Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Classe

der

k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.

Band XXVII. Jahrgang 1897.

München.
Verlag der k. Akademie.
1898.

In Commission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).

Zur Theorie der infinitesimalen Biegungsdeformationen einer Fläche.

Von **A. Voss.**

(Eingelaufen 1. Mai.)

In seiner Théorie générale des surfaces[1]) hat Herr Darboux die Coordinaten x_1, x_2, x_3 der Puncte einer Oberfläche F[2]) durch Ausdrücke dargestellt, welche man in der für beliebige Constante a_1, a_2, a_3 gültigen Identität zusammenfassen kann

$$\text{I)}\quad \sum_{i=1}^{3} a_i x_i = \int (a\,\Theta\Theta_u)(D_1 du + D_{11} dv) - \int (a\,\Theta\,\Theta_v)(D\,du + D_1\,dv)$$

Dabei bedeuten in den dreireihigen Determinanten[3]) unter den Integralzeichen Θ_1, Θ_2, Θ_3 drei Functionen, welche gleichzeitig der partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\text{II)}\qquad \frac{\partial}{\partial u}(D_{11}\,\Theta_u - D_1\,\Theta_v) + \frac{\partial}{\partial v}(D\,\Theta_v - D_1\,\Theta_u) = M\Theta$$

für jeden bei den Θ hinzugefügten Index $i = 1, 2, 3$ genügen. Die Gleichungen I) und II), welche man auch als eine Trans-

[1]) Leçons sur la théorie générale des surfaces Tom. IV, S. 42 ff.

[2]) Der Kürze halber soll ein solcher Punct durch x, daher auch die Fläche F gelegentlich als „Fläche x" bezeichnet werden.

[3]) Das Symbol $(a\,b\,c)$ dient zur Bezeichnung der Determinante

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

formation der Lelieuvre'schen Formeln[1]) auf ein allgemeines System krummliniger Coordinaten betrachten kann, scheinen mir dadurch ein besonderes Interesse zu besitzen, dass sie eine andere Formulierung der partiellen Differentialgleichungen einer krummen Fläche geben. Während nämlich bei der Gauss'schen Darstellung die Fundamentalgrössen erster Ordnung bevorzugt und mit ihnen die der zweiten Ordnung durch unsymmetrische Differentialgleichungen von complicirter Gestalt verknüpft sind, treten hier die Coefficienten D, D_{I}, D_{II}, welche den Fundamentalgrössen zweiter Ordnung proportional sind,[2]) in den Vordergrund und die Functionen Θ sind nun Integrale einer einzigen Differentialgleichung. Durch die consequente Anwendung der Formeln I) und II) dürften manche Probleme der allgemeinen Flächentheorie eine neue Wendung erhalten. Namentlich aber gewinnt das Problem der infinitesimalen Biegungsdeformation einer Fläche vermöge derselben eine durch Allgemeinheit, wie mir scheint, ausgezeichnete Behandlung, und von diesem Gesichtspuncte sollen vorzugsweise diese Formeln im Folgenden betrachtet werden.

Eine auch nur einigermassen erschöpfende Behandlung dieses Gegenstandes, insbesondere auch nach derjenigen Richtung hin, welche durch die Untersuchungen der Herren Cosserat und Guichard[3]) über Strahlensysteme zu so schönen Resultaten geführt hat, konnte hier natürlich nicht meine Aufgabe sein. Allerdings wird man im Folgenden auch den einen oder anderen Satz vorfinden, der aus der zusammenfassenden

[1]) Lelieuvre, sur les lignes asymptotiques et leur répresentation sphérique, Bulletin Darboux, 1888, p. 126; auch Comptes Rendus, t. CXI, p. 183.

[2]) Vgl. § I, 9).

[3]) Guichard, G. Sur les congruences dont la surface moyenne est un plan, Comptes Rendus, CXIV p. 729 (1892); Determination des congruences telles que les lignes asymptotiques . . . Compt. R. CX p. 126, 1890. Cosserat, E., Sur les congruences de droites etc. . . , Ann. de la Fac. de Toulouse, t. VI, 1893.

Darstellung von Bianchi und Darboux[1]) bereits bekannt ist, doch dürfte zugleich eine Reihe von neuen, zu weiterer Durchführung im einzelnen vielfache Veranlassung bietenden Gesichtspuncten in der hier gegebenen Darstellung enthalten sein.

Was die Bezeichnung betrifft, so werde ich mich der von mir in verschiedenen früheren Arbeiten[2]) gebrauchten Formeln bedienen. Es seien also x_1, x_2, x_3 die drei rechtwinkeligen Coordinaten, p_1, p_2, p_3 die Richtungscosinus der Flächennormale, e, f, g die Coefficienten des Längenelementes, e', f', g' die des Längenelementes der sphärischen Abbildung, endlich E, F, G die Fundamentalgrössen zweiter Ordnung. Alsdann bestehen die folgenden Gleichungen:

1)
$$\begin{aligned} x_{uu} &= Ax_u + A_1 x_v + Ep \\ x_{uv} &= Bx_u + B_1 x_v + Fp \\ x_{vv} &= Cx_u + C_1 x + Gp; \\ p_u &= Hx_u + H_1 x_v \\ p_v &= Jx_u + J_1 x_v \end{aligned}$$

für jeden den Variabeln x, p hinzugefügten Index $i = 1, 2, 3$; die Coefficienten $A, A_1, ..$ sind zur Abkürzung für die bekannten Christoffel'schen Symbole

$$\begin{Bmatrix} 1\,1 \\ 1 \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} 1\,1 \\ 2 \end{Bmatrix}, \ldots$$

deren Anwendung bei dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten mir nicht zweckmässig erscheint. —

[1]) Darboux. Leçons générales, t. IV p. 1—110; Bianchi, Lezioni di geometria differenziale, Pisa 1894 p. 272—320. Vgl. auch Cosserat, E. Sur la déformation infiniment petite d'une surface flexible .. et sur les congruences de droites, Ann. de la fac. de Toulouse, t. VIII 1894 und C. Rendus déc. 1892.

[2]) „Ueber die Fundamentalgleichungen der Flächentheorie,“ diese Sitzungsberichte 1892, p. 257; man vergleiche ferner Cosserat, E. Sur les congruences des droites, Ann. de la fac. de Toulouse, t. VI N. 5—9, 1893.

Setzt man

$$\mathsf{H} = eg - f^2$$

und bezeichnet den Coordinatenwinkel der Curven u, v mit ω, so ist

$$2)\qquad A + B_1 = \frac{\partial l \sqrt{\mathsf{H}}}{\partial u}, \quad B + C_1 = \frac{\partial l \sqrt{\mathsf{H}}}{\partial v}$$

$$\left(\frac{A_1}{e} + \frac{B}{g}\right)\sqrt{\mathsf{H}} = -\omega_u, \quad \left(\frac{C}{g} + \frac{B_1}{e}\right)\sqrt{\mathsf{H}} = -\omega_v$$

$$\mathsf{H}\,H = Ff - Eg, \quad \mathsf{H}\,J = Gf - Fg$$

$$\mathsf{H}\,H_1 = Ef - Fe, \quad \mathsf{H}\,J_1 = Ff - Ge$$

$$E = \Sigma p x_{uu} = -\Sigma p_u x_u$$

$$F = \Sigma p x_{uv} = -\Sigma p_u x_v = -\Sigma p_v x_u$$

$$G = \Sigma p x_{vv} = -\Sigma p_v x_v$$

Die Fundamentalgleichungen der Flächentheorie sind dann, wenn noch das Krümmungsmass mit K bezeichnet wird

$$3)\quad K\sqrt{\mathsf{H}} = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{A_1\sqrt{\mathsf{H}}}{e}\right) - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{B_1\sqrt{\mathsf{H}}}{e}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{C\sqrt{\mathsf{H}}}{g}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{B\sqrt{\mathsf{H}}}{g}\right)$$

$$4)\qquad E_v - F_u + (A - B_1)F + A_1 G - BE = 0$$

$$G_u - F_v + (C_1 - B)F + CE - B_1 G = 0;$$

die letzteren beiden kann man, wenn

$$E = E'\sqrt{\mathsf{H}} \quad F = F'\sqrt{\mathsf{H}} \quad G = G'\sqrt{\mathsf{H}}$$

gesetzt wird auch in der Form

$$4^1)\qquad E'_v - F'_u + E' C_1 + G' A_1 - 2F' B_1 = 0$$

$$G'_u - F'_v + G' A + E' C - 2F' B = 0$$

schreiben. Die zweiten Differentialquotienten der Normalencosinus p genügen den Gleichungen

$$5)\qquad p_{uu} = \alpha p_u + \alpha_1 p_v - p e'$$

$$p_{uv} = \beta p_u + \beta_1 p_v - p f'$$

$$p_{vv} = \gamma p_u + \gamma_1 p_v - p g'$$

für jeden hinzugefügten Index $i = 1, 2, 3$, und die Christoffelschen Symbole $\alpha, \alpha_1, \ldots$ sind durch die folgenden, durch Differentiation der E, F, G in 2) unmittelbar folgenden Gleichungen definirt

$$
6) \quad \begin{gathered}
E_u = (A + \alpha) E + (A_1 + \alpha_1) F \\
E_v = (B + \beta) E + (B_1 + \beta_1) F \\
F_u = (A + \beta_1) F + A_1 G + \beta E = (B_1 + \alpha) F + \alpha_1 G + BE \\
F_v = (B + \gamma_1) F + B_1 G + \gamma E = (C_1 + \beta) F + \beta_1 G + CE \\
G_u = (B + \beta) F + (B_1 + \beta_1) G \\
G_v = (C + \gamma) F + (C_1 + \gamma_1) G
\end{gathered}
$$

Insbesondere ist also bei der Beziehung auf conjugirte Systeme $(F = 0)$

$$
7) \quad \begin{gathered}
A + \alpha = \frac{\partial l E}{\partial u}, \quad (C_1 + \gamma_1) = \frac{\partial l G}{\partial v} \\
B + \beta = \frac{\partial l E}{\partial v}, \quad (B_1 + \beta_1) = \frac{\partial l G}{\partial u} \\
A_1 G + \beta E = \alpha_1 G + BE = 0 \\
B_1 G + \gamma E = \beta_1 G + CE = 0
\end{gathered}
$$

während bei Zugrundelegung von Haupttangentencurven $(E = G = 0)$

$$
\begin{gathered}
A_1 + \alpha_1 = 0, \quad B_1 + \beta_1 = 0 \\
A + \beta_1 = B_1 + \alpha = \frac{\partial l F}{\partial u} \\
B + \gamma_1 = C_1 + \beta = \frac{\partial l F}{\partial v} \\
B + \beta = 0, \quad C + \gamma = 0
\end{gathered}
$$

wird. Durch die hinzugefügten Indices u, v sind überall die entsprechenden Differentialquotienten bezeichnet.

§ I. Die Coefficienten des Längenelementes und das Krümmungsmass von F.

Aus den Gleichungen I) der Einleitung ergibt sich sofort durch Differentiation

$$\Sigma(a x_u) = (a\, \Theta\, \Theta_u)\, D_1 - (a\, \Theta\, \Theta_v)\, D$$
$$\Sigma(a x_v) = (a\, \Theta\, \Theta_u)\, D_{11} - (a\, \Theta\, \Theta_v)\, D_1$$

also insbesondere

$$\Sigma(\Theta x_u) = 0$$
$$\Sigma(\Theta x_v) = 0.$$

Es sind daher die Cosinus der Flächennormale den Θ proportional, d. h.

1) $$r p_1 = \Theta_1, \quad r p_2 = \Theta_2, \quad r p_3 = \Theta_3,$$

wenn man mit r den Radius Vector der Fläche Θ mit den Coordinaten $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$

2) $$r^2 = \Theta_1^2 + \Theta_2^2 + \Theta_3^2$$

bezeichnet. Wird ferner zur Abkürzung

3) $$\varDelta = \begin{vmatrix} \Theta_{1u} & \Theta_{2u} & \Theta_{3u} \\ \Theta_{1v} & \Theta_{2v} & \Theta_{3v} \\ \Theta_1 & \Theta_2 & \Theta_3 \end{vmatrix} = (\Theta\, \Theta_u\, \Theta_v)\ ^{1})$$

gesetzt, so folgt

$$\Sigma\, \Theta_u\, x_u = \varDelta\, D$$
$$\Sigma\, \Theta_v\, x_u = \varDelta\, D_1$$
$$\Sigma\, \Theta_u\, x_v = \varDelta\, D_1$$
$$\Sigma\, \Theta_v\, x_v = \varDelta\, D_{11}.$$

Multiplicirt man die Determinante $(x_u\, x_v\, a)$ in der die a_1, a_2, a_3 willkürliche Grössen sind, mit $\varDelta$, so ergiebt sich die auch für $\varDelta = 0$ gültige Identität

[1] Θ_{iu} bedeutet $\dfrac{\partial \Theta_i}{\partial u}$, entsprechend sind Θ_{iv}, x_{iu} ... zu verstehen.

$$4)\qquad \begin{vmatrix} x_{1u} & x_{2u} & x_{3u} \\ x_{1v} & x_{2v} & x_{3v} \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = \Delta\,\Omega\,\Sigma(a\,\Theta)$$

wenn

$$5)\qquad \Omega = D\,D_{11} - D_1^2$$

gesetzt wird. Damit also durch die Formeln I) eine Fläche und nicht nur eine Curve dargestellt wird, darf weder Δ noch Ω verschwinden.[1]) Erhebt man die Gleichung 4) zum Quadrat, nachdem man die a_1, a_2, a_3 durch Θ_1, Θ_2, Θ_3 ersetzt hat, so folgt

$$6)\qquad \mathsf{H} = e g - f^2 = r^2 \Delta^2 \Omega^2$$

und zugleich hat man, wenn e', f', g' die Coefficienten des Längenelementes der sphärischen Abbildung von F bedeuten, nach 1)

$$r^2 e' = \Sigma\,\Theta_u^2 - r_u^2$$
$$r^2 f' = \Sigma\,\Theta_u\,\Theta_v - r_u r_v$$
$$r^2 g' = \Sigma\,\Theta_v^2 - r_v^2,$$

und aus den Gleichungen

$$e = r^4 [D_1^2 e' - 2\,D\,D_1 f' + D^2 g']$$
$$f = r^4 [D_1 D_{11} e' - (D_1^2 + D\,D_{11}) f' + D\,D_1 g']$$
$$g = r^4 [D_{11}^2 e' - 2\,D\,D_{11} f' + D_1^2 g']$$

welche sich aus den x_u, x_v ergeben, erhält man sofort

$$7)\qquad D_{11} e - 2\,D_1 f + D g = r^4\,\Omega\,(D_{11} e' - 2\,D_1 f' + D g')$$

so dass

$$8)\qquad K = \frac{1}{r^4\,\Omega}$$

das Krümmungsmass von F ist. Denkt man sich endlich

---

[1]) Uebrigens ist auch der Fall, wo die Fläche F in eine Curve degenerirt, also nach der Bezeichnung des § III eine Curve der Fläche Θ adjungirt ist, nicht ohne Interesse.

die Differentialquotienten der Coordinaten x in die Form (Einleitung 1))

$$x_{uu} = A x_u + A_1 x_v + E \frac{\Theta}{r}, \cdots$$

gebracht, so findet man durch Multiplication mit Θ_1, Θ_2, Θ_3 und Addition die Formeln

$$\text{9)} \qquad \begin{aligned} r E &= - \Delta D \\ r F &= - \Delta D_1 \\ r G &= - \Delta D_{11}. \end{aligned}$$

Die Fundamentalgrössen zweiter Ordnung sind also, wie bereits in der Einleitung bemerkt wurde, den D, D_1, D_{11} proportional. Insbesondere ist daher $D = D_{11} = 0$ die Bedingung dafür, dass die Coordinatenlinien Haupttangentencurven sind; $D_1 = 0$ characterisirt die conjugirten Systeme. Da Ω nicht verschwinden darf, sind die developpabelen Flächen F von der obigen Darstellung ausgeschlossen.[1]) Eine besondere Erwähnung scheint auch der Fall zu verdienen, wo zwischen Ω und r eine Relation[2])

$$f(r, \Omega) = 0$$

besteht. Derselbe findet (unter anderem) statt bei den Minimalflächen, den Flächen constanter Krümmung, während im allgemeinen eine solche Beziehung nur für ganz bestimmte Coordinatensysteme auf F auftreten wird.

§ II. Normalform der Differentialgleichung II.

Bei der Anwendung der Lelieuvre'schen Formeln pflegt man als Normalform der Differentialgleichung II) die Form[3])

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial u \, \partial v} = m \, \Theta$$

---

[1]) Trotzdem würde auch die Biegung der Developpabelen Flächen, wie aus § V zu ersehen, hier ihre vollständige Erledigung finden.

[2]) Vgl. § XI.

[3]) Bianchi, Lezioni p. 280.

zu bezeichnen. Es sei hier gestattet, eine andere Normalform zu wählen, bei der die Allgemeinheit des Coordinatensystems erhalten bleibt. Multiplicirt man die Gleichungen II) für $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$ mit diesen drei Grössen und addirt, so folgt für M die Gleichung

$$\begin{aligned} M r^2 &= \frac{\partial}{\partial u} r (r_u D_{11} - r_v D_1) + \frac{\partial}{\partial v} r (r_v D - r_u D_1) \\ &\quad - [D_{11} \Sigma \Theta_u^2 - 2 D_1 \Sigma \Theta_u \Theta_v + D \Sigma \Theta_v^2] \\ &= r \left\{ \frac{\partial}{\partial u} (r_u D_{11} - r_v D_1) + \frac{\partial}{\partial v} (r_v D - r_u D_1) \right\} \\ &\quad - r^2 [D_{11} e' - 2 D_1 f' + D g'] \end{aligned}$$

oder mit Benutzung von 7) und 9) des § I)

$$\begin{aligned} M r &= \frac{\partial}{\partial u} [r_u D_{11} - r_v D_1] + \frac{\partial}{\partial v} [r_v D - r_u D_1] \\ &\quad + \frac{E g + G e - 2 F f}{r^2 \Omega \Delta} \end{aligned}$$

welche für den speciellen Fall $r = 1$ sich schon bei Darboux[1]) aufgestellt findet. Man kann indessen immer M gleich Null voraussetzen, und diese einfache Bemerkung ist es, die eigentlich den Gegenstand aller folgenden Betrachtungen bildet.

Die Ausdrücke I) haben nämlich, wie man unmittelbar erkennt, die Eigenschaft, dass die Coordinaten x_1, x_2, x_3 sich nicht ändern, wenn man unter dem Integralzeichen gleichzeitig die drei Functionen Θ mit dem Nenner λ, dafür aber die Grössen D mit dem Factor λ^2 versieht, wobei λ jede beliebige Function von u, v sein kann. Für die Differentialgleichung II) der die Θ genügen müssen, ist aber diese Aenderung von einem sehr wesentlichen Einflusse. Setzt man nämlich an Stelle von

$$D, D_1, D_{11}, \Theta$$

[1]) Leçons. t. IV S. 45.

der Reihe nach

$$D'\lambda^2,\ D_1'\lambda^2,\ D_{11}'\lambda^2, \frac{\Theta'}{\lambda}$$

so geht dieselbe über in

$$1)\qquad \lambda\left[\frac{\partial}{\partial u}(D_{11}'\,\Theta_u' - D_1'\,\Theta_v') + \frac{\partial}{\partial v}(D'\,\Theta_v' - D_1'\,\Theta_u')\right]$$

$$= \Theta'\left[\frac{M}{\lambda} - \frac{\partial}{\partial u}\left[D_{11}\left(\frac{1}{\lambda}\right)_u - D_1\left(\frac{1}{\lambda}\right)_v\right] - \frac{\partial}{\partial v}\left[D\left(\frac{1}{\lambda}\right)_v - D_1\left(\frac{1}{\lambda}\right)_u\right]\right]$$

Wählt man daher $\frac{1}{\lambda} = z$, so dass z wieder der Differentialgleichung II) genügt, so kann man die Coordinaten der Fläche F in der Form

$$A)\quad \Sigma(ax) = \int (a\,\Theta'\,\Theta_u')(D_1'du + D_{11}'dv) - \int (a\,\Theta'\,\Theta_v')(D'du + D_1'dv)$$

darstellen, aber die Integrabilitätsbedingungen von A) werden jetzt einfach durch die partiellen Differentialgleichungen

$$B)\qquad \frac{\partial}{\partial u}(D_{11}'\,\Theta_u' - D_1'\,\Theta_v') + \frac{\partial}{\partial v}(D'\,\Theta_v' - D_1'\,\Theta_u') = 0$$

ausgedrückt. Man kann also, unter Fortlassung des Index ′ von vorne herein in I) und II) die Grösse M gleich Null voraussetzen. Diese Form der Differentialgleichung möge hier als Normalform bezeichnet werden. Jeder Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial u}(D_{11}z_u - D_1 z_v) + \frac{\partial}{\partial v}(D z_v - D_1 z_u) = Mz$$

entspricht eine besondere Darstellungsart der Fläche, bei der sich indessen die D gleichzeitig um den Factor $\frac{1}{z^2}$, die Θ um den Factor z ändern. Der invariante Character der Normalform spricht sich auch dadurch aus, dass unter Voraussetzung der Gleichung II) mit $M = 0$ die Identität 1) übergeht in die Gleichung

$$2)\qquad \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{D_{11}}{\lambda^2}\frac{\partial\Theta\lambda}{\partial u}-\frac{D_1}{\lambda^2}\frac{\partial\Theta\lambda}{\partial v}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{D}{\lambda^2}\frac{\partial\Theta\lambda}{\partial v}-D_1\frac{\partial\Theta\lambda}{\partial u}\right)$$
$$=-\Theta\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(D_{11}\frac{\partial\frac{1}{\lambda}}{\partial u}-D_1\frac{\partial\frac{1}{\lambda}}{\partial v}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(D\frac{\partial\frac{1}{\lambda}}{\partial v}-D_1\frac{\partial\frac{1}{\lambda}}{\partial u}\right)\right\}$$

welche für jedes λ besteht. Genügt also $\frac{1}{\lambda}$ der Differentialgleichung II) mit $M=0$, so gehören die Coefficienten $\frac{D}{\lambda^2}\ \frac{D_1}{\lambda^2}$ $\frac{D_{11}}{\lambda^2}$ und die Functionen $\Theta_1\lambda$, $\Theta_2\lambda$, $\Theta_3\lambda$ wieder zu einer Darstellung der Fläche, bei der die Differentialgleichung die Normalform besitzt.

Endlich sei darauf aufmerksam gemacht, dass bei allen Transformationen der Variabelen u, v in andere Variabeln u', v' jene Gleichung II) einen invarianten Character hat. Bezeichnet man die Functionaldeterminante der Transformation durch δ,

$$\delta=\frac{\partial u'}{\partial u}\frac{\partial v'}{\partial v}-\frac{\partial u'}{\partial v}\frac{\partial v'}{\partial u}$$

so erhalten die Coefficienten D, D_1, D_{11}, die Werthe

$$(D\ )=D_{11}\left(\frac{\partial u'}{\partial u}\right)^2-2D_1\frac{\partial u'}{\partial u}\frac{\partial u'}{\partial v}+D\left(\frac{\partial u'}{\partial v}\right)^2:\delta$$
$$(D_1)=D_{11}\frac{\partial u'}{\partial u}\frac{\partial v'}{\partial u}-D_1\left(\frac{\partial u'}{\partial u}\frac{\partial v'}{\partial v}+\frac{\partial u'}{\partial v}\frac{\partial v'}{\partial u}\right)+D\frac{\partial u'}{\partial v}\frac{\partial v'}{\partial v}:\delta$$
$$(D_{11})=D_{11}\left(\frac{\partial v'}{\partial u}\right)^2-2D_1\frac{\partial v'}{\partial u}\frac{\partial v'}{\partial v}+D\left(\frac{\partial v'}{\partial v}\right)^2:\delta$$

und zugleich findet die Identität

$$\delta\left[\frac{\partial}{\partial u}(D_{11}\Theta_u-D_1\Theta_v)+\frac{\partial}{\partial v}(D\Theta_v-D_1\Theta_u)\right]=$$
$$\frac{\partial}{\partial u'}[(D_{11})\Theta_{u'}-(D_1)\Theta_{v'}]+\frac{\partial}{\partial v'}[(D)\Theta_{v'}-(D_1)\Theta_{u'}]$$

statt, wie sich durch directe Rechnung bestätigen lässt; man erkennt also in der linken Seite von B) einen Differentialparameter zweiter Ordnung.

§ III. Die Fläche Θ.

Die Fläche F ist vermöge der Formeln A), B) des § II) in denen die Indices ′ jetzt rechterhand fortzulassen sind, auf die Fläche Θ mit den Coordinaten Θ_1, Θ_2, Θ_3 in einer eigenthümlichen Weise bezogen; F möge zu Θ adjungirt heissen. Während aber F der Beschränkung unterliegt, nicht developpabel zu sein, kann für Θ jede beliebige Fläche gewählt werden, falls nur nicht die Determinante Δ verschwindet. In diesem letzteren Falle würde Θ eine Kegelfläche sein, deren Spitze der Coordinatenanfang $\Theta_1 = \Theta_2 = \Theta_3 = 0$ ist, wie sich aus der Gleichung

$$\Delta = \Theta_3^3 \begin{vmatrix} \frac{\partial \frac{\Theta_1}{\Theta_3}}{\partial u} & \frac{\partial \frac{\Theta_1}{\Theta_3}}{\partial v} \\ \frac{\partial \frac{\Theta_2}{\Theta_3}}{\partial u} & \frac{\partial \frac{\Theta_2}{\Theta_3}}{\partial v} \end{vmatrix}$$

ergiebt; nur dieser Fall ist auszuschliessen, übrigens durch Aenderung des Coordinatenanfanges immer zu vermeiden.

Ist nun

$$1)\qquad \begin{aligned} \Theta_{uu} &= A'\,\Theta_u + A_1'\,\Theta_v + E'q \\ \Theta_{uv} &= B'\,\Theta_u + B_1'\,\Theta_v + F'q \\ \Theta_{vv} &= C'\,\Theta_u + C_1'\,\Theta_v + G'q \end{aligned}$$

so gehört zu Θ eine Fläche F, wenn die Differentialgleichungen B) des § II) erfüllt sind, oder wenn nach 1)

$$2)\qquad \begin{aligned} D_{11}A' - 2\,D_1B' + D\,C' + D_{11u} - D_{1v} &= 0 \text{ [1]} \\ D_{11}A_1' - 2\,D_1B_1' + D\,C_1' + D_v - D_{1u} &= 0 \\ D_{11}E' - 2\,D_1F' + D\,G' &= 0 \end{aligned}$$

ist. Nun genügen aber die Grössen

$$E' = (E')\sqrt{\mathsf{H}},\quad F' = (F')\sqrt{\mathsf{H}},\quad G' = (G')\sqrt{\mathsf{H}},$$

den Differentialgleichungen (Einleitung 4[1]))

[1]) Es ist $D_{iu} = \frac{\partial D_i}{\partial u}$ etc.

$$(G')A' - 2(F')B' + (E')C' + (G')_u - (F')_v = 0$$

3) $$(G')A'_1 - 2(F')B'_1 + (E')C'_1 + (E')_v - (F')_u = 0$$

und $$(E')(G') - (F')^2$$

ist das Krümmungsmass von Θ. Es bestehen daher für jede unendlich kleine Biegung der Fläche Θ bei der die $(E'), (F'), (G')$ die unendlich kleinen Incremente

$$\varepsilon D, \quad \varepsilon D_1, \quad \varepsilon D_{11}$$

erhalten — wobei ε eine infinitesimale Constante bedeuten möge — genau die Gleichungen 2), denn die beiden ersteren gehen aus den entsprechenden Gleichungen 3) hervor, wenn man die $(E'), (F'), (G')$ in $(E') + \varepsilon D, \ldots$ übergehen lässt, und aus der Unveränderlichkeit des Krümmungsmasses von Θ folgt die letzte der Gleichungen 2). Um also bei gegebener Fläche Θ alle Flächen F zu finden, die zu Θ adjungirt sind, hat man Θ allen infinitesimalen Biegungsdeformationen zu unterwerfen. Dabei verschwindet für jede zu Θ adjungirte Fläche F die simultane Invariante der Fundamentalgrössen zweiter Ordnung

$$D_{11}E' - 2D_1F' + DG'$$

und die Normalen von F sind parallel den Radien-Vectoren der entsprechenden Puncte von Θ. Ist insbesondere F auf Haupttangentencurven bezogen, so ist auf Θ ein conjugirtes Coordinatensystem mit gleichen Invarianten anzunehmen. Und auch umgekehrt gehört zu jeder Fläche Θ, die auf ein solches System gleicher Invarianten bezogen ist, immer — abgesehen von einer Aehnlichkeitstransformation — eine bestimmte Fläche F, welche auf Haupttangentencurven bezogen ist. In der That, wenn man

$$F_1 = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial B'}{\partial u} = \frac{\partial B'_1}{\partial v}$$

oder $$B' = \frac{-\partial lw}{\partial v}, \quad B'_1 = \frac{-\partial lw}{\partial u}$$

voraussetzt, kann man die Gleichungen 2) dadurch erfüllen, dass man

$$D = D_{11} = 0$$
$$D_1 = w^2 \text{ const}$$

setzt. Die adjungirte Beziehung wird übrigens in den folgenden §§ weiter behandelt werden.

§ IV. Unendlich kleine Biegungen der Fläche F.

Vermöge der Gleichungen B) des § II) kann man setzen

1)
$$\begin{aligned} D_1 \Theta_u - D \, \Theta_v &= \varphi_u \\ D_{11} \Theta_u - D_1 \Theta_v &= \varphi_v \end{aligned}$$

so dass $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ drei Functionen sind, die man als Coordinaten einer neuen Fläche φ betrachten kann. Die am Eingange von § I) angegebenen Identitäten werden aber nach 1) jetzt

$$\Sigma (a \, x_u) = (a \, \Theta \, \varphi_u)$$
$$\Sigma (a \, x_v) = (a \, \Theta \, \varphi_v)$$

und hieraus folgt, wenn man den willkürlichen Grössen a geeignete Werthe ertheilt

2)
$$\begin{gathered} \Sigma x_u \varphi_u = 0 \quad \Sigma x_v \varphi_v = 0 \\ \Sigma (x_u \varphi_v + x_v \varphi_u) = 0 \end{gathered}$$

Man erkennt hierin die Bedingungen, denen die drei Functionen φ zu genügen haben, wenn die Verschiebungscomponenten

$$\varepsilon \varphi_1, \quad \varepsilon \varphi_2, \quad \varepsilon \varphi_3$$

eine unendlich kleine Biegung von F vorstellen sollen. Auch ist

$$\Sigma x_u \varphi_v = (\varphi_v \, \Theta \, \varphi_u) = \Delta \, \Omega$$

oder nach § I), 6)

$$\Sigma x_u \varphi_v = - \Sigma x_v \varphi_u = \frac{\sqrt{\mathsf{H}}}{r}$$

mithin ist $\frac{1}{r}$ die als characteristische Function der

Deformation von Herrn Bianchi (Verschiebungsfunction von Herrn Weingarten) bezeichnete Function, letztere also der reciproke Radius Vector derjenigen Fläche Θ zu der F adjungirt ist.[1])

Aus diesem Zusammenhange nun ergiebt sich zugleich ein Beweis der Darboux'schen Formeln selbst.[2]) Setzt man nämlich die characteristische Function ψ einer infinitesimalen Biegung von F als bekannt voraus, und bezeichnet die Coordinaten der zugehörigen infinitesimalen Verrückung durch

$$\varepsilon \varphi_1, \quad \varepsilon \varphi_2, \quad \varepsilon \varphi_3$$

so ist[3])

$$\varphi_u = \frac{\psi^2}{K\sqrt{\mathsf{H}}}\left(E\frac{\partial \frac{p}{\psi}}{\partial v} - F\frac{\partial \frac{p}{\psi}}{\partial u}\right)$$

$$\varphi_v = \frac{\psi^2}{K\sqrt{\mathsf{H}}}\left(F\frac{\partial \frac{p}{\psi}}{\partial v} - G\frac{\partial \frac{p}{\psi}}{\partial u}\right)$$

oder für

$$\psi = \frac{1}{r}, \quad \frac{p}{\psi} = \Theta$$

$$\varphi_u = \frac{E\,\Theta_v - F\,\Theta_u}{r^2 K\sqrt{\mathsf{H}}}, \quad \varphi_v = \frac{F\,\Theta_v - G\,\Theta_u}{r^2 K\sqrt{\mathsf{H}}}$$

Aus der Gleichung

$$(p_u\, p_v\, p) = \frac{EG - F^2}{\sqrt{\mathsf{H}}} = \frac{(\Theta_u\, \Theta_v\, \Theta)}{r^3} = \frac{\Delta}{r^3}$$

folgt jetzt

$$r^2 K\sqrt{\mathsf{H}} = \frac{\Delta}{r}$$

---

[1]) Weingarten, Ueber die Deformationen einer biegsamen unausdehnbaren Fläche, Kronecker's Journal, C. p. 296, 1886; Bianchi Lezioni p. 275. Cosserat, E., Déformation infinitésimale E. 19.

[2]) Man vergleiche die beiden auf ganz anderen Betrachtungen beruhenden Beweise, welche Herr Darboux selbst in seiner Théorie générale gegeben hat S. 42 u. 46.

[3]) Vgl. z. B. Bianchi p. 276.

oder, wenn man die Grössen D durch die Gleichungen

$$rE = -D\Delta, \quad rF = -D_1\Delta, \quad rG = -D_{11}\Delta$$

einführt,

$$\text{3)} \qquad \varphi_u = D_1\Theta_u - D\Theta_v, \quad \varphi_v = D_{11}\Theta_u - D_1\Theta_v$$

und aus den Gleichungen

$$\Sigma(\Theta x_u) = 0 \quad \Sigma(\Theta x_v) = 0$$
$$\Sigma(\varphi_u x_u) = 0 \quad \Sigma(\varphi_v x_v) = 0$$
$$\Sigma(\varphi_v x_u) = -\Sigma(\varphi_u x_v) = \frac{\sqrt{\mathrm{H}}}{r} = \Omega\Delta$$

ergeben sich jetzt die Werthe der x_u, x_v in der unter A), § II) angegebenen Form. Die Betrachtung der infinitesimalen Deformationen ist also völlig äquivalent mit der Darboux'schen Darstellung, wenn die zugehörige Differentialgleichung in der Normalform vorausgesetzt wird.

Umgekehrt aber entsprechen auch alle infinitesimalen Biegungen von F den Lösungen der partiellen Differentialgleichung B). Soll nämlich überhaupt eine Function ψ die Gleichungen 2) erfüllen, so kann man, da die Determinante Δ als nicht verschwindend vorausgesetzt wird, ψ_u, ψ_v in der Form

$$\psi_u = \lambda\ \Theta + \mu\ \Theta_u + \nu\ \Theta_v$$
$$\psi_v = \lambda_1\Theta + \mu_1\Theta_u + \nu_1\Theta_v$$

annehmen, wo nun $\lambda, \mu, \nu; \lambda_1, \mu_1, \nu_1$ noch zu bestimmen sein werden. Unter zugrundelegung der Ausdrücke für die x_u, x_v folgt aber nunmehr aus dem Nichtverschwinden der Determinante Δ

$$\mu = \quad \varrho D_1 \quad \mu_1 = \quad \varrho D_{11}$$
$$\nu = -\varrho D \quad \nu_1 = -\varrho D_1$$

und aus den Bedingungen der Integrabilität für ψ_u, ψ_v weiter

$$\frac{\partial \lambda}{\partial v} - \frac{\partial \lambda_1}{\partial u} = 0$$

$$\lambda - \varrho_v D + \varrho_u D_1 = 0$$

$$\lambda_1 + \varrho_u D_{11} - \varrho_v D_1 = 0$$

also

$$4)\quad \frac{\partial}{\partial v}(\varrho_v D - \varrho_u D_1) + \frac{\partial}{\partial u}(\varrho_u D_{11} - \varrho_v D_1) = 0$$

Man hat also den folgenden, übrigens schon von Herrn Darboux angegebenen Satz.[1])

Die Coordinaten ψ_1, ψ_2, ψ_3 jeder infinitesimalen Biegung von F sind durch die Ausdrücke

$$5)\quad \begin{aligned} \psi_u &= (\varrho_u D_1 - \varrho_v D)\ \Theta - \varrho\,(D_1\ \Theta_u - D\ \Theta_v) \\ \psi_v &= (\varrho_u D_{11} - \varrho_v D_1)\ \Theta - \varrho\,(D_{11}\,\Theta_u - D_1\,\Theta_v) \end{aligned}$$

gegeben,[2]) falls ϱ der Differentialgleichung 4) genügt, und zugleich wird

$$\Sigma x_u \psi_v = \varrho\,\Omega\,\Delta = \frac{\varrho}{r}\sqrt{\mathsf{H}}$$

also $\frac{\varrho}{r}$ die characteristische Function der Deformation. Dabei gehören aber, da ϱ um eine Constante noch beliebig geändert werden kann, zu jeder Lösung von 4) noch unendlich viele Functionen ψ_i; bezeichnet man eine derselben mit ψ_i^0, so ist

$$\psi_i = \psi_i^0 - \varphi_i \text{ const},$$

wie sofort aus 3) erhellt.

---

[1]) Leçons t. IV S. 45.

[2]) Dieser Satz wird fast selbstverständlich, wenn man die Identität 2) des § II beachtet; die ψ ergeben sich dann sofort in der mit Gl. 5) des Textes übereinstimmenden Form

$$-\psi_u = \varrho^2 D_1 \frac{\partial\left(\frac{\Theta}{\varrho}\right)}{\partial u} - \varrho^2 D \frac{\partial\left(\frac{\Theta}{\varrho}\right)}{\partial v}$$

$$-\psi_v = \varrho^2 D_{11} \frac{\partial\left(\frac{\Theta}{\varrho}\right)}{\partial u} - \varrho^2 D_1 \frac{\partial\left(\frac{\Theta}{\varrho}\right)}{\partial v}.$$

§ V. Die zu φ adjungirte Fläche Φ.

Bezeichnet man die durch $-\Omega$ dividirten Grössen D, D_1, D_{11} durch d, d_1, d_{11}, so gilt nach § IV) 1) die Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial u}(\varphi_u d_{11} - \varphi_v d_1) + \frac{\partial}{\partial v}(\varphi_v d - \varphi_u d_1) = 0$$

Durch die Identität

$$1)\quad \sum_{i=1}^{i=3}(b_i \xi_i) = \int (b\varphi\varphi_u)(d_1 du + d_{11} dv) - \int (b\varphi\varphi_v)(d\,du + d_1 dv)$$

wird also eine Fläche Φ definirt, die zu φ adjungirt ist. Die Fundamentalgrössen zweiter Ordnung von Φ sind dabei denen von F proportional, d. h. conjugirten Systemen auf F (inclusive der sich selbst conjugirten Systeme der Haupttangentencurven) entsprechen wieder insbesondere solche auf Φ.

Setzt man

$$r'^2 = \Sigma\varphi^2$$

so ist $\frac{1}{r'}$ die characteristische Function einer infinitesimalen Biegung von Φ, und für das Product der Krümmungsmasse K und K_1 von F und Φ gilt nach § I), 8) die einfache Beziehung

$$K K_1 = \frac{1}{(r r')^4}$$

Die Fläche Φ ist übrigens noch auf mannigfaltige Weise wählbar, da die drei Functionen φ nur bis auf willkürliche Constanten c_1, c_2, c_3 bestimmt sind. Bezeichnet man die Coordinaten einer bestimmten dieser Flächen Φ, etwa Φ_0 durch ξ^0, so ist allgemein

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= \xi_1^0 - (c_2\,\Theta_3 - c_3\,\Theta_2)\\
\xi_2 &= \xi_2^0 - (c_3\,\Theta_1 - c_1\,\Theta_3)\\
\xi_3 &= \xi_3^0 - (c_1\,\Theta_2 - c_2\,\Theta_1)
\end{aligned}$$

Die beiden Flächen Θ und φ haben nach § IV), 1) in correspondirenden Puncten parallele Normalen. Bezeichnet man die Fundamentalgrössen zweiter Ordnung von Θ und φ mit

$$\begin{matrix} E_1, & F_1, & G_1 \\ E_2, & F_2, & G_2 \end{matrix}$$

so ist

$$\begin{aligned} E_2 &= D_1 E_1 - D F_1 \\ F_2 &= D_1 F_1 - D G_1 = D_{11} E_1 - D_1 F_1 \\ G_2 &= D_{11} F_1 - D_1 G_1 \end{aligned}$$

mithin

$$\begin{aligned} E_1 G_2 - 2 F_1 F_2 + G_1 G_2 &= 0 \\ E_1 G_1 - F_1^2 &= \Omega (E_2 G_2 - F_2^2) \end{aligned} \tag{2}$$

Zwei Flächen, die so auf einander bezogen sind, dass die Normalen in entsprechenden Puncten parallel sind und die Gleichung 2) befriedigt ist, heissen nach Herrn Bianchi[1]) zu einander associirt. Zwischen ihnen besteht völlige Reciprocität; während die x_1, x_2, x_3 die Coordinaten einer infinitesimalen Biegung von φ sind, sind auch die ξ_1, ξ_2, ξ_3 die einer solchen von Θ.

Sind umgekehrt zwei Flächen F und F' durch parallele Normalen auf einander bezogen und bezeichnet man die ihnen zugehörigen Grössen D durch D, D_1, D_{11}; D', D'_1, D'_{11}, so ist

$$\frac{\partial}{\partial u}(D_{11}\,\Theta_u - D_1\,\Theta_v) + \frac{\partial}{\partial v}(D\,\Theta_v - D_1\,\Theta_u) = 0 \tag{3}$$

$$\frac{\partial}{\partial u}(D'_{11}\,(\Theta\lambda)_u - D'_1\,(\Theta\lambda)_v) + \frac{\partial}{\partial v}(D'\,(\Theta\lambda)_v - D'_1\,(\Theta\lambda)_u) = 0$$

wobei unter λ ein geeigneter Factor zu verstehen ist. Setzt man nun

$$W = \Sigma (x\,\Theta)$$

so wird

$$\frac{\partial W\lambda}{\partial u} = \Sigma x\,(\Theta\lambda)_u$$

$$\frac{\partial W\lambda}{\partial v} = \Sigma x\,(\Theta\lambda)_v$$

also auch nach § I) unter 3)

---

[1]) Lezioni, p. 279.

$$\frac{\partial^2 W\lambda}{\partial u^2} = \Sigma x_u (\Theta\lambda)_u + \Sigma x (\Theta\lambda)_{uu} = D \quad \Delta\lambda + \Sigma x (\Theta\lambda)_{uu}$$

$$\frac{\partial^2 W\lambda}{\partial u \partial v} = \Sigma x_u (\Theta\lambda)_v + \Sigma x (\Theta\lambda)_{uv} = D_1 \quad \Delta\lambda + \Sigma x (\Theta\lambda)_{uv}$$

$$\frac{\partial^2 W\lambda}{\partial v^2} = \Sigma x_v (\Theta\lambda)_v + \Sigma x (\Theta\lambda)_{vv} = D_{11} \Delta\lambda + \Sigma x (\Theta\lambda)_{vv}$$

Multiplicirt man diese Gleichungen mit D'_{11}, $-2 D'_1$, D' und addirt, so ergiebt sich vermöge einfacher Umformungen

$$4) \frac{\partial}{\partial u}[D'_{11}(W\lambda)_u - D'_1 (W\lambda)_v] + \frac{\partial}{\partial v}[D'(W\lambda)_v - D'_1 (W\lambda)_u]$$
$$= \lambda \Delta [D_{11} D' - 2 D_1 D'_1 + D D'_{11}].$$

Wird daher angenommen, dass die beiden Flächen associirt sind, so verschwindet die rechte Seite, und damit wird $W\lambda$ eine Lösung der partiellen Differentialgleichung 3). Demnach ist

$$\frac{W\lambda}{r\lambda} = \frac{W}{r}$$

eine characteristische Function für die zweite Fläche. Da aber $\frac{W}{r}$ nichts anderes als der Abstand der Tangentenebene von F vom Coordinatenanfang ist, so erhält man den folgenden von Herrn Bianchi herrührenden Satz.

Bei zwei zu einander associirten Flächen ist der Abstand der Tangentialebene der einen vom Anfang eine characteristische Function der anderen Fläche.[1])

Setzt man dagegen in der Formel 4) $\lambda = 1$ und nimmt sie jetzt für den selbstverständlichen Fall $D = D'$, $D_{11} = D'_{11}$, $D_1 = D'_1$ in Anspruch, so ergiebt sich die Gleichung

$$5) \frac{\partial}{\partial u}(D_{11} W_u - D_1 W_v) + \frac{\partial}{\partial v}(D W_v - D_1 W_u) = 2 \Delta \Omega = 2 \frac{\sqrt{H}}{r}$$

von der später Gebrauch gemacht werden wird.

---

[1]) Sulle deformatione infinitesime delle superficie Rendiconti dell' accad. dei Lincei, 17 Juli 1892. Lezioni p. 278.

§ VI. Projective Umformung von Θ.

Wenn die Differentialgleichung B) des § II) für drei Functionen Θ erfüllt ist, so besteht sie auch bei ungeänderten Werthen der D, D_1, D_{11}, falls man an Stelle der Θ lineare ganze Functionen derselben anführt, also die Fläche Θ durch eine affine Fläche ersetzt. Hierdurch geht die Fläche F in andere Flächen über, die man in weiterem Sinne zu Θ adjungirt nennen kann. Lässt man zunächst die drei Θ um Constanten c_1, c_2, c_3 sich ändern, so ergeben sich als Coordinaten x_1', x_2', x_3' der zugehörigen Fläche

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 + c_2 \varphi_3 - c_3 \varphi_2 + \text{const} \\ y_1' &= y_1 + c_3 \varphi_1 - c_1 \varphi_3 + \text{const} \\ z_1' &= z_1 + c_1 \varphi_2 - c_2 \varphi_1 + \text{const} \end{aligned}$$

falls man mit φ_i die durch Quadratur aus den Formeln des § IV), 3) entstehenden Functionen bezeichnet. Während durch diesen Process wesentlich neue Flächen entstehen, ist dies nicht mehr der Fall, wenn man die Θ durch homogene lineare Functionen ersetzt. Wird nämlich

$$\Sigma\, \Theta_k\, a_{ki} = \Theta_i'$$

gesetzt, derart, dass die Determinante A der a nicht verschwindet, so transformiren sich die Coordinaten der adjungirten Fläche wie Ebenencoordinaten, wie unmittelbar aus der Gleichung A) des § II) durch Multiplication mit A hervorgeht, nach der Gleichung

$$A\, x_i = \Sigma\, a_{ik}\, x_k'.$$

Um endlich zu der allgemeinsten projectiven Umformung von Θ überzugehen, setze man

$$\begin{aligned} \Theta_i' &= \Sigma\, a_{ik}\, \Theta_k + a_{i4}, \quad i = 1, 2, 3 \\ \Theta_4' &= \Sigma\, a_{4k}\, \Theta_k + a_{44} \end{aligned}$$

Führt man nun in die Identität 2) des § II) an Stelle von

$\frac{1}{\lambda}$ den Ausdruck Θ'_4 ein, so wird derselben zufolge, da die rechte Seite verschwindet

$$\frac{\partial}{\partial u}\left[D_{11}\,\Theta'^2_4\,\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\Theta'_i}{\Theta'_4}\right)-D_1\,\Theta'^2_4\,\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\Theta'_i}{\Theta'_4}\right)\right]$$
$$+\frac{\partial}{\partial v}\left[\;D\;\Theta'^2_4\,\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\Theta'_i}{\Theta'_4}\right)-D_1\,\Theta'^2_4\,\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\Theta'_i}{\Theta'_4}\right)\right]=0$$

Setzt man also

$$\eta_i=\frac{\Theta'_i}{\Theta'_4}$$

so ist die Fläche η die allgemeinste projective Umformung von Θ. Bei dem durch den Nenner Θ'_4 hervorgerufenen Uebergang von der affinen Beziehung zur allgemeinen Projectivität ändert sich nun aber, wie aus der in § II) gemachten Bemerkung hervorgeht, die Fläche F gar nicht mehr, wodurch auf eine bemerkenswerthe Invarianz des Systems der adjungirten Flächen hingewiesen wird.

Und setzt man endlich

$$\Theta'^2_4\,D_{11}\,\frac{\partial\eta}{\partial u}-\Theta'^2_4\,D_1\,\frac{\partial\eta}{\partial v}=\varphi'_v$$

$$\Theta'^2_4\,D_1\,\frac{\partial\eta}{\partial u}-\Theta'^2_4\,D\,\frac{\partial\eta}{\partial v}=\varphi'_u$$

$$-d_1=\frac{D_1}{(D\,D_{11}-D_1^2)}\,\Theta'^2_4$$

$$-d_{11}=\frac{D_{11}}{(D\,D_{11}-D_1^2)}\,\Theta'^2_4$$

$$-d=\frac{D}{(D\,D_{11}-D_1^2)}\,\Theta'^2_4$$

also

$$\frac{\partial\eta}{\partial v}=d_{11}\,\varphi'_u-d_1\,\varphi'_v$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial u}=d_1\,\varphi'_u-d\,\varphi'_v$$

— wobei wiederum den η und φ' gleichzeitig dieselben Indices $i = 1, 2, 3$ zu ertheilen sind — so findet man vermöge der Quadratur

$$\Sigma(b\,\xi) = \int (b\varphi'\varphi'_u)(d_1 du + d_{11} dv) - \int (b\varphi'\varphi'_v)(d\,du + d_1 dv)$$

die Coordinaten ξ_1, ξ_2, ξ_3 einer infinitesimalen Biegung von η, da ja die Gleichungen

$$\Sigma\,\eta_u\,\xi_u = 0 \quad \Sigma(\eta_u\,\xi_v + \eta_v\,\xi_u) = 0 \quad \Sigma\,\eta_v\,\xi_v = 0$$

erfüllt sind. Hiermit ist ein directer Beweis des Satzes[1]) geliefert:

Kennt man eine unendlich kleine Biegung einer Fläche, so lässt sich auch mittelst Quadraturen eine unendlich kleine Biegung jeder projectiven Umformung derselben bestimmen.

Hierbei ist vorausgesetzt, dass man die drei Grössen D, D_1, D_{11} kennt, vermöge deren die drei beliebig gegebenen Functionen Θ die Gleichungen

$$D_{11}\,\Theta_u - D_1\,\Theta_v = \varphi_v$$
$$D_1\,\Theta_u - D\,\Theta_v = \varphi_u$$

befriedigen. Wie im § III) gezeigt wurde, erfordert dies die Bestimmung einer infinitesimalen Biegung von Θ; aber die dort gegebene Darstellung würde ausserdem noch überflüssige Quadraturen nöthig machen. Ich beweise daher folgenden Satz:

Kennt man die characteristische Function einer infinitesimalen Biegung der — hier als nicht developpabel angenommenen — Fläche Θ mit den Coordinaten $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$, so kann man vermöge blosser Eliminationen und Differentiationen drei Functionen φ_i und ebenso drei andere Functionen D finden, durch die die Identitäten

[1]) Darboux Leçons t. IV p. 76—78; Bianchi Lezioni p. 304.

$$D_{11}\,\Theta_u - D_1\,\Theta_v = \varphi_v$$
$$D_1\,\Theta_u - D\,\Theta_v = \varphi_v$$

für jeden der hinzugefügten Indices $i = 1, 2, 3$ erfüllt werden.

Es seien also σ die characteristische Function der Deformation von Θ; q_1, q_2, q_3 die Richtungscosinus der Normalen, K das Krümmungsmass, E, F, G die Fundamentalgrössen zweiter Ordnung von Θ;[1]) ξ_1, ξ_2, ξ_3 die Coordinaten der entsprechenden Deformation $\Theta + \varepsilon\,\xi$, so dass

$$\Sigma\,\xi_u\,\Theta_u = 0 \quad \Sigma\,\xi_u\,\Theta_v = -\Sigma\,\xi_v\,\Theta_u = \sigma\sqrt{\mathsf{H}}, \quad \Sigma\,\xi_v\,\Theta_v = 0$$

und[2])

$$\xi_u = \frac{(E q_v - F q_u)}{K\sqrt{\mathsf{H}}}\,\sigma - q\,\frac{(E\,\sigma_v - F\,\sigma_u)}{K\sqrt{\mathsf{H}}}$$
$$\xi_v = \frac{(F q_v - G q_u)}{K\sqrt{\mathsf{H}}}\,\sigma - q\,\frac{(F\,\sigma_v - G\,\sigma_u)}{K\sqrt{\mathsf{H}}}\ {}^{3})$$

ist. Man definire nun drei Functionen φ_i durch die Gleichungen[4])

$$\Sigma\,(\varphi\,q) = \sigma$$
$$\Sigma\,(\varphi\,\xi_u) = 0$$
$$\Sigma\,(\varphi\,\xi_v) = 0$$

Vermöge derselben wird aus den vorstehenden Gleichungen durch Multiplication und Addition

$$E\,\Sigma\,q\,\varphi_v - F\,\Sigma\,q\,\varphi_u = 0$$
$$F\,\Sigma\,q\,\varphi_v - G\,\Sigma\,q\,\varphi_u = 0$$

---

[1]) Von der früher gewählten Bezeichnung dieser Grössen für die Fläche Θ wird hier einen Augenblick abgesehen.

[2]) Bianchi, Lezioni, p. 276.

[3]) Es ist also hier

$$\sqrt{\mathsf{H}} = (q\,\Theta_u\,\Theta_v)$$
$$\mathsf{H}K = EG - F^2,$$

[4]) Dieselben gestatten eine Auflösung nach φ, da die Determinante der auf der linken Seite stehenden Coefficienten den Werth $\sigma^2\sqrt{\mathsf{H}}$ hat, also nicht verschwindet.

und hieraus folgt

$$\Sigma q \varphi_v = 0 \quad \Sigma q \varphi_u = 0.$$

Da aber die q_1, q_2, q_3 zu der Normalen von Θ gehören, so folgt hieraus weiter

$$\varphi_u = \alpha \Theta_u + \beta \Theta_v$$
$$\varphi_v = \gamma \Theta_u + \delta \Theta_v$$

mithin wird

$$\Sigma \xi_u \varphi_u = -\beta \sigma \sqrt{\mathsf{H}}; \quad \Sigma \xi_u \varphi_v = -\delta \sigma \sqrt{\mathsf{H}}$$
$$\Sigma \xi_v \varphi_u = +\alpha \sigma \sqrt{\mathsf{H}}; \quad \Sigma \xi_v \varphi_v = +\gamma \cdot \sigma \sqrt{\mathsf{H}}.$$

Da ferner die Gleichungen

$$\Sigma \xi_u \varphi_u = -\Sigma \varphi \xi_{uu}$$
$$\Sigma \xi_u \varphi_v = -\Sigma \varphi \xi_{uv}$$
$$\Sigma \xi_v \varphi_u = -\Sigma \varphi \xi_{uv}$$
$$\Sigma \xi_v \varphi_v = -\Sigma \varphi \xi_{vv}$$

bestehen, so ergiebt sich

$$\alpha = -\frac{\Sigma \varphi \xi_{uv}}{\sigma \sqrt{\mathsf{H}}}, \quad \beta = +\frac{\Sigma \varphi \xi_{uu}}{\sigma \sqrt{\mathsf{H}}}$$

$$\gamma = -\frac{\Sigma \varphi \xi_{vv}}{\sigma \sqrt{\mathsf{H}}}, \quad \delta = +\frac{\Sigma \varphi \xi_{uv}}{\sigma \sqrt{\mathsf{H}}}$$

so dass, wenn man

$$\alpha = -\delta = D_1$$
$$\beta = -D, \ \gamma = D_{11}$$

setzt

$$D = -\frac{\lambda(E)}{\sigma \sqrt{\mathsf{H}}}$$

$$D_1 = -\frac{\lambda(F)}{\sigma \sqrt{\mathsf{H}}}$$

$$D_{11} = -\frac{\lambda(G)}{\sigma \sqrt{\mathsf{H}}}$$

wird, falls man zur Abkürzung

$$\lambda = \sqrt{\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2}$$

setzt und mit (E), (F), (G) die Fundamentalgrössen zweiter Ordnung von ξ bezeichnet. Hiermit ist aber die verlangte Darstellung ausgeführt und zugleich die Aufgabe gelöst, alle Flächen zu finden, die auf eine gegebene durch parallele Normalen so bezogen werden können, dass die simultane Invariante der beiden aus den Fundamentalgrössen der zweiten Ordnung gebildeten quadratischen Formen verschwindet.

Setzt man endlich noch zur Abkürzung

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= \alpha\,\sigma_u + \alpha_1\,\sigma_v - e'\,\sigma - \sigma_{uu} \\
\sigma_2 &= \beta\,\sigma_u + \beta_1\,\sigma_v - f'\,\sigma - \sigma_{uv} \\
\sigma_3 &= \gamma\,\sigma_u + \gamma_1\,\sigma_v - g'\,\sigma - \sigma_{vv}
\end{aligned}$$

wobei die Coefficienten $\alpha, \alpha_1 \ldots e', f', g'$ sich auf die sphärische Abbildung von Θ beziehen, so hat man übrigens

$$\begin{aligned}
\frac{\lambda\,(E)}{\sigma} &= \frac{\sigma_2\,E - \sigma_1\,F}{K\sqrt{\mathsf{H}}} \\
\frac{\lambda\,(F)}{\sigma} &= \frac{\sigma_3\,E - F\,\sigma_2}{K\sqrt{\mathsf{H}}} = \frac{\sigma_2\,F - G\,\sigma_1}{K\sqrt{\mathsf{H}}} \\
\frac{\lambda\,(G)}{\sigma} &= \frac{\sigma_3\,F - \sigma_2\,G}{K\sqrt{\mathsf{H}}}.
\end{aligned}$$

§ VII. Aequidistant gebogene Flächen.

Ist die Fläche F eine Minimalfläche und auf die Cosinus ihrer Normalen Θ_1, Θ_2, Θ_3 bezogen, oder nach der in § III) eingeführten Ausdrucksweise der Kugel Θ adjungirt, so ist $r = 1$ und demgemäss die in § II) mit M bezeichnete Grösse gleich Null. Die Differentialgleichung II) der Einleitung befindet sich daher in ihrer Normalform, und auch umgekehrt wird sich nur dann bei einer zur Kugel adjungirten Fläche die Differentialgleichung II) in der Normalform befinden, wenn dieselbe eine Minimalfläche ist.

Ein besonderes Interesse besitzen diejenigen Flächen, welche eine infinitesimale äquidistante Biegung gestatten, bei der also alle Puncte der Fläche gleich lange Wegelemente beschreiben. Sollen nun $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ die Coordinaten einer solchen Verschiebung sein, so ist $\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 =$ Constans. Dann aber ist die in § V) eingeführte Fläche Φ eine Minimalfläche, für die $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ den Cosinus ihrer Normalen bis auf einen constanten Factor, den man auch gleich der Einheit annehmen kann, proportional sind. Da man auch umgekehrt diese Minimalfläche beliebig annehmen kann, so erhält man die explicite Darstellung aller Flächen, welche eine infinitesimale äquidistante Biegung gestatten, wenn man, von den Gleichungen einer Minimalfläche ausgehend, dieselbe der Kugel $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ adjungirt. Alsdann kann man nach dem im § VI auseinandergesetzten Verfahren mit Hülfe der characteristischen Function die Grössen $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$ finden, aus denen endlich vermöge der Formeln I) die Coordinaten der gesuchten Fläche sich durch Quadratur ergeben.[1])

§ VIII. Die adjungirte Beziehung.

In § III) ist als adjungirte Fläche einer Fläche Θ die Fläche F bezeichnet worden. Umgekehrt ist eine gegebene Fläche F zu unendlich vielen Flächen Θ adjungirt, und die Aufgabe, alle diese Flächen zu finden, ist geradezu die der infinitesimalen Deformationen von F. Denn bezeichnet man

[1]) Im XXI. Bande des Bulletin de la Société Mathém. de France, p. 134, 1893 hat Herr Caronnet (Sur des couples de surfaces applicables) diejenigen Flächen untersucht, welche so in isometrische Beziehung versetzt werden können, dass die Entfernung correspondirender Puncte constant ist. Das dort benutzte Verfahren, mit Hülfe des aus den Linien von der Länge Null gebildeten Coordinatensystems die Gleichungen in eine übersichtliche Form zu bringen, lässt sich natürlich auch hier anwenden, wo diese Entfernung eine unendlich kleine Constante sein soll; ich bemerke hier nur, dass man dann auf die Liouville'sche partielle Differentialgleichung geführt wird. Die expliciten Gleichungen der äquidistant verbiegbaren Flächen finden sich übrigens schon bei Darboux, théorie générale, t. IV, p. 17, wie ich erst später bemerkte.

mit ψ die characteristische Function irgend einer Deformation von F, so sind

$$\Theta_1 = \frac{p_1}{\psi}, \quad \Theta_2 = \frac{p_2}{\psi}, \quad \Theta_3 = \frac{p_3}{\psi}$$

die Coordinaten jeder Fläche, zu der F adjungirt ist. Alle diese Flächen sind, wie man sieht, durch Centralprojection vom Anfang der Coordinaten auf einander bezogen.

Mittelst der in der Einleitung angegebenen Bezeichnung für die Christoffel'schen zu dem sphärischen Bilde von F gehörigen Symbole kann man leicht die Fundamentalgrössen zweiter Ordnung für Θ angeben. Sind nämlich, wie früher, die Cosinus der Normalen von Θ durch q_1, q_2, q_3 bezeichnet, und setzt man, was nach der in § III für Θ eingeführten Voraussetzung immer zulässig ist,

$$q = \lambda\,\Theta_u + \mu\,\Theta_v + \nu p$$

so wird

$$\begin{aligned} \Theta_{uu} &= \Theta_u \left(\alpha - \frac{2\psi_u}{\psi} - \lambda \frac{\delta}{\nu}\right) + \Theta_v \left(\alpha_1 - \mu \frac{\delta}{\nu}\right) + \frac{\delta}{\nu} q \\ 1) \quad \Theta_{uv} &= \Theta_u \left(\beta - \frac{\psi_v}{\psi} - \lambda \frac{\delta_1}{\nu}\right) + \Theta_v \left(\beta_1 - \frac{\psi_u}{\psi} - \mu \frac{\delta_1}{\nu}\right) + \frac{\delta_1}{\nu} q \\ \Theta_{vv} &= \Theta_u \left(\gamma - \lambda \frac{\delta_{11}}{\nu}\right) + \Theta_v \left(\gamma_1 - \frac{2\psi_v}{\psi} - \mu \frac{\delta_{11}}{\nu}\right) + \frac{\delta_{11}}{\nu} q \end{aligned}$$

falls zur Abkürzung

$$\begin{aligned} \delta \; &= \frac{1}{\psi^2} [\alpha\psi_u + \alpha_1\psi_v - e'\psi - \psi_{uu}] \\ 2) \qquad \delta_1 &= \frac{1}{\psi^2} [\beta\psi_u + \beta_1\psi_v - f'\psi - \psi_{uv}] \\ \delta_{11} &= \frac{1}{\psi^2} [\gamma\psi_u + \gamma_1\psi_v - g'\psi - \psi_{vv}] \end{aligned}$$

die mit ν multiplicirten Fundamentalgrössen zweiter Ordnung von Θ bedeuten. Nach § III), 2) ist aber die Gleichung, der die Function ψ genügen muss

$$E\delta_{11} - 2F\delta_1 + G\delta = 0.\text{[1]} \tag{3}$$

Dabei ist zugleich

$$\psi \Sigma x_u \Theta_u = -E, \quad \psi \Sigma x_v \Theta_v = -G$$
$$\psi \Sigma x_v \Theta_u = -F = +\psi \Sigma x_u \Theta_v$$

also

$$-\Sigma dx\, d\Theta = \frac{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}{\psi}$$

oder, wenn man mit ds, $d\sigma$ correspondirende Längenelemente auf F, Θ, mit ε den Winkel derselben, mit ϱ den Krümmungshalbmesser des zugehörigen Normalschnittes von F bezeichnet

$$-\varrho\psi\cos\varepsilon = \frac{ds}{d\sigma}$$

Den Richtungen der Haupttangenten von F (und nur diesen) entsprechen daher auf jeder Fläche, zu der F adjungirt ist, dazu senkrechte; die Haupttangentencurven von F stehen senkrecht auf denjenigen, die ihnen auf Θ entsprechen. —

Es soll sich nun im folgenden um eine nähere Characterisirung der adjungirten Beziehung handeln. Insbesondere, welche Eigenschaften besitzen diejenigen Flächen, die zu gegebenen Flächen Θ adjungirt sind? In Rücksicht auf die ausgezeichnete Stellung, welche projective Umformungen von Θ besitzen, § VI), soll hier nur auf solche Charactere von Θ Bezug genommen werden, welche projectiven Umformungen gegenüber ungeändert bleiben. Und auch von diesen kann hier nur eine kleine Zahl herausgehoben werden, da die Untersuchungen sonst die hier gesteckten Grenzen weit überschreiten würden.[2])

---

[1]) Diese Form der Weingarten'schen Differentialgleichung (Kronecker's Journal C. p. 303), auch bei Bianchi Lezioni, p. 277.

[2]) Aus demselben Grunde habe ich mir gestattet, an manchen Stellen des folgenden nur anzudeuten, in welcher Weise die betreffenden Untersuchungen weiter ausgeführt werden könnten.

Man kann die Gleichung 3) zunächst durch die Annahme $\delta = \delta_1 = \delta_{11} = 0$ erfüllen. Die Fläche Θ ist dann eine Ebene; die characteristische Function φ ist durch das unbeschränkt integrable System der Gleichungen 2), in denen die linken Seiten gleich Null zu nehmen sind, definirt, dessen allgemeinste Lösung, wie aus der Bedeutung der $a, a_1 \ldots e', f', g'$ als der zur sphärischen Abbildung von F gehörigen Christoffel'schen Symbole hervorgeht, mit Hülfe von drei willkürlichen Constanten a_1, a_2, a_3 durch

$$\varphi = a_1 p_1 + a_2 p_2 + a_3 p_3$$

ausgedrückt wird. In der That wird dann auch $\Sigma(a\,\Theta) = 1$. Jede Fläche kann also auf unendlich viele Arten der Ebene adjungirt werden, aber die zugehörigen infinitesimalen Biegungen sind einfach die unendlich kleinen Bewegungen der Fläche.[1])

Soll Θ auf Haupttangentencurven bezogen sein, so ist $\delta = \delta_{11} = 0$ zu setzen. Dann ist nach 3) nothwendig $F = 0$, d. h. das Coordinatensystem auf der Fläche F ein conjugirtes. Aber dies ist nicht hinreichend. Denn für φ hat man nach 2) die Gleichungen

$$4)\qquad \begin{aligned} \varphi_{uu} &= a\,\varphi_u + a_1\,\varphi_v - e'\,\varphi \\ \varphi_{uv} &= \beta\,\varphi_u + \beta_1\,\varphi_v - f'\,\varphi + X \\ \varphi_{vv} &= \gamma\,\varphi_u + \gamma_1\,\varphi_v - g'\,\varphi \end{aligned}$$

falls mit X eine noch zu bestimmende Function von u, v bezeichnet wird. Dieselbe muss den Integrabilitätsbedingungen von 4) zufolge den Gleichungen

$$\frac{\partial l X}{\partial u} = a - \beta_1$$

$$\frac{\partial l X}{\partial v} = \gamma_1 - \beta$$

genügen. Da aber nach den Gleichungen 6) der Einleitung

---

[1]) Bianchi, Lezioni, p. 277.

$$\alpha + \beta_1 = \frac{\partial l \sqrt{h}}{\partial u}, \quad \beta + \gamma_1 = \frac{\partial l \sqrt{h}}{\partial v}$$

$$\beta = -A_1 \frac{G}{E}, \quad \beta_1 = -C \frac{E}{G}$$

ist, so ergiebt sich für F die weitere Bedingung

5) $$\frac{\partial \beta}{\partial u} = \frac{\partial \beta_1}{\partial v} \quad \text{oder} \quad \frac{\partial \frac{EC}{G}}{\partial v} = \frac{\partial \frac{A_1 G}{E}}{\partial u}$$

Diese Gleichung sagt nach den bekannten Untersuchungen des Herrn Dini[1]) aus, dass das conjugirte System auf F zum sphärischen Bilde die sphärische Abbildung des Systems der Haupttangentencurven einer (anderen) Fläche haben muss. Bezeichnet man unter dieser Voraussetzung mit φ_0 eine der Lösungen des unbeschränkt integrabelen Systems 4), so ist die allgemeinste Lösung, wie aus der vorher gemachten Bemerkung folgt:

$$\varphi = \varphi_0 + a_1 p_1 + a_2 p_2 + a_3 p_3$$

Die Bedingung 5) ist insbesondere erfüllt für diejenigen Flächen, auf denen $A_1 = C = 0$ ist, d. h. auf denen ein conjugirtes Curvensystem von geodätischen Linien existirt; diese entsprechen dabei den Haupttangentencurven von Θ; eine weitere Ausführung aber muss hier unterbleiben.

Die Fläche Θ wird zur Regelfläche, wenn noch die Bedingung $\alpha_1 = 0$ hinzugefügt wird; denn nach 2) sind dann die Haupttangentencurven u (variabel) zugleich geodätisch. Der Gleichung $\alpha_1 = -\frac{BE}{G}$ (Einleitung 7)) zufolge muss jetzt aber B verschwinden, die Fläche F also ein conjugirtes System zulassen, dessen eine Curvenschaar aus den Berührcurven von umschriebenen Cylindern besteht, oder „cylindrisch" ist; ausserdem muss natürlich die Bedingung 5) erfüllt sein. Es ist leicht diese Flächenklasse vollständig

[1]) U. Dini, sopra alcune formole generali . . Ann. di Matematica, ser. II, t. IV. p. 183.

durch Gleichungen zu definiren. Nimmt man nämlich an, dass

$$F = 0, \quad B = 0, \quad \beta = \frac{\partial l \varphi}{\partial v}, \quad \beta_1 = \frac{\partial l \varphi}{\partial u}, \quad \alpha_1 = 0$$

sei, so folgt aus den Gleichungen 6) der Einleitung

$$E_v = \beta E, \quad E = \varphi U$$

wo U nur Function von u ist, und ebenso

$$B_1 + \beta_1 = \frac{\partial l G}{\partial u}, \quad B_1 = \frac{\partial l \left(\frac{G}{\varphi}\right)}{\partial u}$$

Die Gleichungen

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u \, \partial v} = B \frac{\partial x}{\partial u} + B_1 \frac{\partial x}{\partial v}$$

liefern nun

$$\frac{\partial l x_v}{\partial u} = \frac{\partial l \frac{G}{\varphi}}{\partial u}$$ oder nach Integration

$$x_v^i = \frac{G}{E} U V_i$$

und damit die Darstellung der Fläche F in der Form

6) $$x_i = U \int \lambda V_i \, dv + U_i$$

wo U_i, V_i, U willkürliche Functionen der zugehörigen Argumente u, v allein bedeuten, und λ zur Abkürzung für $\frac{G}{E}$ gesetzt ist. Aber die Gleichung 6) liefert noch keine explicite Darstellung der Coordinaten von F, da die Function λ von u und v nicht willkürlich angenommen werden darf, vielmehr noch einer complicirten Differentialgleichung genügen muss.

Eine solche erhält man aber, wenn man sich der von Herrn Königs[1]) angegebenen expliciten Darstellung aller

[1]) Königs, G. Détermination sous forme explicite de toute surface réglée rapportée à ses lignes asymptotiques, Compt. Rend. CVI, p. 51—54, 1888.

Regelflächen in Bezug auf das System ihrer Haupttangentencurven bedient. Nimmt man demgemäss

$$\Theta_{uu} = a\,\Theta_u\,,$$
$$\Theta_{uv} = b\,\Theta_u + b_1\,\Theta_v + q\,F_1\,,$$
$$\Theta_{vv} = c\,\Theta_u + c_1\,\Theta_v$$

wo sich die a, b, b_1, c, c_1, F_1 ohne Schwierigkeit aus den von Herrn Königs angegebenen Formeln berechnen lassen, so ergeben sich nach § III), 2) für die Grössen D, D_1, D_{11} der Fläche F die Gleichungen

$$D_1 = 0 \quad D_{11}a + Dc + D_{11u} = 0$$
$$Dc_1 + D_v = 0$$

Da aber nothwendiger Weise

$$c_1 = \frac{\partial l \sqrt{F_1 h}}{\partial v}, \quad a = \frac{\partial l \sqrt{F_1 h}}{\partial u}$$

ist, so folgt

$$D = \frac{U}{\sqrt{F_1 h}}, \quad D_{11}\sqrt{F_1 h} = -\int c\,U\,du + V$$

und man erhält jetzt die expliciten Coordinaten dieser Flächenclasse durch Quadraturen, sowie man die ermittelten Werthe der D, D_1, D_{11} in die Gleichung I) einträgt. Es ist damit zugleich die Bestimmung aller Flächen gegeben, auf denen die eine Schaar der Curven eines conjugirten Systems, dessen sphärische Abbildung der Dini'schen Differentialgleichung 5) genügt, cylindrisch ist.

Die Regelfläche wird insbesondere zur Fläche zweiten Grades, wenn auch γ mithin B_1 gleich Null angenommen wird. Dann aber wird F eine Translationsfläche, wie übrigens auch unmittelbar aus 6) hervorgeht, denn es wird $G = \varphi\,V$, also x_i von der Form $U_i + V_i$. Die Coordinaten dieser Flächen kann man unmittelbar hinschreiben; es sind übrigens ganz specielle Translationsflächen, da ihr sphärisches Bild aus dem auf die Kugel projicirten Systeme der Erzeugenden einer Fläche zweiten Grades bestehen muss.[1])

---

[1]) Die im Texte enthaltene Bemerkung erkennt man sehr leicht im Zusammenhang mit den Betrachtungen des § IV); sie kommt übrigens auf den geometrisch fast selbstverständlichen Satz hinaus, dass eine Haupttangentencurve längs deren die Normalen der Fläche einer festen Ebene parallel sind, eine Gerade ist. Um dies direct nachzuweisen, beweise ich den folgenden, vielleicht neuen Satz:

Eine Haupttangentencurve, längs deren die Flächennormalen mit einer festen Richtung einen constanten Winkel bildet, ist eine Schraubenlinie.

Sei also u eine Haupttangentencurve der auf das System ihrer Haupttangentencurven u, v bezogenen Fläche, p_i die Cosinus der Normalen. Ist nun längs der Curve u

$$\Sigma p_i V_i = \text{const} = c,$$

so folgt durch Differentiation nach u (nach Einleitung 1) u. 2))

$$f \Sigma V x_u - e \Sigma V x_v = 0$$

oder

$$\Sigma V x_u = \lambda e$$
$$\Sigma V x_v = \lambda f$$

Durch weitere Differentiation folgt:

$$\begin{aligned} B \Sigma V x_u + B' \Sigma V x_v + c F &= \lambda_u f + \lambda f_u \\ A \Sigma V x_u + A' \Sigma V x_v &= \lambda_u e + \lambda e_u \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} \lambda (B e + B' f) + c F &= \lambda_u f + \lambda f_u \\ \lambda (A e + A' f) &= \lambda_u e + \lambda e_u \end{aligned}$$

Aus der letzten Gleichung folgt aber

$$\lambda = \frac{V}{\sqrt{e}}$$

wo V eine Function von v allein ist, während die erste übergeht in

$$\lambda A_1 \mathsf{H} = c e F$$

oder

$$\frac{A_1 \sqrt{\mathsf{H}}}{e \sqrt{e}} = \frac{c F}{V \sqrt{\mathsf{H}}}.$$

Die (geodätische) Krümmung der Haupttangentencurve ist daher gleich $\frac{c}{V} \sqrt{K}$, wenn K das Krümmungsmass der Fläche bezeichnet. Da

Zu diesen Flächen gehören insbesondere auch die Minimalflächen. Setzt man für einen Augenblick

$$\delta \psi^2 = d, \quad \delta_1 \psi^2 = d_1, \quad \delta_{11} \psi^2 = d_{11}$$

so geben die Gleichungen 2)

$$\psi_{uu} = a \psi_u + a_1 \psi_v - e' \psi + d$$
$$\psi_{uv} = \beta \psi_u + \beta_1 \psi_v - f' \psi + d_1$$
$$\psi_{vv} = \gamma \psi_u + \gamma_1 \psi_v - g' \psi + d_{11};$$

sie erfordern die Integrabilitätsbedingungen

7) $$a d_1 + a_1 d_{11} + \frac{\partial d}{\partial v} = \beta d + \beta_1 d_1 + \frac{\partial d_1}{du}$$

$$\beta d_1 + \beta_1 d_{11} + \frac{\partial d_1}{\partial v} = \gamma d + \gamma_1 d_1 + \frac{\partial d_{11}}{\partial u}$$

nebst der Gleichung 3)

3) $$E d_{11} - 2 F d_1 + G d = 0$$

Die beiden Gleichungen 7) sind immer erfüllt für $d = k e'$, $d_1 = k f'$, $d_{11} = k g'$, falls k eine beliebige Constante bedeutet, denn es sind die Gleichungen 4) der Einleitung für die Kugelfläche. Aber die Gleichung 3) besteht für die Werthe der d nur dann, wenn

$$E e' + G f' - 2 F g' = 0$$

d. h. wenn F eine Minimalfläche ist. Man erhält so die Lösung

$$\psi = k + a_1 p_1 + a_2 p_2 + a_3 p_3$$

und das heisst: Jede Minimalfläche ist adjungirt zu den Flächen zweiten Grades

$$\Theta_i = \frac{p_i}{\psi}$$

deren Gleichung

$$k^2 \Sigma \Theta^2 = [1 - \Sigma(\Theta a)]^2$$

---

aber die Torsion der Haupttangentencurve ebenfalls zu $\sqrt{K}$ proportional ist, so hat die Curve die Eigenschaft, dass das Verhältniss ihrer beiden Hauptkrümmungen ein constantes ist, wie zu zeigen war.

ist; es sind dies Rotationsflächen zweiten Grades mit imaginären Erzeugenden.

Die Fläche Θ kann auch eine Developpabele werden. Wählt man die Erzeugenden derselben zu den Curven u (variabel), so ist $\delta = \delta_1 = 0$, also nach 3) auch $E = 0$. Durch Wahl der Curven v aber lässt sich erreichen, dass auch G gleich Null wird. Da jetzt auch $\alpha_1 = 0$ ist, folgt nach 6) der Einleitung $A_1 = 0$, d. h. die Fläche F ist eine Regelfläche. Jede Regelfläche kann also einer Developpabelen adjungirt werden, und umgekehrt können auch nur Regelflächen zu developpabelen Flächen adjungirt sich verhalten. Dabei stehen, wie oben bemerkt, die Erzeugenden der beiden Flächen F und Θ auf einander senkrecht.

In der That, setzt man nach 2)

$$\begin{aligned}
\varphi_{uu} &= \alpha\,\varphi_u - e'\,\varphi\\
\varphi_{uv} &= \beta\,\varphi_u + \beta_1\,\varphi_v - f'\,\varphi\\
\varphi_{vv} &= \gamma\,\varphi_u + \gamma_1\,\varphi_v - g'\,\varphi + X
\end{aligned}$$

wo X eine noch zu bestimmende Function bezeichnet, so muss zufolge der noch erforderlichen Integrabilitätsbedingung

$$\frac{\partial\, l\, X}{\partial u} = \beta_1 = \frac{\partial}{2}\,\frac{\partial\, l\, \frac{F}{\sqrt{H}}}{\partial u}$$

X aus der Gleichung

$$X = V\sqrt{\frac{F}{\sqrt{H}}}$$

bestimmt werden. Da die Function V noch vollkommen willkürlich bleibt, so kann jede Regelfläche noch unendlich vielen Developpabelen adjungirt werden;[1]) ich werde später zeigen, dass man jede Regelfläche sogar noch auf unendlich viele Arten solchen Developpabelen adjungiren kann, die einer gegebenen Fläche, insbesondere der Kugel, umschrieben sind.

---

[1]) Es dürfte nicht uninteressant sein, die hierin enthaltenen Möglichkeiten genauer zu untersuchen.

Einen noch specielleren Character besitzen natürlich diejenigen Flächen, welche einer Kegelfläche, deren Spitze nicht mit dem Coordinatenanfang zusammenfallen darf, adjungirt sind. Es ist leicht, die expliciten Coordinaten dieser Flächen anzugeben.

Sind

$$\Theta_i = a_i + u x_i$$

die Coordinaten einer Kegelfläche mit der Spitze a_i, die x_i also Functionen von v, welche die Gleichung $\Sigma x_i^2 = 1$ erfüllen, so wird das System der Coefficienten e, f, g für Θ gegeben durch

$$e = 1, \quad f = 0, \quad g = u^2 \omega^2$$

wenn $\omega^2 = \Sigma x_v^2$ gesetzt wird. Die in § III), 1) mit $A', A_1' \ldots$ bezeichneten Christoffel'schen Ausdrücke für Θ werden daher

$$A' = 0, \; A_1' = 0, \; B' = 0, \; B_1' = \frac{g_u}{2g}, \; C' = -\frac{g_u}{2}, \; C_1' = \frac{g_v}{2g}$$

und die Gleichungen 2) des § III) geben

$$D_{11u} - D_{1v} = 0, \; D_1 g_u + D_{1u} g = 0, \; D = 0$$

oder

$$D_1 = \frac{V}{u^2}, \; D_{11} = -\frac{V'}{u} + V_1$$

wo V' der Differentialquotient von V, V_1 eine neue willkürliche Function von v ist. Hieraus folgt dann für die Coordinaten der zu Θ adjungirten Fläche die Darstellung

$$x_1 = \int (a_2 z - a_3 y)\, V_1\, dv - \int (y z_v - z y_v)\, V dv - (a_2 z - a_3 y) \frac{V}{u}$$

nebst analogen Ausdrücken für x_2 und x_3.

Da also

$$\Sigma (a x) = -\int (a x x_v)\, V dv$$

wird, so ist längs jeder Erzeugenden die Projection des Radius Vector der Fläche auf die feste Richtung a_1, a_2, a_3 constant, d. h. die zu Kegelflächen adjungirten Flächen sind Regelflächen, deren Erzeugende einer festen Ebene parallel sind.

Man wird unmittelbar übersehen, wie sich derartige Untersuchungen, die hier nur für die einfachsten projectiv ausgezeichneten Flächen Θ angedeutet sind, in der mannigfaltigsten Weise fortsetzen lassen. Nur ein Fall mag hier noch angeführt werden. Sind die Curven u, v auf F zunächst nur der Bedingung unterworfen, ein conjugirtes System zu bilden, so ist die Function ψ den Gleichungen 7) gemäss zu bestimmen. Man setze daher

$$d_1 = \mu, \quad d = \varrho E, \quad d_{11} = -\varrho G$$

so dass aus 7) entsteht

$$\alpha \mu - \alpha_1 \varrho G + \frac{\partial \varrho E}{\partial v} = \beta \varrho E + \beta_1 \mu + \frac{\partial \mu}{\partial u}$$

$$\beta \mu - \beta_1 \varrho G + \frac{\partial \mu}{\partial v} = \gamma \varrho E + \gamma_1 \mu - \frac{\partial \varrho G}{\partial u}$$

oder nach 6) der Einleitung

$$\mu \left[\frac{\partial l E}{\partial u} - A + C \frac{E}{G}\right] - \frac{\partial \mu}{\partial u} = -E\,[2\varrho B + \varrho_v]$$

$$\mu \left[\frac{\partial l G}{\partial v} - C_1 + A_1 \frac{G}{E}\right] - \frac{\partial \mu}{\partial v} = \quad G\,[2\varrho B_1 + \varrho_u]$$

Ist nun die Fläche F auf ein conjugirtes System gleicher Invarianten bezogen, so kann man diese Gleichungen durch die Annahme $\mu = 0$ erfüllen, womit zugleich ϱ bis auf einen constanten Factor bestimmt ist. Die Fläche Θ ist nun auf ein conjugirtes System bezogen; man hat einfach den bekannten Satz, dass zu jedem conjugirten System gleicher Invarianten eine infinitesimale Biegung gehört. — Wenn aber auch noch die Bedingungen

$$\frac{\partial l \mu}{\partial u} = \frac{\partial l E}{\partial u} + C \frac{E}{G} - A$$

$$\frac{\partial l \mu}{\partial v} = \frac{\partial l G}{\partial v} + A_1 \frac{G}{E} - C_1$$

erfüllt werden können, welche wegen der für conjugirte Systeme allgemein gültigen Identität

$$\frac{\partial^2 l\frac{E}{G}}{\partial u\,\partial v} + \frac{\partial}{\partial u}\left(A_1\frac{G}{E}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(C\frac{E}{G}\right) = B_u - B'_v$$

in

$$\frac{\partial^2 l\frac{E}{G}}{\partial u\,\partial v} = 0 \text{ oder } \frac{\partial \beta}{\partial u} = \frac{\partial \beta_1}{\partial v}$$

übergehen, so ergiebt sich auch μ gleich einer mit einer Constanten multiplicirten Function. Man hat also den Satz:

Wenn auf einer Fläche ein conjugirtes System gleicher Invarianten existirt, dessen sphärisches Bild zugleich das der Haupttangentencurven einer Fläche ist, so können durch Quadratur zwei Functionen $c_1\,\varrho$, $c\,\mu$ gefunden werden, vermöge deren das System

$$\begin{aligned}\varphi_{uu} &= a\,\varphi_u + a_1\,\varphi_v - e'\,\varphi + \varrho\,c\,E\\ \varphi_{uv} &= \beta\,\varphi_u + \beta_1\,\varphi_v - f'\,\varphi + c_1\,\mu\\ \varphi_{vv} &= \gamma\,\varphi_u + \gamma_1\,\varphi_v - g'\,\varphi - \varrho\,c\,G\end{aligned}$$

unbeschränkt integrabel wird, so dass nun ∞^1 infinitesimale Biegungen dieser Flächen bekannt sind. Auf eine nähere Untersuchung der Flächen, bei denen die angegebenen Bedingungen erfüllt sind, gehe ich hier nicht ein.[1])

§ IX. Kinematisches.

Der Punct der Fläche F mit den Coordinaten x nimmt vermöge der Deformation, deren Componenten $\varphi_i\,(i = 1, 2, 3)$ sind, die Lage

$$x_i + \varepsilon\,\varphi_i$$

an. Daher ist die Grösse der relativen Coordinatenverschiebung für den Punct $x_i + dx_i$ gegeben durch die Componenten

$$\varepsilon\,d\,\varphi_1,\ \varepsilon\,d\,\varphi_2,\ \varepsilon\,d\,\varphi_3$$

Man hat sich dabei vorzustellen, dass alle zum Puncte x unendlich benachbarten Puncte durch die Translation $\varepsilon\,\varphi_i$

---

[1]) Einige weitere Bemerkungen über diese Flächengattung findet man bereits in meiner Arbeit „Zur Theorie der Krümmung der Flächen," Mathematische Annalen Bd. 39, insbesondere S. 248 ff.

verschoben werden. Durch diesen Process kommt der Punct x in seine neue Lage, während die übrigen erst durch die angegebenen Verschiebungscomponenten in dieselbe gebracht werden können.

Aus der Gleichung

$$\Sigma a\, d x = (a\, \Theta\, d\varphi)$$

des § IV) erhält man aber

$$1)\qquad \begin{aligned} d x_1 &= \Theta_2\, d\varphi_3 - \Theta_3\, d\varphi_2 \\ d x_2 &= \Theta_3\, d\varphi_1 - \Theta_1\, d\varphi_3 \\ d x_3 &= \Theta_1\, d\varphi_2 - \Theta_2\, d\varphi_1 \end{aligned}$$

und hieraus

$$2)\qquad \begin{aligned} d\varphi_1 &= \frac{1}{r^2}\,(\Theta_3\, d x_2 - \Theta_2\, d x_3) + \frac{\Theta_1}{r}\,\omega \\ d\varphi_2 &= \frac{1}{r^2}\,(\Theta_1\, d x_3 - \Theta_3\, d x_3) + \frac{\Theta_2}{r}\,\omega \\ d\varphi_3 &= \frac{1}{r^2}\,(\Theta_2\, d x_1 - \Theta_1\, d x_2) + \frac{\Theta_3}{r}\,\omega \end{aligned}$$

falls

$$3)\qquad \omega = \frac{1}{r}\,\Sigma\, \Theta_i\, d\varphi_i$$

gesetzt wird. Diese Verrückungen 2) entsprechen einer Rotationsgeschwindigkeit um die zu x gehörige Normale von F, deren Grösse die characteristische Function $\frac{1}{r}$ der Deformation ist,[1]) und einer in der Richtung dieser Normale stattfindenden Translationsgeschwindigkeit ω. Diese letztere ist für jeden Punct in der Nähe von x eine besondere, nämlich

$$\omega = d u\, [D_1\, r_u - D\, r_v] + d v\, (D_{11}\, r_u - D_1\, r_v]$$

wie sich aus 3) ergiebt, wenn man an Stelle der $d\varphi$ ihre Werthe aus § IV), 1) einsetzt. Hieraus folgt der Satz:

---

[1]) Diese Bemerkung ist nach Bianchi Lezioni p. 275 zuerst von Volterra, Sulle deformazione delle superficie flessibili ed inestensibili, Rendiconti dell' Acc. dei Lincei, April 6. 1884. gemacht.

Nur für die Minimalflächen giebt es infinitesimale Biegungen, die in einer Rotation um die Flächennormale bestehen, deren Grösse die characteristische Function der Deformation ist, — denn ω kann nur dann verschwinden, wenn r eine Constante ist.

Aus der am Eingang des § II) entwickelten Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial u}(D_{11} r_u - D_1 r_v) + \frac{\partial}{\partial v}(D r_v - D_1 r_u) = -\sqrt{\mathsf{H}}\left(\frac{eG + Eg - 2Ff}{r\,\mathsf{H}}\right)$$

folgt durch Multiplication mit $du\,dv$ und Integration über ein beliebiges Flächenstück von F, dessen Element durch $dT = \sqrt{\mathsf{H}}\,du\,dv$ bezeichnet wird, wenn man zugleich unter k die mittlere Krümmung von F versteht

$$4) \qquad \int \frac{k}{r}\, dT = \int \omega$$

wo rechterhand das Integral über die Begrenzung des Flächenstückes zu nehmen ist. Es ist vielleicht nicht unpassend, das Integral linker Hand die totale Verschiebung des Flächenstückes zu nennen; dieselbe wird nach der soeben angegebenen Formel durch das über die Verschiebungen ω genommene Curvenintegral ausgedrückt.

Andererseits folgt aus der Formel 5) des § V), wenn man zur Abkürzung

$$W = (W_u D_{11} - W_v D_1)\, dv + (W_u D_1 - W_v D)\, du$$

setzt

$$5) \qquad 2\int \frac{dT}{r} = \int W,$$

und diese Formel drückt das über die characteristische Function erstreckte Flächenintegral durch ein Randintegral aus; man kann das erstere die totale Rotation des betreffenden Flächenstückes nennen. Bei den Flächen constanter mittlerer Krümmung (mit Ausnahme der Minimalflächen) ist die totale Rotation eines Flächenstückes proportional mit der totalen Verschiebung.

Durch die Betrachtung der Fläche Θ, zu der F adjungirt ist, erhalten diese Sätze eine grössere Anschaulichkeit. Bezeichnet man, wie früher, die Richtungscosinus der Normale von Θ durch q_1, q_2, q_3, so ist nach 1)

$$\Sigma q \, d\Theta = 0 = \Sigma q \, d\varphi$$

also wegen

$$q_3 \, dx_2 - q_2 \, dx_3 = d\varphi_1 \, \Sigma q \Theta - \Theta_1 \, \Sigma q \, d\varphi$$

6)
$$\begin{aligned} d\varphi_1 &= \frac{1}{s}(q_3 \, dx_2 - q_2 \, dx_3) \\ d\varphi_2 &= \frac{1}{s}(q_1 \, dx_3 - q_3 \, dx_1) \\ d\varphi_3 &= \frac{1}{s}(q_2 \, dx_1 - q_1 \, dx_2) \end{aligned}$$

wenn
$$s = \Sigma q \Theta$$

der Abstand der Tangentialebene der Fläche Θ vom Anfang der Coordinaten ist. Die relative Deformation in der Nähe des Punctes x besteht also immer in einer Rotation um eine durch den Punct x gehende, der Normale derjenigen Fläche, zu der F adjungirt ist, parallele Axe mit der Geschwindigkeit $\frac{1}{s}$. Daher bezeichnet

$$D_F = \int \frac{dT}{s}$$

zugleich die Grösse der totalen Deformation des Flächenstückes F.

Setzt man nun das Flächenelement von Θ gleich

$$du \, dv \sqrt{h}$$

so ist nach § I), 3)

$$s = \frac{\Delta}{\sqrt{h}}$$

oder, wenn man den Werth von Δ aus § I), 6) und 8) einführt,

$$D_F = \int \frac{\sqrt{h}\, du\, dv}{r^3 K}$$

Beachtet man, dass der Coefficient h_1 in dem Flächenelement $dt_1 = \sqrt{h_1}\, du\, dv$ der Fläche φ (§ IV) mit h durch die Gleichung

$$h_1 = h\,\Omega^2$$

verbunden ist, so hat man

$$D_F = \int r\, dt_1;$$

die totale Deformation von F ist also auch gleich dem über die Fläche φ erstreckten Integral des reciproken Werthes der characteristischen Function der Deformation von F.

Bezeichnet man den Winkel zwischen der Axe der totalen Rotation und der Richtung der Verschiebung $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ durch ε, so ist

$$\operatorname{Cos} \varepsilon = \frac{1}{r_1} \Sigma(\varphi q) = \frac{1}{r_1 \sqrt{h}} (\Theta_u\, \Theta_v\, \varphi)$$

Multiplicirt man die Determinante rechter Hand mit

$$(\xi_u \;\; \xi_v \;\; \varphi)$$

deren Quadrat gleich $r_1^2\, \mathsf{H}_1$ ist, wo $\sqrt{\mathsf{H}_1}\, du\, dv$ das Flächenelement von Φ bedeutet, so ergiebt sich als Product

$$r_1^2\, (\varphi\; \Theta_u\; \Theta_v)^2$$

so dass

$$(\varphi\; \Theta_u\; \Theta_v) = \frac{1}{r_1} \sqrt{\mathsf{H}_1}$$

oder auch

$$\operatorname{Cos} \varepsilon = \frac{\sqrt{\mathsf{H}_1}}{\sqrt{h}}$$

wird.

Um die Grösse der Rotation $\frac{1}{s}$ durch Formeln auszudrücken, die sich unmittelbar an die Weingarten'sche Theorie anschliessen, kann man folgendermassen verfahren. Bezeichnet man die zu der characteristischen Function ψ der Deformation von F gehörigen Verschiebungen wieder durch $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, so ist[1])

$$\begin{aligned}K\sqrt{\mathsf{H}}\,d\varphi &= (J x_u + J' x_v)(E\,du + F\,dv)\,\psi - p\,(E\psi_v - F\psi_u)\,du \\ &\quad - (\mathsf{H} x_u + \mathsf{H}' x_v)(F\,du + G\,dv)\,\psi - p\,(F\psi_v - G\psi_u)\,dv \\ &= K\psi\,[(x_u f - x_v e)\,du + (g x_u - f x_v)\,dv] \\ &\quad - p\,[(E\psi_v - F\psi_u)\,du + (F\psi_v - G\psi_u)\,dv]\end{aligned}$$

für jeden gleichzeitig bei φ, x und p hinzugefügten Index $i = 1, 2, 3$. Nun ist aber

$$\sqrt{\mathsf{H}}\,\Sigma(a p) = (a\,x_u\,x_v)$$

also

$$\sqrt{\mathsf{H}}\,du\,\Sigma(a p) = (a\,dx\,x_v)$$

$$\sqrt{\mathsf{H}}\,dv\,\Sigma(a p) = (a\,x_u\,dx)$$

und $\quad -\sqrt{\mathsf{H}}\,(a p\,dx) = \Sigma a\,[(x_u f - x_v e)\,du + (g x_u - f x_v)\,dv]$,

demnach wird

$$\begin{aligned}d\varphi_1 = \psi\,(dx_2 p_3 - dx_3 p_2) &- \frac{(E\psi_v - F\psi_u)}{K\mathsf{H}}(x_{3v}\,dx_2 - x_{2v}\,dx_3) \\ &- \frac{(F\psi_v - G\psi_u)}{K\mathsf{H}}(x_{2u}\,dx_3 - x_{3u}\,dx_2)\end{aligned}$$

und analoge Werthe ergeben sich durch cyclische Vertauschung für $d\varphi_2$ und $d\varphi_3$. Hieraus folgt, dass die Rotationscomponenten

$$\frac{q_1}{s} \quad \frac{q_2}{s} \quad \frac{q_3}{s}$$

durch die Formel

$$7) \qquad \frac{q_i}{s} = \psi p_i + x_{iu}\frac{(F\psi_v - G\psi_u)}{K\mathsf{H}} - x_{iv}\frac{(E\psi_v - F\psi_u)}{K\mathsf{H}}$$

gegeben sind. Es wird demnach, wie eine einfache Rechnung zeigt

---

[1]) Die Formel des Textes ergiebt sich durch Umformung der Weingarten'schen Formel vgl. z. B. Bianchi, Lezioni, p. 276) mit Hülfe von 1) und 2) der Einleitung.

$$\frac{1}{s^2} = \psi^2 + \frac{\psi_v^2 e' - 2\psi_u \psi_v f' + \psi_u^2 g'}{K^2 \mathsf{H}}$$

wenn man, wie bisher, die Coefficienten des Längenelementes der sphärischen Abbildung von F mit e', f', g' bezeichnet. Da aber bekanntlich

$$K = \sqrt{e'g' - f'^2} : \sqrt{eg - f^2}$$

so folgt

$$\frac{1}{s^2} = \psi^2 + \Delta\psi \tag{8}$$

womit das Quadrat der Rotation durch den ersten Differentialparameter $\Delta\psi$ der characteristischen Function in Bezug auf die sphärische Abbildung der Fläche ausgedrückt ist, und zugleich erhält man aus 7) die beiden durch ihre Einfachheit bemerkenswerthen Formeln

$$\text{9)}\quad \begin{aligned} \psi_u &= \Sigma \frac{q}{s} p_u \\ \psi_v &= \Sigma \frac{q}{s} p_v \end{aligned}$$

Während also die Normalcomponente der Rotation durch die characteristische Function der Deformation ausgedrückt wird, ist nach 8) die tangentiale Componente gleich der Quadratwurzel aus dem ersten Differentialparameter von ψ, in der soeben bezeichneten Weise genommen.

Diese Formeln geben zu mehrfachen Fragen Veranlassung. Bemerkenswerth erscheinen namentlich die Curven auf der Fläche Θ, längs denen der Abstand der Tangentenebene vom Coordinatenanfang constant ist. Ihnen entsprechen auf F solche Curven, längs denen die totale Rotation constant bleibt. Insbesondere erwähne ich die folgenden Fälle.

Erstens. Die Fläche F ist einer Ebene Θ adjungirt. Alle Puncte erfahren jetzt die nämliche infinitesimale Rotation, man hat, wie das schon in § VIII bemerkt wurde, einfach eine infinitesimale Bewegung der ganzen Fläche.

Zweitens. Die Fläche F ist der Kugel adjungirt; dies ist der Fall bei den Minimalflächen, es findet eine Rotation von constanter Grösse um die Flächennormale statt.

Drittens. Welches sind diejenigen Flächen, bei denen eine constante Rotationscomponente senkrecht zur Flächennormale stattfindet? Unter welchen Bedingungen kann also die partielle Differentialgleichung der characteristischen Function ψ ein Integral haben, das zugleich die Gleichung $\Delta\psi = \text{const}$ befriedigt?

Viertens. Welches sind diejenigen Flächen, bei denen die totale Rotation constant ist? Auch hier würde aus der Betrachtung der Gleichung $\Delta\psi + \psi^2 = \text{const}$[1]) und der partiellen Differentialgleichung für ψ die für F erforderliche Bedingung sich, wie es scheint, nicht sogleich ergeben. Aber man sieht unmittelbar, dass in diesem Falle die Fläche F einer Developpabelen adjungirt sein muss, welche einer um den Anfang der Coordinaten als Mittelpunct beschriebenen Kugel umschrieben ist. Die Fläche F ist also nothwendig eine Regelfläche, und umgekehrt lässt sich auch leicht zeigen, dass jede Regelfläche die Eigenschaft hat, infinitesimale Biegungen zu gestatten, die für jeden ihrer Puncte in einer Rotation um eine zu der jeweiligen Erzeugenden normale Axe bestehen.

Man erhält ferner aus 7)

$$10)\qquad \frac{1}{s}\Sigma q_i\, dx_i$$

$$= \frac{1}{K\mathsf{H}}\left[(E\psi_v - F\psi_u)(f\,du + g\,dv) - (F\psi_v - G\psi_u)(e\,du + f\,dv)\right]$$

als Ausdruck für den Cosinus des Winkels, den die Rotationsaxe mit irgend einer Fortschreitungsaxe dx_i auf der Fläche F bildet.

---

[1]) In dem dritten und vierten Falle sind also die Curven $\psi = \text{const}$ geodätische Parallelen auf der sphärischen Abbildung, vgl. z. B. Darboux, Leçons, t. III, p. 195.

Dieser Winkel ist also ein rechter, wenn der Differentialausdruck rechter Hand in 10) verschwindet. Unter welchen Bedingungen kann nun die hierdurch auf F bestimmte Fortschreitungsrichtung eine vorgeschriebene, z. B. die einer Krümmungslinie, einer Haupttangentencurve etc. etc. werden? Von den zahlreichen hierher gehörigen Fragen[1]) will ich hier nur die behandeln, wo die gegebene Fläche F eine Regelfläche ist. Soll zugleich die Richtung in die der Erzeugenden fallen, und wählt man (man vergleiche den folgenden Paragraphen)

$$e=1,\ f=0,\ E=0,\ F=\frac{V}{\sqrt{g}},\ \frac{G}{\sqrt{g}}=V_1'+\frac{\partial}{\partial v}\int\frac{V}{g}\,du$$

so muss nach 10)

$$F\psi_v-G\psi_u=0$$

sein. Hieraus aber folgt durch Einsetzen der angegebenen Werthe von F und G

$$\psi=\Phi(\omega)$$

wo Φ eine willkürliche Function des Argumentes

$$\omega=V_1+\int\frac{V}{g}\,du$$

bezeichnet, so dass

$$\frac{\partial\omega}{\partial v}=\frac{G}{\sqrt{g}},\quad \frac{\partial\omega}{\partial u}=\frac{F}{\sqrt{g}}\ \text{wird.}$$

Die Weingarten'sche[2]) partielle Differentialgleichung für ψ

$$11)\ \frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{G\psi_u-F\psi_v}{K\sqrt{\mathsf{H}}}\right]+\frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{E\psi_v-F\psi_u}{K\sqrt{\mathsf{H}}}\right]=\frac{\psi}{\sqrt{\mathsf{H}}}[2fF-Eg-Ge]$$

---

[1]) So z. B. ergiebt sich sofort, dass nur bei der Kugel die Rotationsaxe senkrecht zu der Richtung stehen kann, längs der die characteristische Function ψ constant ist. Denn der Differentialausdruck 10) wird für Krümmungslinien

$$\frac{1}{r_1}\,dv\,\psi_v+\frac{1}{r_2}\,du\,\psi_u$$

wo r_1, r_2 die Hauptkrümmungsradien sind, und dies kann vermöge $d\psi=0$ nur dann verschwinden, wenn $r_1=r_2$ ist.

[2]) Bianchi, Lezioni, p. 276.

liefert dann, wenn man die angegebenen Werthe von E, F, G, ψ einsetzt, zur Bestimmung von Φ die Gleichung

$$\Phi'' = -\Phi$$

oder

$$\Phi = A \sin(\omega + B)$$

wo A und B von ω unabhängige Constanten sind.

Der Ausdruck

$$\frac{1}{s^2} = \psi^2 + \psi_u^2 \frac{F^2 g}{K^2 \mathsf{H}^2} = \Phi'^2 + \Phi^2 = A^2$$

hat dabei zugleich die merkwürdige Eigenschaft constant zu sein. Hieraus folgt also:

Die infinitesimalen Biegungen einer Regelfläche, bei der die Rotationsaxe mit den Erzeugenden beständig einen rechten Winkel bildet, sind zugleich diejenigen, bei denen die Grösse dieser Rotation selbst constant ist.

Man erhält ferner durch Differentiation aus der Gleichung 7)

$$\Sigma(p\,q) = \psi\, s$$

$$\Sigma p \frac{\partial \frac{q}{s}}{\partial u} + p_u \frac{g}{s} = \psi_u$$

oder nach 9)

$$\Sigma p \frac{\partial \frac{q}{s}}{\partial u} = 0$$

$$\Sigma p \frac{\partial \frac{q}{s}}{\partial v} = 0$$

Das heisst: Die Normale der Fläche Q, welche von den als Coordinaten aufgetragenen Rotationscomponenten gebildet wird, ist der Normale von F parallel. Es lässt sich aber leicht zeigen, dass die Flächen F und Q zu einander associirt sind.

Wählt man nämlich auf F das System der Haupttangentencurven zu Coordinatenlinien, so ist zu beweisen, dass die mittlere

Fundamentalgrösse der Fläche Q unter dieser Voraussetzung verschwindet. Dieselbe ist aber nach dem so eben bemerkten proportional mit den Ausdrücken

$$-\Sigma p_v \frac{\partial \frac{q}{s}}{\partial u} = -\Sigma p_u \frac{\partial \frac{q}{s}}{\partial v}$$

Man erhält nun aus 7) nach einfachen Umformungen

$$\frac{\partial \frac{q_i}{s}}{\partial u} = \psi \frac{F}{\mathsf{H}}(f x_{iu} - e x_{iv}) + \frac{F}{K\mathsf{H}}[B \psi_u x_{iu} + A_1 \psi_v x_{iv}]$$

$$+ \frac{x_{iv}}{\sqrt{\mathsf{H}}} \frac{\partial \frac{F\psi_u}{K\sqrt{\mathsf{H}}}}{\partial u} + \frac{x_{iu}}{\sqrt{\mathsf{H}}} \frac{\partial \frac{F\psi_v}{K\sqrt{\mathsf{H}}}}{\partial u} - \frac{F}{K\mathsf{H}}\left\{A \psi_u x_{iu} + B_1 \psi_v x_{iu}\right\}$$

oder

$$\Sigma\left(p_v \frac{\partial \frac{q}{s}}{\partial u}\right) = -\psi \frac{F^2 f}{\mathsf{H}} + F^2 \frac{(B_1 \psi_v - B \psi_u)}{K\mathsf{H}} - \frac{F}{\sqrt{\mathsf{H}}} \frac{\partial \frac{F\psi_v}{K\sqrt{\mathsf{H}}}}{\partial u}$$

Vertauscht man in dieser Gleichung u mit v, so folgt

$$\Sigma\left(p_u \frac{\partial \frac{q}{s}}{\partial v}\right) = -\psi \frac{F^2 f}{\mathsf{H}} + F^2 \frac{(B \psi_u - B_1 \psi_v)}{K\mathsf{H}} - \frac{F}{\sqrt{\mathsf{H}}} \frac{\partial \frac{F\psi_u}{K\sqrt{\mathsf{H}}}}{\partial v}$$

und hieraus folgt der Beweis des angegebenen Satzes, da die Summe der beiden Ausdrücke rechter Hand zufolge der Differentialgleichung verschwindet, der die Function ψ genügen muss.[1])

§ X. Zur Deformation der Regelflächen.

Die im vorigen § angedeutete merkwürdige infinitesimale Deformation von constanter Rotation der Regelflächen will ich hier ausführlicher darlegen, indem ich direct den Satz beweise:

Jede Regelfläche lässt sich auf einfach unendlich viele wesentlich verschiedene Arten einer um eine Kugel beschriebenen Developpabelen adjungiren.

---

[1]) Vgl. die 11) für ψ angegebene Formel.

Es seien, um dies zu zeigen, η_1, η_2, η_3 die Coordinaten einer sphärischen Curve auf der mit dem Radius Eins um den Anfang beschriebenen Kugel. Nimmt man die Bogenlänge v als unabhängige Variabele, so ist

$$1)\qquad \begin{aligned} \Sigma\eta^2 &= 1, & \Sigma\eta_v^2 &= 1 \\ \Sigma\eta\,\eta_v &= 0, & \Sigma\eta_v\,\eta_{vv} &= 0. \\ \Sigma\eta\,\eta_{vvv} &= 0, & \Sigma\eta\,\eta_{vv} + 1 &= 0. \end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen findet man durch Multiplication der Determinanten, wenn

$$2)\qquad \delta = (\eta\,\eta_v\,\eta_{vv})$$

gesetzt wird, die für beliebige Coefficienten a_1, a_2, a_3 geltenden Identitäten[1])

$$3)\qquad \begin{aligned} (\eta\,\eta_v\,a)\,(\eta\,\eta_v\,\eta_{vv}) &= \Sigma a\,\eta + \Sigma a\,\eta_{vv}, \\ (\eta\,\eta_{vv}\,a)\,(\eta\,\eta_v\,\eta_{vv}) &= -\,\delta^2\,\Sigma a\,\eta_v, \\ \delta^2 + 1 &= \Sigma(\eta_{vv})^2. \end{aligned}$$

Dann sind

$$4)\qquad \begin{aligned} \Theta_1 &= \eta_1 + u\,(\eta_2\,\eta_{3v} - \eta_3\,\eta_{2v}) \\ \Theta_2 &= \eta_2 + u\,(\eta_3\,\eta_{1v} - \eta_1\,\eta_{3v}) \\ \Theta_3 &= \eta_3 + u\,(\eta_1\,\eta_{2v} - \eta_2\,\eta_{1v}) \end{aligned}$$

die Coordinaten eines Punctes der allgemeinsten Developpabelen, deren Tangentenebenen den Abstand Eins vom Coordinatenanfang haben. Es wird daher nach 1), 2), 3)

$$\Theta_u = \frac{1}{\delta}\,(\eta + \eta_{vv})$$

$$\Theta_v = \eta_v\,(1 - u\,\delta)$$

und hieraus folgt für die Coefficienten e, f, g des Längenelementes von Θ

$$e = 1, \quad f = 0, \quad g = (1 - u\,\delta)^2$$

---

1) Da die Determinante δ verschwindet, wenn $\Sigma\,(\eta_{vv})^2 = 1$ ist, also die Developpabele ein Kreiscylinder wird, bedarf dieser Fall noch einer besonderen Betrachtung.

also sind nach § III, 2) die zur adjungirten Fläche F gehörigen Grössen D gegeben durch

$$D = 0 \quad D_{11u} - D_{1v} = 0 \quad g D_{1u} - g_u D_{1v} = 0$$

mithin

$$D_1 = \frac{W}{g}, \quad D_{11} = W_2' + \frac{\partial}{\partial v} \int \frac{W}{g} du$$

wo W und $W_2' = \dfrac{d W_2}{dv}$ willkürliche Functionen von v sind.

Des weiteren wird nun

$$(a\, \Theta\, \Theta_u) = - \Sigma (a\, \eta_v)$$

$$(a\, \Theta\, \Theta_v) = \frac{1}{s} (g\, \Sigma (a\, \eta) + \sqrt{g}\, \Sigma\, a\, \eta_{vv})$$

so dass sich für die Coordinaten x der zu Θ adjungirten Regelfläche die Ausdrücke

5)
$$x_u = - \eta_v \frac{W}{g} = - \eta_v D_1$$

$$x_v = - \eta_v D_{11} - \frac{D_1}{g} (g \eta + \sqrt{g}\, \eta_{vv})$$

ergeben. Aus denselben geht, wie zu erwarten war, hervor, dass die Richtung der Rotationsaxe η_1, η_2, η_3 auf der der Erzeugenden senkrecht steht.

Ich setze nun das vollständige Differential

$$D_1\, du + D_{11}\, dv$$

gleich du_1, so dass

6)
$$u_1 = \frac{W}{\delta \sqrt{g}} + W_2$$

wird und führe als neue Variabeln u_1 und $v = v_1$ ein. Dann treten an Stelle von 5) die Gleichungen

$$x_{v_1} = x_v - D_{11}\, x_{u_1}$$

$$x_{u_1} = \frac{x_u}{D_1}$$

oder, wenn man jetzt wieder die Indices bei u und v in Bezug auf das neue Orthogonalcoordinatensystem auf F fortlässt

$$7)\qquad x_u = -\eta_v$$

$$x_v = -\frac{\eta}{\delta} W - \eta_{vv}(u - W_2)$$

Die Coefficienten des Längenelementes der Regelfläche F sind nunmehr

$$8)\ e_1 = 1,\ f_1 = 0,\ g_1 = \frac{W^2}{\delta^2} - 2\frac{W}{\delta}(u - W_2) + (1+\delta^2)(u - W_2)^2$$

und zugleich wird nach 4) und 6)

$$r^2 = \Sigma\,\Theta^2$$

$$= \frac{1}{(u - W_2)^2\delta^2}\left[\frac{W^2}{\delta^2} - 2\frac{W}{\delta}(u - W_2) + (1+\delta^2)(u - W_2)^2\right]$$

oder

$$8\text{a})\qquad r^2 = \frac{g_1}{(u - W_2)^2\delta^2}.$$

Die Cosinus der Normale von F sind daher $\frac{\Theta_1}{r}, \frac{\Theta_2}{r}, \frac{\Theta_3}{r}$, und hieraus ergeben sich die Fundamentalgrössen zweiter Ordnung E', F', G' dieser Fläche in der Form

$$9)\quad E' = 0,\ F' = \frac{W}{\sqrt{g_1}}\quad rG' = -\frac{W'}{\delta} + \frac{2W}{\delta^2}\frac{\partial\delta}{\partial v} - \frac{W_2' W}{(u - W_2)\delta}$$

$$-\frac{(u - W_2)}{\delta}\frac{\partial\delta}{\partial v}$$

wobei $W' = \frac{dW}{dv}$, $W_2' = \frac{dW_2}{dv}$ gesetzt ist.

Es sei ferner eine willkürliche Regelfläche gegeben, deren Längenelement

$$du^2 + (u^2 + 2Bu + C)\,dv_1^2$$

sei, wo B und C willkürliche Functionen von v_1 sind. Dazu gehören dann die Fundamentalgrössen erster Ordnung

$$e_{11} = 1,\ f_{11} = 0,\ g_{11} = u^2 + 2Bu + C$$

und die Fundamentalgrössen zweiter Ordnung sind, wie man durch Integration der Gauss'schen Differentialgleichungen leicht findet,

$$E_{11} = 0 \quad F_{11} = \frac{\sqrt{C-B^2}}{\sqrt{g_{11}}}$$

$$G_{11} = \sqrt{g_{11}} \left[V_1' + \frac{\partial}{\partial v} \int du \frac{\sqrt{C-B^2}}{g_{11}} \right]$$

oder nach ausgeführter Integration

$$G_{11} = \sqrt{g_{11}} \left[V_1' + \frac{B' V - B V' - u V'}{g_{11}} \right]$$

dabei ist V_1' eine willkürliche Function von v_1, $V^2 = C - B^2$, B' und V' sind die Differentialquotienten von B und V. Ohne diese Fläche zu ändern, kann man an Stelle von $d v_1$ den Ausdruck $\psi\, d v$ einführen, wo ψ eine willkürliche Function von v ist. Hierdurch werden die angegebenen Fundamentalgrössen übergehen in

$$10) \quad e_{11} = 1, \quad f_{11} = 0, \quad g_{11} = \psi^2 [u^2 + 2 B u + C]$$

$$E_{11} = 0, \quad F_{11} = \psi^2 \frac{V}{\sqrt{g_{11}}}, \quad G_{11} = \sqrt{g_{11}}\, V_1 + \psi^2 \frac{(B' V - B V' - u V')}{\sqrt{g_{11}}}$$

wo V_1 wieder eine willkürliche Function von v ist und die Differentiationen in dem Ausdrucke für G sich auf die neue Variable v beziehen.[1])

Kann man nun zeigen, dass die unter 8) und 9) angegebenen Fundamentalgrössen von F sich mit den in 10) bestimmten einer allgemeinen Regelfläche identificiren lassen, so ist der Beweis des Satzes geliefert.

Man setze also, um die Uebereinstimmung von g_1 und g_{11} herbeizuführen

---

[1]) Die hier gegebene Darstellung der Fundamentalgrössen erster und zweiter Ordnung einer Regelfläche habe ich nicht unterdrücken zu sollen geglaubt, da ich sie in keiner mir bekannten Arbeit gefunden habe.

$$\psi^2[u^2+2Bu+C]=\frac{W^2}{\delta^2}-2W\frac{(u-W_2)}{\delta}+(1+\delta^2)(u-W_2)^2$$

oder

$$\psi^2 \quad =1+\delta^2$$

$$\psi^2 B=-\frac{W}{\delta}-(1+\delta^2)\,W_2$$

$$\psi^2 C=\frac{W^2}{\delta^2}+2\,\frac{W\,W_2}{\delta}+(1+\delta^2)\,W_2^2$$

woraus
$$\psi^4\,(C-B^2)=W^2$$

oder

11)
$$W=\psi^2 V, \quad 1+\delta^2=\psi^2$$

$$W_2+B=-\frac{V}{\delta}$$

folgt. Hiermit wird zugleich nach 9) und 10)

$$F_1=F_{11}$$

Aus dem Ausdrucke für G_1, den man durch Einführung von r aus 8a) und $g_1=g_{11}$ in die Form

$$G_1=-\frac{\sqrt{g_{11}}}{1+\delta^2}\frac{\partial\delta}{\partial v}+\frac{1}{\sqrt{g_{11}}}\Big[u\Big(-W'+2\,\frac{\delta W}{1+\delta^2}\frac{\partial\delta}{\partial v}\Big)$$

$$+W_2W'-W_2'W+\frac{W^2}{\delta^2}\frac{\partial\delta}{\partial v}\frac{1}{1+\delta^2}+2\,\frac{W\,W_2}{1+\delta^2}\,\delta\,\frac{\partial\delta}{\partial v}\Big]$$

bringt, wird nun, wenn man für W_2, W, $1+\delta^2$ ihre Werthe aus 11) einführt

$$G_1=-\frac{\sqrt{g_{11}}}{1+\delta^2}\frac{\partial\delta}{\partial v}+\frac{\psi^2}{\sqrt{g_{11}}}(VB'-B\,V'-u\,V')$$

so dass völlige Uebereinstimmung von G_1 und G_{11} stattfindet, wenn man

$$-V_1=\frac{1}{1+\delta^2}\frac{\partial\delta}{\partial v}$$

setzt, wodurch die Function δ, d. h. die erste Krümmung der sphärischen Curve η bestimmt ist. Hieraus folgt aber

$$\arcsin\frac{1}{\psi} = \int V_1 dv + \text{const.}$$

Bestimmt man endlich die Verschiebungscomponenten $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, so folgt leicht, dass dieselben ganze lineare Functionen von u sind, denn es wird für beliebige Werthe der Constanten A_i

$$\Sigma A_i \varphi_i = (A \eta \eta_v)(u - W_2) + \int W_2'(A \eta \eta_v)\, dv;$$

diese Deformationen führen also immer die Erzeugenden in Erzeugende über.

In dem besonderen, bei der vorhergehenden Betrachtung ausgeschlossenen Fall, wo die Developpabele Θ ein Kreiscylinder vom Radius r ist, setze man

$$\Theta_1 = u, \quad \Theta_2 = r\cos v, \quad \Theta_3 = r\sin v.$$

Man erhält dann

$$D_1 = V, \quad D_{11} = u V' + V_1$$

also
$$(a\,\Theta\,\Theta_u) = r\,[a_2 \sin v - a_3 \cos v]$$
$$(a\,\Theta\,\Theta_v) = r\,[a_1 r - u\,(a_2\cos v + a_3 \sin v)]$$

mithin

$$\Sigma(a x) = r\int (a_2 \sin v - a_3 \cos v)\, V_1\, dv$$
$$- r^2 a_1 \int V dv + u V r\,(a_2 \sin v - a_3 \cos v)$$

als Darstellung dieser speciellen Gattung von Regelflächen. In dem besonderen Falle, wo V_1 gleich Null gewählt wird, ergeben sich hier die geraden Conoide:

$$x = -rV$$
$$y = u V' \sin v$$
$$z = u V' \cos v.$$

Durch die vorhergehende Untersuchung ist die allgemeine

Aufgabe gelöst, eine durch ihre Fundamentalgrössen gegebene Regelfläche einer um eine Kugel beschriebenen Developpabelen zu adjungiren. Sind aber die Gleichungen der Regelfläche durch explicite Ausdrücke ihrer Coordinaten

$$x_i = \alpha_i + u\,\beta_i$$

gegeben, so lassen sich die sämmtlichen infinitesimalen Deformationen, bei denen die Erzeugenden wieder in Erzeugende übergehen, sehr einfach bestimmen.

Die allgemeinsten Ausdrücke für die Verschiebungen $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, welche in u linear sind,

$$\varphi_i = \frac{A_i' + B_i' u}{p + q u}$$

bei denen A_i', B_i', p, q willkürliche Functionen von v sind, kann man, wenn q nicht verschwindet, auf die Form

$$\varphi_i = \frac{A_i}{p+u} + B_i$$

bringen. Aus der Bedingung

$$\Sigma\, d\,x\, d\,\varphi = 0$$

folgt zunächst, da

$$x_u = \beta, \quad \varphi_u = -\frac{A}{(p+u)^2}$$

$$x_v = \alpha_v + u\,\beta_v, \quad \varphi_v = \frac{A_v}{p+u} + B_v - \frac{A\,p_v}{(p+u)^2}$$

für jeden gleichzeitig bei x, φ, A, B, α, β hinzugefügten Index $i = 1, 2, 3$ ist,

$$\Sigma(\beta A) = 0 \quad \Sigma(\beta B_v) = 0 \quad \Sigma(A_v \beta) = 0 \quad \Sigma(\beta_v A) = 0$$
$$\Sigma(\alpha_v A) = 0.$$

Hieraus aber würde hervorgehen, dass die Determinante

$$(\alpha_v\ \beta_v\ \beta)$$

verschwinden muss, falls nicht alle A_i verschwinden. Dann aber wäre die Fläche gegen die Voraussetzung developpabel.

Da sonach die Annahme q nicht $= 0$ auf einen Widerspruch führt, hat man den Satz:

Alle infinitesimalen Biegungen der Fläche, bei denen die Erzeugenden geradlinig bleiben, sind von der Form linearer ganzer Functionen von u, so dass

12) $$\varphi_i = \alpha'_i + \beta'_i u$$

ist. Bestimmt man nun die zu dieser Form gehörigen Rotationscomponenten

$$r_1 = \frac{q_1}{s}, \quad r_2 = \frac{q_2}{s}, \quad r_3 = \frac{q_3}{s}$$

so ergiebt sich leicht, dass diese nur von v abhängen. Denn nach § IX, 6) kann man bei willkürlichen Werthen der Constanten A_i setzen

13) $$\Sigma A\, d\varphi = (A, r, \alpha_v + \beta_v u)\, dv + (A\, r\, \beta)\, du$$

und hieraus folgt

$$\Sigma \beta\ d\varphi = (\beta, r, \alpha_v + \beta_v u)\, dv$$
$$\Sigma \alpha_v\, d\varphi = (\alpha_v\, r\, \beta_v)\, u\, dv + (\alpha_v\, r\, \beta)\, du$$
$$\Sigma \beta_v\, d\varphi = (\beta_v\, r\, \alpha_v)\, dv + (\beta_v\, r\, \beta)\, du$$

oder, wenn man für die $d\varphi$ ihre Werthe aus 12) einführt

$$\Sigma \beta\, \alpha'_v = (\beta\, r\, \alpha_v), \quad \Sigma \alpha_v\, \beta' = (\alpha_v\, r\, \beta)$$
$$\Sigma \beta\, \beta'_v = (\beta\, r\, \beta_v), \quad \Sigma \alpha_v\, \beta'_v = (\alpha_v\, r\, \beta_v)$$

und aus diesen Gleichungen folgen, wenn man

$$r = \lambda \beta + \mu\, \alpha_v + \nu\, \beta_v$$

setzt, für λ, μ, ν die Werthe

$$\nu\ (\beta\, \beta_v\, \alpha_v) = \Sigma \beta\, \alpha'_v$$
$$\mu\ (\beta\, \alpha_v\, \beta_v) = \Sigma \beta\, \beta'_v$$
$$\lambda\ (\alpha_v\, \beta\, \beta_v) = \Sigma \alpha_v\, \beta'_v$$

womit die r_i als Functionen von v allein bestimmt sind.

Die Bedingung der Integrabilität von 13) aber erfordert, dass

$$(A\, r_v\, \beta) = 0$$

sei, und aus dieser Gleichung folgt wegen der Willkürlichkeit der A

14) $$\frac{\partial r_i}{\partial v} = \varrho\, \beta_i$$

womit also alle Verschiebungen der verlangten Art durch die Quadraturen

$$r_i = \int \varrho\, \beta_i\, d\, v + \text{const}$$

gegeben sind. Dabei ist ϱ eine willkürliche Function von v. Man kann daher auch leicht diejenigen Biegungen finden, bei denen die Grösse der Rotation $\sqrt{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2}$ eine vorgeschriebene Function von v ist. Ohne diesen Gegenstand weiter zu behandeln, wende ich mich sofort zu dem Falle, wo dieselbe gleich einer Constanten sein soll. Man kann noch voraussetzen, dass die α, β den Bedingungen

15) $$\Sigma\, \alpha_v^2 = 1, \quad \Sigma\, \alpha_v\, \beta = 0, \quad \Sigma\, \beta^2 = 1$$

genügen, indem man die Regelfläche durch eine ihre Erzeugenden orthogonal schneidende Leitcurve definirt. Unter dieser Voraussetzung wird das Quadrat der nicht verschwindenden Determinante

$$(\alpha_v\, \beta\, \beta_v)$$

gleich $$\Sigma\, \beta_v^2 - (\Sigma\, \beta_v\, \alpha_v)^2.$$

Aus der Gleichung

$$r_1 \frac{\partial r_1}{\partial v} + r_2 \frac{\partial r_2}{\partial v} + r_3 \frac{\partial r_3}{\partial v} = 0$$

folgt nunmehr wegen 14)

$$\Sigma\, \beta_i\, r_i = 0$$

also nach 15)

16) $$r_i = \lambda\, \beta_{iv} + \mu\, \alpha_{iv}$$

wo λ und μ zwei noch zu bestimmende Functionen von v sind, und endlich aus 14) für jeden bei α, β hinzugefügten Index $i = 1, 2, 3$:

$$\lambda \beta_{vv} + \mu \alpha_{vv} + \frac{\partial \lambda}{\partial v} \beta_v + \frac{\partial \mu}{\partial v} \alpha_v = \varrho \beta$$

woraus durch Multiplication mit den β, α_v, β_v und Addition folgt (15)

$$17) \quad \lambda \Sigma \beta \; \beta_{vv} + \mu \Sigma \beta \; \alpha_{vv} = \varrho$$

$$\lambda \Sigma \alpha_v \beta_{vv} + \frac{\partial \lambda}{\partial v} \Sigma \alpha_v \beta_v + \frac{\partial \mu}{\partial v} = 0$$

$$\lambda \Sigma \beta_v \beta_{vv} + \mu \Sigma \alpha_{vv} \beta_v + \frac{\partial \lambda}{\partial v} \Sigma \beta_v^2 + \frac{\partial \mu}{\partial v} \Sigma \beta_v \alpha_v = 0$$

Die Gleichung für λ, welche man hieraus erhält, ist eine homogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung, deren allgemeine Lösung von der Form

$$\lambda = c_1 \lambda_0 + c_2 \lambda_1$$
$$\mu = c_1 \mu_0 + c_2 \mu_1$$

ist, falls λ_0, μ_0; λ_1, μ_1 entsprechende particuläre Lösungen sind. Und so erhält man, dem willkürlichen Werthe des Verhältnisses $c_1 : c_2$ entsprechend, ∞^1 Biegungen, bei denen die Fläche eine constante Rotation erfährt. Die dabei auftretende characteristische Function ist, wie sich leicht ergiebt

$$\frac{(\lambda - \mu u)(\alpha_v \beta_v \beta)}{\sqrt{1 + 2u \Sigma \alpha_v \beta_v + u^2 \Sigma \beta_v^2}}$$

Die genannte Differentialgleichung kann aber durch Quadraturen vollständig integrirt werden. Die beiden letzten Gleichungen 17) nämlich — die erste ist ohnedies überflüssig, da sie nur ϱ bestimmt —

$$\lambda \Sigma \alpha_v \beta_{vv} + \frac{\partial \lambda}{\partial v} \Sigma \alpha_v \beta_v + \frac{\partial \mu}{\partial v} = 0$$

$$\lambda \Sigma \beta_v \beta_{vv} + \mu \Sigma \alpha_{vv} \beta_v + \frac{\partial \lambda}{\partial v} \Sigma \beta_v^2 + \frac{\partial \mu}{\partial v} \Sigma \alpha_v \beta_v = 0$$

geben, wenn

$$\sigma = \Sigma \beta_v^2 - (\Sigma \alpha_v \beta_v)^2$$

gesetzt wird, durch Elimination von $\frac{\partial \mu}{\partial v}$

$$\frac{\frac{\partial \lambda}{\partial v}\sigma + \frac{1}{2}\lambda\frac{\partial \sigma}{\partial v}}{\Sigma \beta_v a_{vv}} + \mu + \lambda \Sigma a_v \beta_v = 0$$

Setzt man den hieraus folgenden Werth von μ in die erste Gleichung ein, so folgt

$$\frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{\frac{\partial \lambda}{\partial v}\sigma + \frac{1}{2}\lambda\frac{\partial \sigma}{\partial v}}{\Sigma a_{vv}\beta_v}\right] + \lambda \Sigma a_{vv}\beta_v = 0$$

oder

$$\frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial v}\left|\frac{\frac{\partial}{\partial v}(\lambda^2\sigma)}{\lambda \Sigma a_{vv}\beta_v}\right|^2 + \frac{\partial}{\partial v}(\lambda^2\sigma) = 0$$

d. h.:
$$\frac{1}{2}\frac{\frac{\partial}{\partial v}(\lambda^2\sigma)}{\lambda\Sigma a_{vv}\beta_v} = \sqrt{2c - \lambda^2\sigma}$$

mit c als willkürlicher Constanten. Setzt man noch

$$\lambda^2\sigma = \tau$$

so wird

$$\frac{1}{2}\frac{\frac{\partial \tau}{\partial v}}{\sqrt{2c\tau - \tau^2}} = \frac{\Sigma a_{vv}\beta_v}{\sqrt{\sigma}}$$

oder
$$\frac{\tau - c}{c} = \sin\left(c_1 + 2\int\frac{\Sigma a_{vv}\beta_v}{\sqrt{\sigma}}\,dv\right)$$

womit λ und μ vollständig gegeben sind.

Die Aufgabe, eine gegebene Regelfläche einer um die Kugel umschriebenen Developpabelen zu adjungiren, lässt sich also durch zwei Quadraturen (die eine ist erforderlich zur Bestimmung des in der Untersuchung vorausgesetzten Orthogonalsystems) vollständig lösen.

Als Beispiel betrachte man die Fläche

$$\beta_1 = \cos V, \quad \alpha_1 = 0$$
$$\beta_2 = \sin V, \quad \alpha_2 = 0$$
$$\beta_3 = 0 \quad , \quad \alpha_3 = v$$

wo V eine beliebige Function von v ist.

Man findet dann

$$r_1 = - c \sin V$$
$$r_2 = + c \cos V$$
$$r_3 = \quad c_1$$

und hieraus

$$\varphi_1 = c \int \cos V d v - u c_1 \sin V$$

$$\varphi_2 = c \int \sin V d v + u c_1 \cos V$$

$$\varphi_3 = - c u$$

mit der characteristischen Function

$$\psi = \frac{c_1 u - c}{\sqrt{1 + u^2}}$$

§ XI. Ableitung neuer Deformationen aus bereits bekannten.

Die Differentialgleichung

$$1) \qquad \frac{\partial}{\partial u}(D_{11}\varrho_u - D_1\varrho_v) + \frac{\partial}{\partial v}(D\varrho_v - D_1\varrho_u) = 0$$

welche die sämmtlichen characteristischen Functionen $\frac{\varrho}{r}$ der Deformationen von F bestimmt, lässt sich in besonders einfachen Fällen allgemein lösen.[1]) Von ebenso grossem Interesse erscheint es, dass unter gewissen Voraussetzungen sich aus einer Lösung derselben andere, ja selbst unendlich viele herleiten lassen.

Setzt man in den Gleichungen 1) des § IV

[1]) Vgl. z. B. Darboux, Leçons t. III, p. 372 ff. Bianchi, Lezioni, p. 306—310.

$$2)\qquad D_{11}\,\Theta_u - D_1\,\Theta_v = \varphi_v$$
$$D_1\,\Theta_u - D\,\Theta_v = \varphi_u$$

welche die Coordinaten der Fläche φ bestimmen,

$$3)\qquad \sigma = \Sigma\varphi\,\Theta$$

$$4)\qquad r_1^2 = \Sigma\varphi^2$$

so ist
$$r_1 r_{1u} = \Sigma\varphi\,\varphi_u = D_1\,\Sigma\varphi\,\Theta_u - D\,\Sigma\varphi\,\Theta_v$$
$$r_1 r_{1v} = \Sigma\varphi\,\varphi_v = D_{11}\Sigma\varphi\,\Theta_u - D_1\Sigma\varphi\,\Theta_v$$
oder
$$r_1 r_{1u} = D_1\,\sigma_u - D\,\sigma_v - D_1\,\Sigma\,\Theta\varphi_u + D\,\Sigma\,\Theta\varphi_v$$
$$r_1 r_{1v} = D_{11}\sigma_u - D_1\sigma_v - D_{11}\Sigma\,\Theta\varphi_u + D_1\Sigma\,\Theta\varphi_v$$

also, wenn man für φ_u, φ_v wieder ihre Werthe aus 2) einführt, nach § I, 8)

$$r_1 r_{1u} - \Omega\, r\, r_u = r_1 r_{1u} + \frac{1}{2K}\frac{\partial\frac{1}{r^2}}{\partial u} = \sigma_u D_1 - \sigma_v D$$

$$r_1 r_{1v} - \Omega\, r\, r_v = r_1 r_{1v} + \frac{1}{2K}\frac{\partial\frac{1}{r^2}}{\partial v} = \sigma_u D_{11} - \sigma_v D_1$$

oder

$$5)\qquad \frac{\partial(\sigma_u D_{11} - \sigma_v D_1)}{\partial u} + \frac{\partial(\sigma_v D - \sigma_u D_1)}{\partial v} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\frac{1}{K}}{\partial u}\frac{\partial\frac{1}{r^2}}{\partial v} - \frac{\partial\frac{1}{K}}{\partial v}\frac{\partial\frac{1}{r^2}}{\partial u}\right)$$

Hieraus folgt:

Ist die characteristische Function $\frac{1}{r}$ der Deformation von F eine Function des Krümmungsmasses allein, so wird $\frac{\sigma}{r}$, der Abstand der durch den Punct $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ parallel zu der Tangentialebene von F im Puncte x_1, x_2, x_3 gelegten Ebene vom Anfang der Coordinaten wieder eine characteristische Function von F,[1]) und die Coordinaten ψ_1, ψ_2, ψ_3 der zu derselben gehörigen Verschiebungscomponenten sind nach § IV, 5) gegeben durch

$$\psi_u = (r_1 r_{1u} - \Omega r r_u)\,\Theta - \sigma \varphi_u$$
$$\psi_v = (r_1 r_{1v} - \Omega r r_v)\,\Theta - \sigma \varphi_v$$

oder, wenn man für die $\varphi_u\ \varphi_v$ ihre Werthe 2) wieder einführt,

6)
$$\frac{\partial \psi_1}{\partial u} = \varphi_2 \frac{\partial x_3}{\partial u} - \varphi_3 \frac{\partial x_2}{\partial u} - r r_u \Omega \Theta_1$$
$$\frac{\partial \psi_2}{\partial u} = \varphi_3 \frac{\partial x_1}{\partial u} - \varphi_1 \frac{\partial x_3}{\partial u} - r r_u \Omega \Theta_2$$
$$\frac{\partial \psi_3}{\partial u} = \varphi_1 \frac{\partial x_2}{\partial u} - \varphi_2 \frac{\partial x_1}{\partial u} - r r_u \Omega \Theta_3$$

nebst analogen Ausdrücken für die nach v genommenen Differentialquotienten der ψ; für die Minimalflächen, bei denen $r = \text{const}$ ist, nehmen diese Formeln eine besonders einfache Gestalt an.

Um die Betrachtung zu verallgemeinern, nehme man jetzt an, dass ϱ eine beliebige Lösung der Differentialgleichung 1) sei. Dann kann man setzen

$$\psi_u = \varrho^2 D_1 \frac{\partial\left(\frac{\Theta}{\varrho}\right)}{\partial u} - \varrho^2 D \frac{\partial\left(\frac{\Theta}{\varrho}\right)}{\partial v}$$
$$\psi_v = \varrho^2 D_{11} \frac{\partial\left(\frac{\Theta}{\varrho}\right)}{\partial u} - \varrho^2 D_1 \frac{\partial\left(\frac{\Theta}{\varrho}\right)}{\partial v}$$

und ψ_1, ψ_2, ψ_3 sind die Coordinaten der zur characteristischen Function $\frac{\varrho}{r}$ gehörigen Verschiebung. Setzt man nun

---

[1]) Die Lösung σ wird trivial, wenn σ gleich Null oder gleich einer Constanten wird. Im ersten Falle ist die Deformation von F mit den Componenten φ_i eine solche, bei der F in sich selbst verschoben wird, was nach Bianchi, (Lezioni p. 305) nur bei den auf Rotationsflächen abwickelbaren Flächen möglich ist; im zweiten Falle erhält man dieselbe characteristische Function wieder, von der man ausging.

$$\sigma = \Sigma \psi \Theta$$
$$r_1^2 = \Sigma \psi^2$$

so folgt nach ganz ähnlicher Rechnung wie vorhin

$$r_1 r_{1u} = \varrho^2 D_1 \frac{\partial \frac{\sigma}{\varrho}}{\partial u} - \varrho^2 D \frac{\partial \frac{\sigma}{\varrho}}{\partial v} - \frac{1}{2K} \frac{\partial \left(\frac{\varrho}{r}\right)^2}{\partial u}$$

$$r_1 r_{1v} = \varrho^2 D_{11} \frac{\partial \frac{\sigma}{\varrho}}{\partial u} - \varrho^2 D_1 \frac{\partial \frac{\sigma}{\varrho}}{\partial v} - \frac{1}{2K} \frac{\partial \left(\frac{\varrho}{r}\right)^2}{\partial v}$$

oder

$$\frac{\partial \left(\varrho^2 D_{11} \frac{\partial \frac{\sigma}{\varrho}}{\partial u} - \varrho^2 D_1 \frac{\partial \frac{\sigma}{\varrho}}{\partial v}\right)}{\partial u} + \frac{\partial \left(\varrho^2 D \frac{\partial \frac{\sigma}{\varrho}}{\partial v} - \varrho^2 D_1 \frac{\partial \frac{\sigma}{\varrho}}{\partial u}\right)}{\partial v}$$

$$+ \frac{1}{2K^2}\left(\frac{\partial K}{\partial u} \frac{\partial \left(\frac{\varrho}{r}\right)^2}{\partial v} - \frac{\partial K}{\partial v} \frac{\partial \left(\frac{\varrho}{r}\right)^2}{\partial u}\right) = 0$$

und mit Hülfe der Identität 2) in § II,

$$7) \qquad \frac{\partial}{\partial u}(D_{11}\sigma_u - D_1\sigma_v) + \frac{\partial}{\partial v}(D\sigma_v - D_1\sigma_u)$$

$$= -\frac{1}{2\varrho K^2}\left\{\frac{\partial K}{\partial u} \frac{\partial \left(\frac{\varrho}{r}\right)^2}{\partial v} - \frac{\partial K}{\partial v} \frac{\partial \left(\frac{\varrho}{r}\right)^2}{\partial u}\right\}.$$

Ist nun die Fläche eine Minimalfläche, so ist $\varrho = r$ selbst eine Lösung der partiellen Differentialgleichung. Dann ist aber auch σ eine Lösung derselben. Man hat also den folgenden Satz:

Bei einer Minimalfläche gehört zu jeder Lösung der partiellen Differentialgleichung eine associirte Lösung, welche durch Quadratur gefunden werden kann.

Auf den ersten Blick scheint es, als ob mit Hülfe dieses Satzes unendlich viele Lösungen der partiellen Differentialgleichung bei einer Minimalfläche gefunden werden könnten.

Denn man kann, von der soeben ermittelten Lösung σ ausgehend, die Fläche wieder einer neuen Fläche Θ' adjungiren, dann eine zweite Lösung σ' erhalten, u. s. f. Aber es ist leicht zu sehen, dass in Wirklichkeit ein solcher Process nicht zu Stande kommt, da die auf diesem Wege erhaltenen Lösungen alsbald nicht mehr wesentlich von einander verschieden ausfallen.

Ist nämlich σ überhaupt eine Lösung der Gleichung 1), so ist vermöge der Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial u}(D_{11}\,\Theta_u - D_1\,\Theta_v) + \frac{\partial}{\partial v}(D\,\Theta_v - D_1\,\Theta_u) = 0$$

nach § II), 2) noch die folgende

$$\frac{\partial}{\partial u}\left[D_{11}\sigma^2\frac{\partial\left(\frac{\Theta}{\sigma}\right)}{\partial u} - D_1\sigma^2\frac{\partial\left(\frac{\Theta}{\sigma}\right)}{\partial v}\right] + \frac{\partial}{\partial v}\left[D\sigma^2\frac{\partial\left(\frac{\Theta}{\sigma}\right)}{\partial v} - D_1\sigma^2\frac{\partial\left(\frac{\Theta}{\sigma}\right)}{\partial u}\right] = 0$$

erfüllt, d. h. aus der characteristischen Function $\frac{\sigma}{r}$ ergiebt sich als Fläche Θ' zu der man die ursprüngliche adjungiren kann, die Fläche mit den Coordinaten $\Theta' = \frac{\Theta}{\sigma}$, und die Grössen D, D_1, D_{11} gehen dabei gleichzeitig über in

$$D' = D\sigma^2, \quad D_1' = D_1\sigma^2, \quad D_{11}' = D_{11}\sigma^2.$$

Nun sind $\varphi_1 + c_1$, $\varphi_2 + c_2$, $\varphi_3 + c_3$ die Componenten einer Deformation mit der characteristischen Function $\frac{1}{r}$, wenn

$$\varphi_u = D_1\;\Theta_u - D\;\Theta_v$$
$$\varphi_v = D_{11}\,\Theta_u - D_1\,\Theta_v, \quad r = \left|\,\Sigma\,\Theta^2\,\right|^{\frac{1}{2}}$$

genommen wird. Liegt aber eine Minimalfläche vor, so ist r selbst eine Lösung der Gleichung 1), mithin sind auch die aus den Gleichungen

$$\varphi_u' = D_1\;r^2\frac{\partial\left(\frac{\Theta}{r}\right)}{\partial u} - D\,r^2\frac{\partial\left(\frac{\Theta}{r}\right)}{\partial v}$$

$$\varphi_v' = D_{11}\,r^2\frac{\partial\left(\frac{\Theta}{r}\right)}{\partial u} - D_1 r^2\frac{\partial\left(\frac{\Theta}{r}\right)}{\partial v}$$

gefundenen $\varphi_1' + C_1', \varphi_2' + C_2', \varphi_3' + C_3'$ Componenten einer Deformation (mit der characteristischen Function Eins), und diese vermitteln eine neue Lösung

$$\sigma = \Sigma\,\Theta\,\varphi' + \Sigma\,c'\,\Theta$$

mit der characteristischen Function $\frac{\sigma}{r}$. Adjungirt man vermöge derselben die gegebene Minimalfläche der Fläche

$$\Theta' = \frac{\Theta}{\sigma}$$

und lässt an Stelle der Grössen D die D' treten, so ist

$$|\,\Sigma\,\Theta'^2\,|^{\frac{1}{2}} = \frac{r}{\sigma}$$

eine Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(D_{11}'\frac{\partial\,\xi}{\partial u} - D_1'\frac{\partial\,\xi}{\partial\,v}\right) + \frac{\partial}{\partial\,v}\left(D'\frac{\partial\,\xi}{\partial\,v} - D_1'\frac{\partial\,\xi}{\partial\,u}\right) = 0$$

und vermöge dieser kann man

$$\varphi_u'' = D_1'\left(\frac{r}{\sigma}\right)^2\frac{\partial}{\partial u}\left(\Theta'\frac{\sigma}{r}\right) - D'\left(\frac{r}{\sigma}\right)^2\frac{\partial\left(\frac{\Theta'\sigma}{r}\right)}{\partial\,v}$$

$$\varphi_v'' = D_{11}'\left(\frac{r}{\sigma}\right)^2\frac{\partial}{\partial u}\left(\Theta'\frac{\sigma}{r}\right) - D_1'\left(\frac{r}{\sigma}\right)^2\frac{\partial\left(\frac{\Theta'\sigma}{r}\right)}{\partial\,v}$$

setzen. Da aber $D_1' = D_1\,\sigma^2$ etc. ist, so erhält man hier nur

$$\varphi_u'' = \varphi_u', \quad \varphi_v'' = \varphi_v'$$

also

$$\varphi_1'' = \varphi_1' + C_1$$
$$\varphi_2'' = \varphi_2' + C_2$$
$$\varphi_3'' = \varphi_3' + C_3$$

und aus diesen Werthen folgt als neue Lösung nur

$$\sigma' = \Sigma\,\Theta'\,\varphi' + \Sigma\,C\,\Theta' = \frac{\Sigma\,\Theta\,\varphi' + \Sigma\,C\,\Theta}{\sigma}$$

gehörig zur characteristischen Function

$$\sigma' : \frac{r}{\sigma} = \frac{\Sigma\, \Theta \varphi' + \Sigma\, C\, \Theta}{r}$$

welche, wie man sieht, nur durch die Werthe der Constanten C von der früheren $\frac{\sigma}{r}$ verschieden ist.

Man erhält daher, von einer beliebigen Darstellung der Minimalfläche ausgehend, ausser der dieser zu Grunde liegenden Deformation mit den Componenten $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ zunächst die zur characteristischen Function Eins gehörige Deformation φ_i' und mit Hülfe derselben allerdings die neue Lösung σ, zu welcher die Componenten φ_i''',

$$\varphi_u''' = D_1\, \sigma^2 \frac{\partial\left(\frac{\Theta}{\sigma}\right)}{\partial u} - D\, \sigma^2 \frac{\partial\left(\frac{\Theta}{\sigma}\right)}{\partial v}$$

$$\varphi_v''' = D_{11} \sigma^2 \frac{\partial\left(\frac{\Theta}{\sigma}\right)}{\partial u} - D_1\, \sigma^2 \frac{\partial\left(\frac{\Theta}{\sigma}\right)}{\partial v}$$

gehören, aber durch Fortsetzung dieses Verfahrens ergeben sich keine weiteren wesentlich neuen Lösungen.

Als Beispiel betrachte man die Scherk'sche Minimalfläche

$$x_1 = u$$
$$x_2 = v$$
$$x_3 = \log\cos u - \log\cos v$$

Hier wird $\mathsf{H} = 1 + \mathrm{tg}^2 u + \mathrm{tg}^2 v = \gamma^2$, und die Cosinus der Flächennormale sind

$$\Theta_1 = p_1 = \frac{\mathrm{tg}\, u}{\gamma}$$

$$\Theta_2 = p_2 = -\frac{\mathrm{tg}\, v}{\gamma}$$

$$\Theta_3 = p_3 = \frac{1}{\gamma}$$

also
$$E = -\frac{1}{\gamma \cos^2 u}, \quad G = +\frac{1}{\gamma \cos^2 v}, \quad F = 0$$

oder

$$D \;=-\frac{E}{\Delta}=\gamma^2\cos^2 v$$

$$D_{11}=-\frac{G}{\Delta}=-\gamma^2\cos^2 u.$$

Vermöge der Formeln

$$\varphi_u=-D\,\Theta_v,\quad \varphi_v=+D_{11}\,\Theta_u$$

wird also

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial u}=\frac{\operatorname{tg}u\operatorname{tg}v}{\gamma}\qquad,\quad \frac{\partial\varphi_1}{\partial v}=-\frac{1+\operatorname{tg}^2 v}{\gamma}$$

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial u}=\gamma-\frac{\operatorname{tg}^2 v}{\gamma}=\frac{1+\operatorname{tg}^2 u}{\gamma},\quad \frac{\partial\varphi_2}{\partial v}=-\frac{\operatorname{tg}u\operatorname{tg}v}{\gamma}$$

$$\frac{\partial\varphi_3}{\partial u}=\frac{\operatorname{tg}v}{\gamma}\qquad,\quad \frac{\partial\varphi_3}{\partial v}=\frac{\operatorname{tg}u}{\gamma}$$

und für $\operatorname{tg}u=\xi$, $\operatorname{tg}v=\eta$ erhält man

$$\varphi_1=\int\frac{1}{\sqrt{1+\xi^2+\eta^2}}\left(\frac{\eta\,\xi\,d\,\xi}{1+\xi^2}-d\,\eta\right)$$

$$\varphi_2=\int\frac{1}{\sqrt{1+\xi^2+\eta^2}}\left(d\,\xi-\frac{\xi\,\eta\,d\,\eta}{1+\eta^2}\right)$$

$$\varphi_3=\int\frac{1}{\sqrt{1+\xi^2+\eta^2}}\left(\frac{\eta\,d\,\xi}{1+\xi^2}+\frac{\xi\,d\,\eta}{1+\eta^2}\right)$$

Hieraus findet man

$$\varphi_1=-\tfrac{1}{2}\operatorname{Log}\left(\frac{\eta+\gamma}{\eta-\gamma}\right)$$

$$\varphi_2=+\tfrac{1}{2}\operatorname{Log}\left(\frac{\xi+\gamma}{\xi-\gamma}\right)$$

$$\varphi_3=-\operatorname{arctg}\frac{\gamma}{\xi\,\eta}$$

und aus diesen Werthen ergiebt sich als neue Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial v}\gamma^2\cos^2 v\frac{\partial\sigma}{\partial v}=\frac{\partial}{\partial u}\gamma^2\cos^2 u\frac{\partial\sigma}{\partial u}$$

$$\sigma = +\tfrac{1}{2}\frac{\operatorname{tg} u}{\gamma}\operatorname{Log}\left(\frac{\operatorname{tg} v+\gamma}{\operatorname{tg} v-\gamma}\right)+\tfrac{1}{2}\frac{\operatorname{tg} v}{\gamma}\operatorname{Log}\left(\frac{\operatorname{tg} u+\gamma}{\operatorname{tg} u-\gamma}\right)+\frac{1}{\gamma}\operatorname{arctg}\frac{\gamma}{\operatorname{tg} u \operatorname{tg} v}.$$

Wendet man dagegen die Gleichung 7) auf den Fall einer Fläche constanten Krümmungsmasses $K=\text{const}$ an, so ist die rechte Seite von 7) immer gleich Null. Es ergiebt sich also

Ist $\frac{\varrho}{r}$ die characteristische Function einer Deformation für eine Fläche constanter Krümmung, so ist $\frac{\sigma}{r}$ eine neue characteristische Function, sobald man $\sigma = \Sigma\Theta\varphi$ setzt und die φ aus den Gleichungen 2) entnimmt.

Im allgemeinen lassen sich daher aus jeder Lösung der partiellen Differentialgleichung 1) unendlich viele andere gewinnen; doch ist auch hier der Fall nicht ausgeschlossen, dass in der Reihe der so gefundenen Functionen σ eine Periode eintritt, oder auch eine derselben gleich Null wird, da im Verlaufe des Processes keine wesentlich neuen Constanten eingeführt werden.

Adjungirt man z. B. die Fläche der Ebene, setzt also, wenn p_1, p_2, p_3 die Cosinus der Flächennormale bedeuten

$$\Theta_i = \frac{p_i}{\gamma}, \quad \gamma = \Sigma(a\,p)$$

so gehören dazu die Verschiebungscomponenten

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= a_3 x_2 - a_2 x_3 + \text{const}\\ \varphi_2 &= a_1 x_3 - a_3 x_1 + \text{const}\\ \varphi_3 &= a_2 x_1 - a_1 x_2 + \text{const}\end{aligned}$$

welche einer infinitesimalen Bewegung entsprechen. Hieraus folgt dann

$$\sigma = \frac{1}{\gamma}(a\,x\,p)$$

als Lösung der partiellen Differentialgleichung 1), wobei

$$D = -E\gamma^2 : K\sqrt{\mathsf{H}},\quad D_1 = -F\gamma^2 : K\sqrt{\mathsf{H}},\quad D_{11} = -G\gamma^2 : K\sqrt{\mathsf{H}}$$

zu setzen ist.

Die Flächen constanter Krümmung besitzen also die characteristische Function

$$\sigma : \frac{1}{\gamma} = (a\,x\,p)$$

und diese Eigenschaft ist für dieselben characteristisch. Die Flächen constanter Krümmung sind die einzigen, bei denen der Ausdruck $(a\,x\,p)$, für beliebige Werthe der Constanten a, eine Lösung der Weingarten'schen partiellen Differentialgleichung ist.

Setzt man, um dies zu beweisen, voraus, dass die Fläche auf ihre Haupttangentencurven bezogen sei, so ist die Bedingung zu ermitteln, unter der die Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{1}{\sqrt{-K}}(a\,x\,p)_v\right] + \frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{1}{\sqrt{-K}}(a\,x\,p)_u\right] = -2\,(a\,x\,p)\,f\sqrt{-K}$$

befriedigt ist. Formt man nun die linke Seite mit Hülfe der Identitäten (Einleitung 1) und 2))

$$x_{uv} = B\,x_u + B_1\,x_v + F\,p$$
$$p_{uv} = \beta\,x_u + \beta_1\,x_v - f'\,p$$
$$p_u = \frac{F}{\mathsf{H}}(f\,x_u - e\,x_v),\quad p_v = \frac{F}{\mathsf{H}}(f\,x_v - g\,x_u)$$

um, so ergiebt sich wegen $f' = Kf$

$$(a\,x\,p_v)\left(\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{-K}}\right) + \frac{2\beta_1}{\sqrt{-K}}\right) + (a\,x\,p_u)\left(\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{-K}}\right) + \frac{2\beta}{\sqrt{-K}}\right)$$

$$+ (a\,x_u\,p)\left(\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{-K}}\right) + \frac{2B}{\sqrt{-K}}\right) + (a\,x_v\,p)\left(\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{-K}}\right) + \frac{2B_1}{\sqrt{-K}}\right) = 0$$

Da aber

$$2B_1 = -\frac{\partial \operatorname{Log}\frac{F}{\sqrt{\mathsf{H}}}}{\partial u},\quad 2B = -\frac{\partial \operatorname{Log}\frac{F}{\sqrt{\mathsf{H}}}}{\partial v}$$

$$\frac{F}{\sqrt{\mathsf{H}}} = \sqrt{-K}$$

ist, so folgt:

$$\frac{2B_1}{\sqrt{-K}} = \frac{\partial \frac{1}{\sqrt{-K}}}{\partial u}, \quad \frac{2B}{\sqrt{-K}} = \frac{\partial \frac{1}{\sqrt{-K}}}{\partial v}$$

so dass sich wegen $\beta_1 = -B_1$, $\beta = -B$ die Bedingung auf

$$(a\, x_u\, p)\frac{\partial \frac{1}{\sqrt{-K}}}{\partial v} + (a\, x_v\, p)\frac{\partial \frac{1}{\sqrt{-K}}}{\partial u} = 0$$

reducirt. Durch Multiplication mit $(x_u\, x_v\, p) = \sqrt{\mathsf{H}}$ verwandelt man diese in

$$\Sigma a x_u \left(f \frac{\partial \frac{1}{\sqrt{-K}}}{\partial v} + g \frac{\partial \frac{1}{\sqrt{-K}}}{\partial u} \right) = \Sigma a x_v \left(e \frac{\partial \frac{1}{\sqrt{-K}}}{\partial v} + f \frac{\partial \frac{1}{\sqrt{-K}}}{\partial u} \right)$$

aus welcher folgt, dass K eine Constante sein muss. Dagegen ist nicht ausgeschlossen, dass der Ausdruck $(a\, x\, p)$ für bestimmte Werthe der Constanten auch bei anderen Flächen eine Lösung der Differentialgleichung ist.

Zur weiteren Untersuchung der Lösung σ betrachte ich die Rotationsflächen constanter Krümmung

$$x_1 = u \cos v$$
$$x_2 = u \sin v$$
$$x_3 = f$$

wo f Function von u allein ist. Man erhält

$$\Theta_1 = \frac{f' \cos v}{k f' \cos z - a_3} = \frac{f' \cos v}{\gamma}$$

$$\Theta_2 = \frac{f' \sin v}{k f' \cos z - a_3} = \frac{f' \sin v}{\gamma}$$

$$\Theta_3 = -\frac{1}{k f' \cos z - a_3} = -\frac{1}{\gamma}$$

wobei $z = a + v$, $\gamma = k f' \cos z - a_3$ gesetzt ist; k, a_3, a sind willkürliche Constanten. Dann ist

$$\mathsf{H} = u^2(1 + f'^2), \quad K\sqrt{\mathsf{H}} = f' f'' : (1 + f'^2)^{\frac{3}{2}}$$

$$D = \frac{\gamma^2}{f'}, \quad D_{11} = \frac{\gamma^2 u}{f''}, \quad D_1 = 0$$

und, wenn man das constante Krümmungsmass mit m bezeichnet

$$f' f'' = m u (1 + f'^2)^2$$

$$-\frac{1}{1 + f'^2} = m u^2 + c$$

$$\frac{f'^2}{1 + f'^2} = m u^2 + c + 1$$

Man erhält also zunächst

$$\varphi_1 = -(f k \sin a + a_3 u \sin v)$$

$$\varphi_2 = -(f k \cos a - a_3 u \cos v)$$

$$\varphi_3 = \quad u k \sin z$$

und hieraus die neue Lösung

$$\sigma = \frac{k \sin z}{\gamma} [u + f f']$$

Für $c = -1$ hat man die Kugel. In dem besonderen Falle, wo der Mittelpunct der Kugel im Coordinatenanfang sich befindet, ist

$$x_3 = \sqrt{\frac{1}{m^2} - u^2} = f$$

also

$$u + f f' = 0.$$

Es ergiebt sich also hier keine neue Lösung mit Hülfe der infinitesimalen Bewegung, von welcher ausgegangen war, denn σ wird gleich Null. Schliesst man diesen Fall, der auch nur unter der angegebenen Voraussetzung eintreten kann, aus, so ergeben sich aus der Lösung σ die neuen Verschiebungscomponenten

$$\varphi_1' = \quad k \int (u + f f') \cos a \, d u - k (c + 1) \int \sin z \cos v \, d v$$

$$\varphi_2' = - k \int (u + f f') \sin a \, d u - k (c + 1) \int \sin z \sin v \, d v$$

$$\varphi_3' = - k \cos z \int \frac{(u + f f') \, d u}{f'}.$$

In dem besonderen Falle einer Kugel mit dem Radius Eins, deren Mittelpunct nicht im Coordinatenanfang liegt,

$$x_3 = a + \sqrt{1 - u^2}$$

wird
$$u + ff'' = -af''$$

also
$$\sigma = \frac{f'' \sin z}{\gamma}$$

Aus den soeben angegebenen Werthen der φ' findet man nun

$$\varphi_1' = \quad f \cos a$$

$$\varphi_2' = -f \sin a$$

$$\varphi_3' = -u \cos z$$

und aus diesen die neue Lösung

$$\sigma' = \Sigma \varphi' \Theta = \cos z \frac{(u + ff')}{\gamma}$$

Eine Fortsetzung der Rechnung zeigt, dass man, von diesem Werthe ausgehend, wieder die ursprüngliche Lösung σ erhält. Hier reducirt sich also die Gesammtheit der Lösungen, abgesehen von der auf der infinitesimalen Bewegung beruhenden, auf die beiden σ und σ'; wie aber die Verhältnisse sich für den Fall einer allgemeineren Fläche, als der Kugelfläche gestalten, bedarf noch einer näheren Untersuchung.