Zuvor möchte ich indessen noch erwähnen, was mich ursprünglich zu meiner Vermuthung führte, denn auf den Versuch einer Abänderung des Newton'schen Gesetzes, den ich hier auseinandersetzen will, lege ich nur insoferne Werth, als er

[1]) Föppl, Geometrie der Wirbelfelder, Leipzig 1897.

die Zulässigkeit jener Vermuthung bestätigt. Die elektrischen und magnetischen Felder, die mit dem Gravitationsfelde der Welt eine unverkennbare Aehnlichkeit besitzen, wie unter anderem schon aus dem Vergleiche des Coulomb'schen Gesetzes mit dem Newton'schen Gesetze hervorgeht, zeichnen sich durch den Umstand aus, dass sie sich nicht ins Unendliche erstrecken. Damit soll gesagt sein, dass der Kraftfluss, den ein solches Feld durch eine Kugelfläche sendet, gegen Null convergirt, wenn der Radius der Kugel unbegrenzt wächst. Die Vermuthung liegt nahe genug, dass es sich auch mit dem Gravitationsfelde eines gewissen Weltganzen ähnlich verhalten könne. Wer sich gegen die Vorstellung sträubt, dass sich das Feld jedes in sich geschlossenen Systems nothwendig ins Unendliche erstrecken müsse oder wer die Schwierigkeiten anerkennt, die aus den besonders von Herrn Seeliger[1]) betonten Folgerungen des Newton'schen Gesetzes hervorgehen, wird wenigstens zugeben, dass es wünschenswerth ist, nach einer Fassung des Gravitationsgesetzes zu suchen, die diese Schwierigkeiten beseitigt, ohne die Vorzüge des Newton'schen Gesetzes preiszugeben.

Von einem Anfangspunkte, dessen Wahl gleichgültig ist, seien die Radienvektoren $\mathfrak{r}$ gezogen. Man nehme an, dass der Zustand des Gravitationsfeldes im Punkte $\mathfrak{r}$ (gleichgültig ob er sich im Innern eines Weltkörpers befindet oder nicht) durch eine einzige gerichtete Grösse $\mathfrak{v}$ beschrieben werden kann. Der augenblickliche Zustand des Gravitationsfeldes der Welt wird dann durch eine Vectorfunktion

$$\mathfrak{v} = f(\mathfrak{r})$$

angegeben. Um in möglichst enger Uebereinstimmung mit dem Newton'schen Gesetze zu bleiben, nehmen wir erstens an, dass die Funktion $\mathfrak{v}$ wirbelfrei ist und dass ferner ihre Quellen mit den Massen der Weltkörper zusammenfallen. Nur darin weichen wir ab, dass wir neben positiven Quellen auch negative

---

[1]) H. Seeliger, Sitzungsberichte der k. bayer. Ak. d. Wiss., Heft III, 1896, p. 373.

zulassen. Damit sich das Feld eines in sich abgeschlossenen Systems nicht nothwendig ins Unendliche erstrecke, müssen wir ferner, wie bei den elektrischen Feldern, voraussetzen, dass die Summe der negativen Quellen gleich der Summe der positiven ist. Die Kraftlinien des Gravitationsfeldes gehen dann alle von positiven Massen aus zu negativen hin (oder umgekehrt, denn hierin liegt nur eine willkürliche Vorzeichenbestimmung).

In dieser Einführung von Massen[1]) verschiedenen Vorzeichens besteht die Erweiterung, die man, wie ich glaube, dem Newton'schen Gesetze geben kann. Freilich macht sich dabei, wie man nachher sehen wird, noch eine Untersuchung über die Form nöthig, die man dem Energie-Inhalt des Gravitationsfeldes zu geben hat.

Schon jetzt will ich aber darauf hinweisen, dass man selbstverständlich allen Massen unseres Sonnensystems das gleiche Vorzeichen geben muss, ebenso den Massen der Kometen, die in unser System gelangen. Man wird nämlich sehen, dass man auf Grund der vorher angegebenen Voraussetzungen über die Beschaffenheit der Funktion $\mathfrak{v}$ in Verbindung mit einer Annahme über die Energie des Gravitationsfeldes beweisen kann, dass alle Massen gleichen Vorzeichens sich nach dem Newton'schen Gesetze anziehen, Massen entgegengesetzten Vorzeichens sich aber nach demselben Gesetze abstossen müssen. Abgesehen von dem umgekehrten Wirkungssinne aller Kräfte würde also das Weltganze einem Systeme elektrischer Massen verschiedenen Vorzeichens gleichen.

Wenn wir z. B. beobachten, dass die Bewegungen eines

---

[1]) Wo ich hier von Massen rede, meine ich damit nicht die im Trägheitsgesetze oder in der dynamischen Grundgleichung auftretende Grösse, sondern nur das materielle Substrat der Weltkörper, insofern es den Träger der Gravitationserscheinungen bildet. „Masse“ ist daher hier ebenso wie in der Electricitätslehre gleichbedeutend mit „Quelle des Kraftflusses“. Dass „Masse“ im Sinne des Trägheitsgesetzes nur eine positive Grösse sein kann, hat schon Mach in seiner Mechanik ausführlich nachgewiesen.

Doppelsterns dem Newton'schen Gesetze gehorchen, könnte daraus nach der hier zu erörternden Hypothese nur geschlossen werden, dass beide Sterne Massen gleichen Vorzeichens enthalten. Es müsste aber unentschieden bleiben, ob diese Massen gleicher oder entgegengesetzter Art mit denen unseres Sonnensystems sind.

Dass wir noch keine Fälle verzeichnen konnten, in denen eine Abstossung zwischen zwei Weltkörpern bemerkt wurde, lässt sich, wie mir scheint, sehr einfach durch den Umstand erklären, dass solche Körper durch die zwischen ihnen wirkende Kraft auseinandergetrieben werden, wenn sie sich zufällig einmal nahe gekommen sind. Wir können daher nach unserer Hypothese gar nicht erwarten, Weltkörper verschiedenen Vorzeichens in so nahen Abständen zu finden, dass die zwischen ihnen wirkende umgekehrte Gravitation uns in ihren Wirkungen messbar erkenntlich würde.

Bei meinem Ausgangspunkte ist es selbstverständlich, dass ich mir die Uebertragung der Gravitationskräfte durch ein Medium (den Lichtäther) vermittelt denke. Nach der Maxwell'schen Elektricitätslehre wird die Energie des elektrischen Feldes, die in einem Volumen-Elemente $d\tau$ angehäuft ist, durch einen Ausdruck von der Form

$$\frac{1}{2} c\, \mathfrak{v}^2\, d\tau$$

angegeben, wenn $\mathfrak{v}$ den elektrischen Vector und c eine Constante des Mediums bedeuten. Bei dieser Annahme folgt mit Nothwendigkeit, dass sich Massen gleichen Vorzeichens abstossen müssen, wie wir es bei den elektrischen Erscheinungen beobachten. Um zu dem entgegengesetzten Verhalten bei der Gravitation zu gelangen, genügt es, für die Energie des Volumen-Elementes $d\tau$ den Werth

$$\left(c_0 - \frac{1}{2} c\, \mathfrak{v}^2\right) d\tau$$

anzunehmen, wobei c_0 eine neue Constante des Mediums, nämlich den Inhalt an Energie in der Volumen-Einheit des Raumes für $\mathfrak{v} = 0$ bedeutet. Ich werde nachher noch darauf hinweisen, dass eine solche Form für die Energievertheilung im Weltraume nach manchen Richtungen hin ganz annehmbar erscheint. Aus dieser Annahme folgt mit Nothwendigkeit, wie ich jetzt zeigen werde, das erweiterte Newton'sche Gesetz.

Der Gesammtinhalt an Gravitationsenergie entweder des Weltalls oder eines in sich abgeschlossenen Weltganzen ist nach meiner Annahme in einem gegebenen Augenblicke

$$T = T_0 - \frac{1}{2} c \int^{\infty} \mathfrak{v}^2 \, d\tau \tag{1}$$

wo $T_0 = \int^{\infty} e_0 \, d\tau$ gesetzt ist und die Integration sich über das ganze Gravitationsfeld unseres Weltganzen erstreckt. Der Vector $\mathfrak{v}$ kann, da er wirbelfrei vertheilt sein sollte, aus einem gewöhnlichen Potentiale V abgeleitet werden. Nach dem Green'schen Satz ist daher

$$\int^{\infty} \mathfrak{v}^2 \, d\tau = \int^{\infty} V q \, d\tau \tag{2}$$

wenn q die Dichte der Quellen (d. h. das 4πfache der Masse) in $d\tau$ bezeichnet. Das Oberflächenintegral über die Grenzfläche des Raumes, das nach der allgemeinen Fassung des Green'schen Satzes hinzuzufügen wäre, verschwindet nämlich hier nach unserer Voraussetzung, dass sich das Feld des Weltganzen nicht ins Unendliche erstrecken soll.

Wir wollen nun annehmen, dass irgend eine Quelle (oder Masse) q_1, die positiv oder negativ sein kann und die wir als unendlich klein voraussetzen wollen, von ihrem Orte $\mathfrak{r}$ um das unendlich kleine Stück $\delta\mathfrak{r}$ verschoben wäre. Es handelt sich darum, zu berechnen, um wie viel sich dadurch der Ausdruck für T in Gl. (1) ändert. Mit Rücksicht auf (2) haben wir

$$\delta T = -\frac{1}{2} c \, \delta \int^{\infty} V q \, d\tau = -\frac{1}{2} c \left(\int^{\infty} \delta V q \, d\tau + \int^{\infty} V \delta q \, d\tau \right) \tag{3}$$

Jedes der beiden Integrale in der letzten Klammer lässt sich leicht berechnen. Beim zweiten kommen überhaupt nur jene beiden Volumen-Elemente in Betracht, in denen sich q_1 zu Anfang und zu Ende der Verschiebung befunden hat; man hat dafür

$$\int^{\infty} V \delta q \, d\tau = (\delta \mathfrak{r} \nabla) V \cdot q_1 \tag{4}$$

wenn $(\delta \mathfrak{r} \nabla)$ eine Differentiation von V in der Richtung $\delta \mathfrak{r}$ angibt. Nun ist, da V das Potential der Quellen q bedeutet

$$V = \frac{1}{4\pi} \int^{\infty} \frac{q \, d\tau}{a} \tag{5}$$

und daher

$$(\delta \mathfrak{r} \nabla) V = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{q}{a^3} \mathfrak{a} \, \delta \mathfrak{r} \, d\tau \tag{6}$$

Das erste Integral in der Klammer der Gleichung (3) hat, wie man leicht in derselben Weise zeigen kann, genau denselben Werth wie das zweite und im Ganzen wird daher

$$\delta T = c \cdot \frac{1}{4\pi} \int \frac{q q'}{a^3} \mathfrak{a} \, d\tau \cdot \delta \mathfrak{r} \tag{7}$$

Wenn sich die Quelle q_1 um $\delta \mathfrak{r}$ bewegt, wirkt eine Kraft $\mathfrak{P}$ an ihr, die sich aus Gl. (7) berechnen lässt. Die Arbeit $\mathfrak{P} \delta \mathfrak{r}$ bei der Verschiebung $\delta \mathfrak{r}$ erhöht nämlich die kinetische Energie auf Kosten der potentiellen und das Energieprincip liefert die Beziehung

$$\mathfrak{P} \delta \mathfrak{r} + \delta T = 0 \tag{8}$$

Dies muss für jede beliebige (virtuelle) Verschiebung $\delta \mathfrak{r}$ gelten. Man kann daher den Faktor des inneren Produkts $\delta \mathfrak{r}$, der in beiden Ausdrücken vorkommt, wegheben und erhält

$$\mathfrak{P} = -\frac{c}{4\pi} q' \int \frac{q}{a^3} \mathfrak{a} \, d\tau \tag{9}$$

Das ist aber für den Fall, dass q und q' gleiches Vorzeichen haben, nichts anderes als das Newton'sche Gravitationsgesetz: zugleich folgen die übrigen vorher aufgestellten Behauptungen.

Natürlich ist diese ganze Betrachtung nur eine einfache Nachbildung der längst bekannten Ableitung des Coulomb'schen

Gesetzes aus dem Maxwell'schen Gesetze der Energievertheilung im elektrischen Felde. Man konnte von vornherein erwarten, dass sie zu diesem Resultate führen müsse, nachdem das Vorzeichen des mit $\mathfrak{v}^2$ behafteten Gliedes in Gl. (1) umgekehrt wurde.

Ich will und kann mich hier nicht auf Weltbildungshypothesen (entsprechend der Kant-Laplace'schen etwa) einlassen, möchte aber nur noch bemerken, dass die durch Gl. (1) ausgesprochene Voraussetzung, beim Zusammenballen von Massen gleichen Vorzeichens nehme die Gravitationsenergie des Raumes ab und auf ihre Kosten werde die thermische Energie u. s. f. des werdenden Weltkörpers gebildet, mit Vorstellungen solcher Art ganz gut in Uebereinstimmung ist.

Es liegt mir natürlich ganz fern, zu behaupten, dass die hier als möglich nachgewiesene Erweiterung des Newton'schen Gesetzes der Wahrheit entspricht, dass es also in der That Weltkörper gibt, die sich gegenseitig abstossen. Die Möglichkeit wird man aber — wenigstens auf Grund der mir bekannten Beobachtungsthatsachen — einstweilen nicht abstreiten können. Eine Möglichkeit, die, wenn sie das Richtige treffen sollte, gelegentlich auch durch eine Beobachtung bestätigt werden kann, muss aber immer ausgesprochen werden und ich nehme daher keinen Anstand, diese kleine Betrachtung zu veröffentlichen.

München, 1. Februar 1897.