Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Classe

der

k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.

Band XXVII. Jahrgang 1897.

München.

Verlag der k. Akademie.

1898.

In Commission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).

Ueber die Du Bois Reymond'sche Convergenz-Grenze und eine besondere Form der Convergenz-Bedingung für unendliche Reihen.

Von **Alfred Pringsheim.**

(*Eingelaufen 17. Juni.*)

Wie ich schon in einer Note am Schlusse meiner Abhandlung über unendliche Doppelreihen erwähnte[1]), hat Du Bois Reymond in seinen „Paradoxen des Infinitär-Calcüls“[2]) den Versuch gemacht, die Einführung seiner Function $\tau(a)$ (welche die Grenze zwischen der Convergenz und Divergenz des Integrals $\int_0^a \frac{t(a)}{a}$ bilden soll, je nachdem $t(a) < \tau(a)$ oder $t(a) > \tau(a)$) in ausführlicherer Weise zu rechtfertigen. Obschon nun durch diese Auseinandersetzungen die von mir bei früherer Gelegenheit[3]) gegen die Zulässigkeit einer solchen Function $\tau(a)$ erhobenen Einwendungen weit eher bekräftigt, als erschüttert werden, so erscheint es mir doch zweckmässig, zur weiteren Klärung dieser für die Principien der Functionenlehre immerhin wichtigen und interessanten Frage auf die Hauptpunkte jenes Rechtfertigungs-Versuches etwas genauer einzugehen und daran einige allgemeine Bemerkungen über die

[1]) Sitz.-Ber. 1897, S. 152.
[2]) Math. Ann. Bd. 11, S. 158 ff.
[3]) Sitz.-Ber. 1896, S. 605 ff.

Unzulänglichkeit gewisser Du Bois Reymond'scher Grund-Anschauungen zu knüpfen.

1.

Zunächst zeigt Du Bois Reymond in ganz correcter Weise und ähnlich, wie ich es gleichfalls a. a. O. kurz angedeutet habe, dass die Annahme, es existire eine solche Function $\tau(a)$, auf unlösbare Widersprüche führt. Anstatt nun aber hieraus den einzig möglichen logischen Schluss zu ziehen, dass also jene Annahme a limine abzuweisen sei, folgert er wiederum nur soviel, dass die fragliche Grenze zwischen Convergenz und Divergenz durch keine bekannte Function d. h. „durch keine genügend gekennzeichnete Abhängigkeit" darstellbar sein könne. Sodann aber fährt er folgendermaassen fort:[1])

„Gleichwohl wird es Niemanden geben, der, vorausgesetzt dass er von den hier auseinandergesetzten Dingen noch nichts weiss, aber geübte geometrische Vorstellungen besitzt, nicht alle Zwischenstufen zwischen dem Nullwerden von

$$\frac{1}{\lg\frac{1}{a}\cdots\lg_n\frac{1}{a}} \quad \textit{und} \quad \frac{}{\lg\frac{1}{a}\cdots\left(\lg_n\frac{1}{a}\right)^{1+\mu}}$$

für gedanklich vorhanden und gleichberechtigt hielte. Aber auch die genaue Kenntniss der obigen Ergebnisse vorausgesetzt, hätte es, meiner Ueberzeugung nach, nicht den geringsten Sinn anzunehmen, dass es keine Grenze zwischen Convergenz und Divergenz gebe, oder richtiger, eine solche Vorstellung würde unsern eingewurzelten Vorstellungen zuwider laufen.

Wie also diesen Widerspruch zwischen den Ergebnissen der analytischen Untersuchung und der angeborenen Grössenvorstellung versöhnen?"

Ich muss gestehen, dass diese letzten Sätze auf mich ungefähr so wirken, als seien sie in einer völlig fremden Sprache geschrieben. Und ich kann daraus nur soviel ent-

---

[1]) a. a. O. S. 164.

nehmen, dass die „eingewurzelten“ oder gar „angeborenen“ Grössenvorstellungen verschiedener Mathematiker offenbar grundverschieden sein müssen. Wenn ich nun aber auf Grund meiner „eingewurzelten“ Grössenvorstellungen mit ganz dem entsprechenden Maasse von apodiktischer Ueberzeugung lediglich den Satz niederschreiben wollte: „Es hat nicht den geringsten Sinn, die Existenz einer Grenze zwischen Convergenz und Divergenz anzunehmen“, so würde hierdurch die Erkenntniss der Wahrheit um keinen Schritt gefördert werden. Ich will also versuchen, dem Gedankengange, welcher der Du Bois Reymond'schen Behauptung zu Grunde liegt, etwas genauer nachzugehen, und hierzu liefert der erste der oben citirten Sätze den genügenden Anhalt.

Darnach soll also ein mit der Natur des vorliegenden Problems nicht genauer vertrauter, aber mit geübten geometrischen Vorstellungen ausgerüsteter Beurtheiler „alle“ Zwischenstufen des Nullwerdens zwischen zwei bestimmten für gedanklich vorhanden und gleichberechtigt halten: mit anderen Worten, er soll auf Grund seiner geometrischen Vorstellungen unfehlbar zu der Anschauung gelangen, dass die verschiedenen Ordnungstypen des Nullwerdens eine **stetige** lineare Mannigfaltigkeit bilden.

Nun lässt sich aber leicht zeigen, dass der Versuch, die geometrische Vorstellung eines Linear-Continuums auf die Mannigfaltigkeit jener Nulltypen[1]) zu übertragen, von vornherein vollständig scheitert, und dass daher im Munde jenes geometrisch-denkenden Beurtheilers die Existenz „aller“ möglichen Zwischenstufen des Nullwerdens lediglich eine Redensart ohne Inhalt bedeuten würde.

---

[1]) Ich gebrauche den Ausdruck Null- bezw. Unendlichkeits-Typus hier und im folgenden stets zur Bezeichnung einer Function, welche eine bestimmte Art des Null- bezw. Unendlichwerdens charakterisirt; nicht aber im Sinne des Du Bois Reymond'schen Ausdruckes „Infinitär-Typus“ (s. z. B. den Aufsatz: Sur la grandeur relative des infinis des fonctions. — Annali di Matematica. Serie II, T. IV, p. 338.

Denn, lässt man nur in dem Ausdrucke x^μ den Exponenten μ successive das ganze stetige Gebiet der positiven Zahlen durchlaufen, so entspricht jedem Punkte μ der positiven Zahlen-Linie eine bestimmte Function x^μ, also auch ein bestimmter Typus des Nullwerdens — und umgekehrt. Um sich also nur die Gesammtheit dieser Nulltypen als geordnete lineare Mannigfaltigkeit vorzustellen, um dieselben gewissermaassen auf einer geraden Linie unterzubringen, besitzt die geometrische Phantasie kein anderes Mittel, als sich jeden Punkt dieser Geraden mit einem solchen Nulltypus belegt zu denken. Wenn sodann reinarithmetische Ueberlegungen zeigen, dass es für jeden einzelnen Werth μ unendlich viele Functionen, wie $x^\mu \cdot \left(\lg\frac{1}{x}\right)^{-\nu}$, $x^\mu \cdot \left(\lg\frac{1}{x}\right)^{-\nu}\left(\lg_2\frac{1}{x}\right)^{-\varrho}$, ... ($\nu > 0$, $\varrho > 0$, ...) giebt, welche für $\lim x = 0$ stärker Null werden, als x^μ, aber schwächer als jedes $x^{\mu+\varepsilon}$, wie klein auch die positive Zahl ε angenommen werden mag, so ist für alle diese neuen Nulltypen auf der gedachten Geraden kein Platz vorhanden. Mit anderen Worten, es ist schlechterdings unmöglich, sich etwa eine angebliche „Gesammtheit“ von Nulltypen als geordnete lineare stetige Mannigfaltigkeit, also unter dem Bilde einer geraden Linie vorzustellen. Ohne diese Vorstellungs-Möglichkeit hat aber die Aussage: man halte „**alle**“ Zwischenstufen des Nullwerdens zwischen zwei bestimmten für „gedanklich vorhanden und gleichberechtigt“ nicht den geringsten Sinn, und ein einigermaassen scharfsinniger geometrischer Beurtheiler wird sich sehr wohl hüten, dieses von Du Bois Reymond als selbstverständlich präsumirte Urtheil abzugeben.

„Gedanklich vorhanden“ sind eben nur alle diejenigen Nulltypen, welche durch irgend welche Functionen wirklich definirt sind. Solcher Functionen giebt es nun aber thatsächlich stetige unendliche Mannigfaltigkeiten von unendlich hoher Ordnung, z. B.

(1) $$x^{\nu} \cdot \left(\lg_1 \frac{1}{x}\right)^{\nu_1} \cdot \left(\lg_2 \frac{1}{x}\right)^{\nu_2} \cdots = \varphi_{\nu\,\nu_1\,\nu_2} \ldots (x)$$

wo:

(2) $$0 \leq \nu < \infty\,, \; -\infty < \nu_1 < +\infty\,, \; -\infty < \nu_2 < +\infty\,, \ldots$$

mit der Beschränkung, dass:

(2a) $$\begin{cases} \nu_1 > 0\,, \text{ falls } \nu = 0, \\ \nu_2 > 0, \text{ falls } \nu = 0, \; \nu_1 = 0 \text{ etc.} \end{cases}$$

Bezeichnet man mit $(m, m_1, m_2, \ldots)$ und $(n, n_1, n_2, \ldots)$ irgend zwei den obigen Bedingungen genügenden Systeme reeller Zahlen, so schreibt man nach Du Bois Reymond's Vorgange:

(3) $$\begin{Bmatrix} \varphi_{m\,m_1\,m_2} \ldots (x) \prec \varphi_{n\,n_1\,n_2} \ldots (x) \\ \varphi_{n\,n_1\,n_2} \ldots (x) \succ \varphi_{m\,m_1\,m_2} \ldots (x) \end{Bmatrix}$$

in Worten: $\varphi_{m\,m_1\,m_2} \ldots (x)$ ist „infinitär kleiner" als $\varphi_{n\,n_1\,n_2} \ldots (x)$, bezw. $\varphi_{n\,n_1\,n_2} \ldots (x)$ ist „infinitär grösser" als $\varphi_{m\,m_1\,m_2} \ldots (x)$, wenn:

(4) $$\lim_{x=0} \frac{\varphi_{m\,m_1\,m_2} \ldots (x)}{\varphi_{n\,n_1\,n_2} \ldots (x)} = 0\,.$$

Man bemerke nun vor allem, dass diese letztere Bedingung in Wahrheit unendlich viele Bedingungen von der Form:

(5) $$\frac{\varphi_{m\,m_1\,m_2} \ldots (x)}{\varphi_{n\,n_1\,n_2} \ldots (x)} < \varepsilon \text{ für } x < \delta$$

repräsentirt. Nur dadurch, dass man eine solche unendliche Menge von Bedingungen zusammenfasst und für ihr gleichzeitiges Bestehen ein bestimmtes Zeichen (3) einführt, werden die Terme der unendlich-vieldimensionalen Mannigfaltigkeit (1) in dem Sinne mit einander vergleichbar, dass in der That zwischen je zwei ganz beliebig aus ihr herausgegriffenen Termen ausnahmslos eine Beziehung von der Form (3) besteht. Wird nun auch auf diese Weise für die $\varphi_{\nu\,\nu_1\,\nu_2} \ldots (x)$ ein eindeutig bestimmtes Ordnungs-Princip definirt, welches demjenigen der reellen Zahlen möglichst analog ist, so gewinnt hierdurch die stetige unendlich-vieldimensionale Mannigfaltigkeit der $\varphi_{\nu\,\nu_1\,\nu_2\,\ldots}(x)$ keineswegs alle Eigenschaften einer stetigen linearen Mannigfaltigkeit.

Dergleichen Ordnungs-Gesetze lassen sich für jede mehrdimensionale Mannigfaltigkeit auf unendlich viele Arten definiren, ohne dass hierdurch der eigentliche Charakter ihrer Mehrdimensionalität beseitigt werden kann.

Um den Sinn dieser letzten Bemerkung deutlicher zu machen, will ich den einfachen Fall einer zweidimensionalen stetigen Mannigfaltigkeit etwas genauer betrachten. Eine solche bilden z. B. alle möglichen reellen Zahlenpaare (μ, ν) oder, geometrisch gesprochen, die Punkte einer Ebene. Wird nun durch das Symbol:

$$(6) \qquad (\mu_1, \nu_1) < (\mu_2, \nu_2)$$

ausgedrückt, dass in jeder Folge von Termen (μ, ν) der Term (μ_1, ν_1) dem Terme (μ_2, ν_2) voranzugehen hat, so lässt sich die Existenz einer Beziehung von der Form (6) für jedes beliebig gewählte Paar (μ_1, ν_1), (μ_2, ν_2) in folgender Weise eindeutig festlegen. Es seien $f(\mu, \nu)$, $g(\mu, \nu)$ zwei eindeutige reelle Functionen (die eventuell auch nur von je einer der beiden Veränderlichen μ, ν abzuhängen brauchen z. B. $f(\mu, \nu) = \mu$, $g(\mu, \nu) = \nu$) mit der einzigen Einschränkung, dass das gleichzeitige Bestehen der beiden Gleichungen:

$$(7) \qquad f(\mu_1, \nu_1) = f(\mu_2, \nu_2), \quad g(\mu_1, \nu_1) = g(\mu_2, \nu_2)$$

ausschliesslich dann möglich sein soll, wenn:

$$(8) \qquad \mu_1 = \mu_2, \quad \nu_1 = \nu_2.$$

Alsdann soll die Beziehung (6) dadurch definirt sein, dass

$$(9) \qquad \begin{cases} \text{entweder:} & f(\mu_1, \nu_1) < f(\mu_2, \nu_2) \\ \text{oder:} & f(\mu_1, \nu_1) = f(\mu_2, \nu_2), \; g(\mu_1, \nu_1) < g(\mu_2, \nu_2).^{1)} \end{cases}$$

[1]) Man könnte die durch Gl. (7) und (8) den Functionen f und g auferlegte Beschränkung auch fallen lassen. Nur müsste dann zu den beiden Festsetzungen (9) eine dritte hinzukommen, welche sich auf das Eintreten des Falles (7) zu beziehen hätte.

Man erkennt ohne weiteres, dass in der That auf Grund dieser zwei Festsetzungen jede endliche Anzahl von Termen (μ, ν) im Sinne der Ungleichung (6) (also in „monoton zunehmender“ oder auch umgekehrt in „monoton abnehmender“ Folge) vollständig eindeutig geordnet werden kann. Auch lassen sich, wenn $(\mu_1, \nu_1) < (\mu_2, \nu_2)$, aus der zweidimensionalen Mannigfaltigkeit der (μ, ν) unendlich viele abzählbare monoton zunehmende Mengen herausheben, welche mit (μ_1, ν_1) beginnend die Grenze (μ_2, ν_2) haben; desgleichen unendlich viele monoton zunehmende, stetige lineare Mengen, welche von (μ_1, ν_1) und (μ_2, ν_2) begrenzt werden. Dagegen lässt sich nicht umgekehrt jede aus der Mannigfaltigkeit der (μ, ν) herausgehobene stetige lineare Menge als geordnete (d. h. monoton zu- oder abnehmende) lineare Menge auffassen. Und am allerwenigsten bilden alle möglichen der Bedingung:

$$(\mu_1, \nu_1) < (\mu, \nu) < (\mu_2, \nu_2)$$

genügenden Terme (μ, ν) eine einzige lineare stetige und geordnete Menge, wie mit aller Strenge aus dem bekannten Satze [1]) hervorgeht, dass eine zweidimensionale stetige Mannigfaltigkeit nicht stetig und eindeutig umkehrbar auf eine lineare abgebildet werden kann.

In ganz analoger Weise lassen sich für jede n-dimensionale oder auch unendlich-vieldimensionale stetige Mannigfaltigkeit mit Hülfe von n bezw. unendlich vielen Bedingungen beliebig viele eindeutige Ordnungs-Gesetze aufstellen. Und der sogenannte „infinitäre Grössen-Begriff“ ist lediglich ein derartiger zusammengesetzter Ordnungs-Begriff, durch dessen Einführung die Mannigfaltigkeit der Null- bezw. Unendlichkeits-Typen keineswegs

---

[1]) Lüroth, Erlanger Berichte 1878. — G. Cantor, Ueber einen Satz aus der Theorie der stetigen Mannigfaltigkeiten. Göttinger Nachr. 1879, S. 127. — Netto, Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre. Journal f. Math. Bd. 86, S. 263.

die Eigenschaften einer unendlich-vieldimensionalen Mannigfaltigkeit vollständig verliert.

Aus der Nichtbeachtung dieses letzteren Umstandes entspringen in Wahrheit alle jene angeblichen „Paradoxen“ des Du Bois Reymond'schen „Infinitär-Calcüls“, welche eben einzig und allein darin bestehen, dass gewisse aus den gewöhnlichen Grössen-Beziehungen zwischen reellen Zahlen abstrahirte Gesetze und Anschauungen nicht ohne weiteres auf die Objecte jener „infinitären“ Grössenbeziehungen (d. h. die Null- bezw. Unendlichkeits-Typen) übertragbar sind. Wirkliche Analogien mit der linearen Mannigfaltigkeit der reellen Zahlen können nämlich nur da erwartet werden, wo lediglich eine lineare, geordnete und stetige oder aus einer solchen entnommene unstetige Menge derartiger Objecte in Betracht kommt.[1]) Sie erscheinen hingegen a priori da ausgeschlossen, wo die Mehr-Dimensionalität der betreffenden Mannigfaltigkeiten in's Gewicht fällt. Und ich muss es, nach dem Gesagten, als auf einem fundamentalen Irrthume beruhend bezeichnen, wenn Du Bois Reymond in seiner Allgemeinen Functionen-Theorie[2]) bezüglich der „infinitären Pantachie“, d. h. der Gesammtheit der Unendlichkeits-Typen, die Aussage macht: „*Idealistisch ist sie ein infinitäres Continuum, ähnlich dem Zahlen-Continuum, welches man ebenfalls, wenn auch minder einfach (?) als Punktvielheit auf einer Linie auffassen kann.*“

---

[1]) S. z. B. den oben citirten Aufsatz in den Annali de Matematica, Serie II, T. IV, p. 338. — Im übrigen tritt auch hier schon als fundamentaler Unterschied gegenüber der Menge der reellen Zahlen der Umstand hervor, dass das bekannte Axiom des Archimedes nicht mehr gilt. Vgl. Stolz, Zur Geometrie der Alten, insbesondere über ein Axiom des Archimedes. Math. Ann. Bd. XXII, S. 505—507 Fussnoten. — Derartige dem Axiome des Archimedes nicht genügende Mannigfaltigkeiten sind neuerdings von Bettazzi genauer untersucht worden: Teoria delle grandezze, Pisa 1890. p. 47–58.

[2]) Tübingen 1882, S. 283.

2.

Im übrigen handelt es sich ja in dem vorliegenden Falle gar nicht um die Entscheidung der (lediglich von Du Bois Reymond ganz unnöthiger Weise herbeigezogenen) allgemeinen Frage, ob man „alle möglichen" Stufen des Nullwerdens als eine lineare stetige Mannigfaltigkeit ansehen kann, sondern um die wesentlich speciellere, ob zwei ganz bestimmt vorgeschriebene Folgen (also abzählbare Mengen) von Ordnungs-Typen einer gemeinsamen Grenze zustreben; noch genauer gesagt, ob die beiden Functionen-Folgen:

$$(10)\quad \varphi_\nu(x) = \frac{1}{\lg\frac{1}{x}\lg_2\frac{1}{x}\ldots\lg_\nu\frac{1}{x}},\quad \varphi_{\nu,\varrho}(x) = \frac{1}{\lg\frac{1}{x}\lg_2\frac{1}{x}\ldots\left(\lg_\nu\frac{1}{x}\right)^{1+\varrho}}$$

eine einzige bestimmte Grenz-Function definiren, wenn ν ganzzahlig in's Unendliche wächst, während ϱ eine beliebig klein anzunehmende, aber feste positive Zahl bedeutet.

Diese Frage dürfte nun freilich der von Du Bois Reymond zu Hülfe gerufene geometrische Beurtheiler in dem folgenden Sinne bejahen: „Die beiden unendlichen Curven-Schaaren:

$$(11)\qquad y = \varphi_\nu(x),\ y = \varphi_{\nu,\varrho}(x)\ (\nu = 1, 2, 3, \ldots),$$

deren Ordinaten für hinlänglich kleine Werthe von x der Bedingung genügen:

$$(12)\qquad \varphi_{\nu,\varrho}(x) < \varphi_{\nu+1,\varrho}(x) < \varphi_{\nu+1}(x) < \varphi_\nu(x),$$

nähern sich für $\lim \nu = \infty$ einer bestimmten Grenz-Curve."

Und er hätte, wie sogleich mit Hülfe der nothwendigen analytischen Ueberlegungen gezeigt werden soll, hiermit vollständig Recht. Nur entspricht das wirkliche Resultat keineswegs der auf den ersten Blick nahe liegenden Vorstellung zweier Curven-Schaaren, die sich, wie Ungl. (12) zu lehren scheint, von verschiedenen Seiten einander unbegrenzt nähern und auf diese Weise eine gewisse Grenz-Curve ein-schliessen. Vielmehr wird das Intervall, für welches Ungl. (12) gilt, mit unbegrenzt wachsenden Werthen von ν auch unbegrenzt verkleinert, d. h. die betreffenden Curven durchsetzen sich bei wachsender Ordnungszahl in immer grösserer Nähe des Nullpunktes, und die Grenz-Curve wird von ihnen nicht **ein-**, sondern **aus**geschlossen. Als die fragliche Grenz-Curve erscheint hierbei der positive Theil der Ordinaten-Axe, also gerade die einzige Curve, deren Gleichung nicht auf die Form $y = \tau(x)$ gebracht werden kann. Mit anderen Worten, gerade die Existenz einer ganz bestimmten Grenz-Curve für die beiden Curven-Schaaren $y = \varphi_\nu(x)$ und $y = \varphi_{\nu,\varrho}(x)$ lässt unmittelbar erkennen, dass die Existenz einer Grenz-Function $\tau(x)$ für die $\varphi_\nu(x)$ und $\varphi_{\nu,\varrho}(x)$ definitiv ausgeschlossen erscheint, und man gelangt also auf diesem von Du Bois Reymond ausdrücklich zur Unterstützung seiner Behauptung vorgezeichneten Wege nur von neuem zu der Ueberzeugung ihrer Unhaltbarkeit.

Um dieses angedeutete Resultat wirklich abzuleiten, werde gesetzt:

$$(13^a) \quad e_0 = 1, \; e_1 = e, \; e_2 = e^{e_1}, \; e_3 = e^{e_2}, \; \ldots \; e_\nu = e^{e_{\nu-1}}, \; \ldots$$

so dass also:

$$(13^b) \quad \lg_1 e_\nu = e_{\nu-1}, \; \lg_2 e_\nu = e_{\nu-2}, \; \ldots \; \lg_\nu e_\nu = 1, \; \lg_{\nu+1} e_\nu = 0.$$

Hieraus folgt zunächst, dass allgemein $\varphi_{\nu+1}(x)$ und $\varphi_{\nu+1,\varrho}(x)$ für $x = \frac{1}{e_\nu}$ unendlich gross werden. Da sodann:

$$(14) \qquad \frac{\varphi_{\nu+1}(x)}{\varphi_{\nu+1,\varrho}(x)} = \left(\lg_{\nu+1} \frac{1}{x}\right)^\varrho, \quad \frac{\varphi_\nu(x)}{\varphi_{\nu+1}(x)} = \lg_{\nu+1} \frac{1}{x},$$

und:

$$(15) \qquad \lg_{\nu+1} \frac{1}{x} \begin{cases} < 1 \text{ für } x > \dfrac{1}{e_{\nu+1}} \\ > 1 \text{ für } x < \dfrac{1}{e_{\nu+1}}, \end{cases}$$

so hat man:

(16) $$\varphi_{\nu+1,\varrho}(x) > \varphi_{\nu+1}(x) > \varphi_\nu(x) \text{ für } x > \frac{1}{e_{\nu+1}},$$

und:

(17) $$\varphi_{\nu+1,\varrho}(x) < \varphi_{\nu+1}(x) < \varphi_\nu(x) \text{ für } x < \frac{1}{e_{\nu+1}}.$$

Erst bei der Stelle $x = \frac{1}{e_{\nu+1}}$, welche mit wachsendem ν der Nullstelle immer näher rückt, findet also jenes Durchsetzen der betreffenden Curven statt, welches ihre endgültige Reihenfolge bestimmt.

Um die Gestalt der fraglichen Curven etwas genauer festzustellen, bilde man zunächst aus:

$$\varphi_n(x) = \prod_1^n{}^\nu \frac{1}{\lg_\nu \frac{1}{x}}$$

durch Differentiation:

$$\varphi_n'(x) = \varphi_n(x) \cdot \sum_1^n{}^\nu \lg_\nu \frac{1}{x} \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\lg_\nu \frac{1}{x}}\right)$$

$$= \varphi_n(x) \cdot \sum_1^n{}^\nu \frac{1}{x \lg \frac{1}{x} \ldots \lg_\nu \frac{1}{x}}$$

$$= \frac{1}{x} \varphi_n(x) \cdot \sum_1^n{}^\nu \varphi_\nu(x),$$

also schliesslich:

(18) $$\varphi_n'(x) = \frac{1}{x} \cdot \varphi_n(x) \cdot \Phi_n(x), \quad \text{wo:} \quad \Phi_n(x) = \sum_1^n{}^\nu \varphi_\nu(x).$$

Da sodann:

$$\varphi_{n,\varrho}(x) = \varphi_n(x) \cdot \frac{1}{\left(\lg_n \frac{1}{x}\right)^\varrho},$$

so folgt mit Berücksichtigung von Gl. (18):

$$\varphi_{n,\varrho}'(x) = \frac{1}{x} \cdot \varphi_n(x) \cdot \Phi_n(x) \cdot \frac{1}{\left(\lg_n \frac{1}{x}\right)^\varrho} + \varrho \cdot \frac{1}{x \cdot \lg \frac{1}{x} \ldots \left(\lg_n \frac{1}{x}\right)^{1+\varrho}} \cdot \varphi_n(x)$$

oder:

$$(19)\quad \varphi'_{n,\varrho}(x) = \frac{1}{x}\cdot\varphi_{n,\varrho}(x)\cdot\Phi_{n,\varrho}(x),\ \text{wo: } \Phi_{n,\varrho}(x) = \Phi_n(x) + \varrho\cdot\varphi_n(x).$$

Hieraus ergiebt sich durch nochmalige Differentiation zunächst:

$$(20)\quad \varphi''_{n,\varrho}(x) = -\frac{1}{x^2}\cdot\varphi_{n,\varrho}(x)\cdot\Phi_{n,\varrho}(x)$$

$$+\frac{1}{x^2}\cdot\varphi_{n,\varrho}(x)\cdot\Phi^2_{n,\varrho}(x) + \frac{1}{x}\cdot\varphi_{n,\varrho}\cdot\Phi'_{n,\varrho}(x),$$

wo nach Gl. (16) und (15):

$$\Phi'_{n,\varrho}(x) = \sum_1^n{}_\nu\, \varphi'_\nu(x) + \varrho\cdot\varphi'_n(x) = \frac{1}{x}\cdot\sum_1^n{}_\nu\,\varphi_\nu(x)\cdot\Phi_\nu(x) + \varrho\cdot\frac{1}{x}\varphi_n(x)\cdot\Phi_n(x).$$

Man hat nun:

$$\sum_1^n{}_\nu\, \varphi_\nu(x)\cdot\Phi_\nu(x) = \sum_1^n{}_\nu\, \varphi_\nu(x)\sum_1^\nu{}_\mu\, \varphi_\mu(x) = \sum_1^n{}_\nu\, \varphi_\nu(x)\cdot\sum_\nu^n{}_\mu\, \varphi_\mu(x)$$

also:

$$2\sum_1^n{}_\nu\, \varphi_\nu(x)\cdot\Phi_\nu(x) = \sum_1^n{}_\nu\cdot\varphi_\nu(x)\cdot\sum_1^n{}_\mu\,\varphi_\mu(x) + \sum_1^n{}_\nu\,\varphi^2_\nu(x)$$

$$= \Phi^2_n(x) + \sum_1^n{}_\nu\,\varphi^2_\nu(x),$$

und daher:

$$\sum_1^n{}_\nu\,\varphi_\nu(x)\cdot\Phi_\nu(x) + \varrho\cdot\varphi_n(x)\cdot\Phi_n(x)$$

$$= \tfrac{1}{2}\left\{\Phi_n(x) + \varrho\cdot\varphi_n(x)\right\}^2 + \tfrac{1}{2}\left\{\sum_1^n{}_\nu\,\varphi^2_\nu(x) - \varrho^2\cdot\varphi^2_n(x)\right\},$$

sodass Gl. (20) schliesslich in die folgende übergeht:

$$(21)\quad \varphi''_{n,\varrho}(x)$$

$$= -\frac{1}{x^2}\cdot\varphi_{n,\varrho}(x)\cdot\Phi_{n,\varrho}(x)\cdot\left\{1 - \tfrac{3}{2}\cdot\Phi_{n,\varrho}(x) - \tfrac{1}{2}\cdot\frac{\sum_1^n{}_\nu\,\varphi^2_\nu(x) - \varrho^2\cdot\varphi^2_n(x)}{\Phi_{n,\varrho}(x)}\right\}$$

Hieraus folgt noch, wenn man speciell $\varrho = 0$ setzt:

$$(22) \quad \varphi_n''(x) = -\frac{1}{x^2}\cdot\varphi_n(x)\cdot\Phi_n(x)\cdot\left\{1-\tfrac{3}{2}\,\Phi_n(x)-\tfrac{1}{2}\cdot\frac{\sum_1^n{}^{\nu}\,\varphi_\nu^2(x)}{\Phi_n(x)}\right\}.$$

Die Gleichungen (15), (16) und (18), (19) lehren, dass die Curven $y = \varphi_\nu(x)$ und $y = \varphi_{\nu,\varrho}(x)$, oder, was auf dasselbe herauskommt, die Curven $y = \varphi_{\nu,\varrho}(x)$ für $\varrho = 0$ und $\varrho > 0$, bei beliebigen Werthen der ganzen Zahl ν den gleichen sehr einfachen Charakter besitzen. Die Ordinaten haben für $x = 0$ den Werth 0 und nehmen, wie Gl. (15), (16) zeigt, mit wachsendem x monoton zu, bis sie für $x = \frac{1}{e_{\nu-1}}$ unendlich gross werden (s. Gl. (10)): die Linie $x = \frac{1}{e_{\nu-1}}$ ist dann die Asymptote der beiden Curven $y = \varphi_\nu(x)$ und $y = \varphi_{\nu,\varrho}(x)$, während sämmtliche Curven die Ordinaten-Axe im Nullpunkte tangiren. Aus Gl. (18), (19) ersieht man, dass die zunächst concav, schliesslich convex gegen die Abscissen-Axe verlaufenden Curven zwischen der Nullstelle $x = 0$ und der Unendlichkeits-Stelle $x = \frac{1}{e_{\nu-1}}$ je einen einzigen Inflexions-Punkt besitzen. Da im übrigen die Asymptote $x = \frac{1}{e_{\nu-1}}$ für $\lim \nu = \infty$ mit der Ordinaten-Axe zusammenfällt, so bildet deren positiver Theil in der That die fragliche Grenz-Curve.

Dieses Ergebniss kann sogar in dem Sinne gedeutet werden, dass jene Grenz-Curve *cum grano salis* die wahre Grenze zwischen Convergenz und Divergenz definirt. Wenn man nämlich sagt, dass von den beiden Integralen:

$$\text{(I)} \quad \int_0^a \frac{\varphi_{\nu,\varrho}(x)}{x}\cdot dx, \qquad \text{(II)} \quad \int_0^a \frac{\varphi_\nu(x)}{x}\cdot dx$$

das erste convergirt, das zweite divergirt, so ist über die wahre Bedeutung dieser Aussage folgendes zu bemerken:

1) Die obere Integrations-Grenze a ist keineswegs in dem Sinne als constant anzusehen, dass es eine Zahl $a > 0$ giebt,

welche für jeden noch so grossen Werth von ν die Convergenz des Integrals (I) gewährleistet. Vielmehr muss $a < \frac{1}{e_{\nu-1}}$ angenommen werden, wenn das Integral (I) convergiren soll; und andererseits bleibt das Integral (II) divergent, auch wenn a in der angedeuteten Weise verkleinert wird.

2) Jene Integrale sind sogenannte „uneigentliche“, d. h. sie haben lediglich die Bedeutung einer abgekürzten Schreibweise für:

$$\lim_{\varepsilon=0} \int_{\varepsilon}^{a} \frac{\varphi_{\nu,\varrho}(x)}{x} \cdot dx, \quad \lim_{\varepsilon=0} \int_{\varepsilon}^{a} \frac{\varphi_{\nu}(x)}{x} \cdot dx, \quad \text{wo: } 0 < \varepsilon < a.$$

Da nun auf Grund der sub 1) angestellten Betrachtung für $\lim \nu = \infty$ geradezu $a = 0$ gesetzt werden muss, so kann man nicht etwa sagen, dass sich jene beiden Integrale zugleich mit der Länge des Integrations-Intervalls auf den Werth 0 reduciren, sie hören vielmehr ganz unzweideutig auf, überhaupt zu existiren, und in diesem Sinne sind sie in der That weder convergent, noch divergent.[1]) Zugleich ergiebt

[1]) Es bedarf wohl kaum der Bemerkung, dass diese Schlüsse keine Aenderung erleiden, wenn man etwa, um das Unendlichwerden der Functionen $\varphi_{\nu,\varrho}(x)$, $\varphi_{\nu}(x)$ für $x = \frac{1}{e_{\nu-1}}$ gänzlich zu eliminiren, dieselben durch andere Functionen $\psi_{\nu,\varrho}(x)$, $\psi_{\nu}(x)$ ersetzt, sodass:

$$\psi_{\nu,\varrho}(x) = \varphi_{\nu,\varrho}(x)$$
$$\psi_{\nu}\ \ (x) = \varphi_{\nu}\ \ (x)$$

nur für das Intervall: $0 \overline{\overline{<}}\, x < \frac{1}{e_{\nu-2}}$, während über $x = \frac{1}{e_{\nu-2}}$ hinaus $\psi_{\nu,\varrho}(x)$ und $\psi_{\nu}(x)$ als willkürliche, endliche und stetige Functionen gedacht werden können. Denn zerlegt man die betreffenden Integrale in folgender Weise:

$$\int_0^a = \int_0^{\frac{1}{e_{\nu-2}}} + \int_{\frac{1}{e_{\nu-2}}}^a$$

so gelten für das erste Theil-Integral genau wieder die im Texte gemachten Bemerkungen.

sich als immerhin einigermaassen werthvolles Resultat dieser vielleicht manchem Leser ziemlich zwecklos erscheinenden Untersuchung eine neue Bestätigung der erfreulichen Thatsache: Die Sprache der Analysis ist von so erstaunlicher Vollkommenheit, dass sie auch auf die verfänglichsten Fragen stets die richtige Antwort giebt, wenn man sie nur richtig anzuwenden versteht.

3.

Anstatt durch ähnliche Betrachtungen, wie sie im vorigen Artikel angestellt wurden, Aufschluss über die wahre Natur jener praesumirten Grenze zwischen Convergenz und Divergenz zu gewinnen, nimmt Du Bois Reymond seine Zuflucht zur Heranziehung einer Analogie, welche ich — ohne diese Auseinandersetzung zu kennen — schon in meinem ersten Aufsatze[1]) als sehr naheliegend, aber durchaus unzutreffend bezeichnet habe, nämlich die (scheinbare) Analogie zwischen jenen „undefinirbaren" Null- bezw. Unendlichkeits-Typen und den Irrationalzahlen. Um diese Analogie näher zu begründen sagt er (a. a. O. p. 165) zunächst folgendes:

„*Wenn wir nun in der gemeinen Zahlenfolge, trotzdem die Folge der rationalen Zahlen unbegrenzt dicht ist, hier durch analytische Betrachtungen, dort durch geometrische Constructionen, dahin geführt werden, Grössen als vorhanden anzunehmen, welche durch Zahlen nicht ausdrückbar sind, wie $\sqrt{2}$ oder π dergleichen sind, was Wunder wenn auch in der infinitären Grössenfolge unsere Gedankenverbindungen zu der Annahme einer Art des Wachsthumes uns hinleiten, die man durch analytische Operationen nie wird darstellen können?*"

Also: Wir werden in der gemeinen Zahlenfolge dahin geführt (*sic!*), Grössen als vorhanden anzusehen, welche durch Zahlen nicht ausdrückbar sind, wie z. B. $\sqrt{2}$ und π.

1) a. a. O. S. 606 ff.

Obschon ich nicht recht verstehe, wie überhaupt irgendwelche „Grössen“ in die „gemeine Zahlenfolge“ hineingerathen, zumal solche, die „durch Zahlen nicht ausdrückbar sind“, so glaube ich diesem etwas merkwürdigen Satze mit Sicherheit soviel entnehmen zu können, dass speciell $\sqrt{2}$ nach Du Bois Reymond's Terminologie „durch Zahlen nicht ausdrückbar“ ist, und möchte dies zum besseren Verständnisse des nun folgenden Satzes ausdrücklich hervorheben. Dieser lautet:

„*Kurzum ich meine, die ideelle Grenze zwischen Convergenz und Divergenz ist ein* irrationales Unendlich, *welches sich zu den convergenten und divergenten unendlichen Operationen ganz ähnlich verhält, wie die Länge der Kreisperipherie zu den von aussen und von innen sich ihr nähernden geschlossenen Linien von numerisch darstellbarer Länge.*“

Du Bois Reymond erblickt also die fragliche Analogie nicht, wie ich seiner ersten Bemerkung ähnlichen Inhalts entnehmen zu müssen glaubte[1]), in der räumlichen Beziehung zwischen den geometrischen Figuren des Kreises und der eingeschriebenen oder umschriebenen Polygone, sondern in der analytischen Beziehung zwischen der Länge der Kreisperipherie und derjenigen der sich ihr nähernden „geschlossenen Linien von numerisch darstellbarer Länge.“

So einfach das klingen mag, so gehört doch immerhin einiger Scharfsinn und guter Wille dazu, um nur zunächst genau zu verstehen, was mit diesen „geschlossenen Linien von numerisch darstellbarer Länge“ gemeint sein mag.

Eine bestimmte Länge kommt nach der üblichen — und von Du Bois Reymond acceptirten[2]) — Ansicht zunächst nur einer geradlinigen Strecke zu. Für den analytischen Längenbegriff einer krummen Linie stellt Du Bois Reymond in seinen Erläuterungen zu den Anfangs-

[1]) cf. S. B. 1897, S. 606.

[2]) s. die Note: „Ueber den Begriff der Länge einer Curve.“ — Acta math., T. VI, p. 167.

gründen der Variations-Rechnung[1]) die folgende Definition auf: „Diese Länge ist die Grenze einer Summe nach bestimmtem Gesetz in's Unbegrenzte sich vermehrender und dabei angemessen sich verkürzender wirklich vorgestellter Längen."

Hieraus geht zunächst hervor, dass unter den oben bezeichneten „Linien" (mit numerisch darstellbarer Länge) jedenfalls gerade Linien, also unter den „geschlossenen" Linien gewöhnliche Polygone gemeint sind. Was sind nun aber Polygone mit „numerisch darstellbarer Länge"? „Numerisch darstellbar" kann doch garnichts anderes bedeuten, als: „durch Zahlen ausdrückbar." Da nun Du Bois Reymond in dem unmittelbar zuvor citirten Satze ohne jede Einschränkung ausspricht, dass z. B. $\sqrt{2}$ „durch Zahlen nicht ausdrückbar" sei, so hätte man offenbar unter „numerisch darstellbar" soviel wie „rational" zu verstehen.

Auf der anderen Seite erscheint es mir aber, soweit meine elementar-geometrischen und algebraischen Kenntnisse reichen, völlig unerfindlich, wie es möglich sein soll, eine asymptotische Annäherung an die Kreisperipherie durch eine unbegrenzte Reihe von Polygonen mit rationalem Umfange herzustellen. Und da ich nicht glauben kann, dass Du Bois Reymond hierüber anderer Meinung war, so bleibt nur die weitere Annahme übrig, dass unter den geschlossenen Linien mit numerisch darstellbarer Länge in dem vorliegenden Falle gerade solche mit irrationaler Gesammtlänge zu verstehen sind — eine Annahme, die freilich im Hinblick auf die unmittelbar zuvor proklamirte numerische Nicht-Darstellbarkeit von $\sqrt{2}$ kein besonders günstiges Licht auf die Consequenz und Correctheit der Du Bois Reymond'schen Ausdrucksweise wirft, zumal es sich doch hier um die Erörterung ziemlich schwieriger Principienfragen und die Einführung eines ganz neuen, von vornherein äusserst fragwürdigen Begriffes handelt.

---

1) Math. Ann. Bd. XV, S. 285.

Steht nun aber einmal die Irrationalität jener Polygone ausser Frage, so ist nicht mehr recht ersichtlich, in wiefern der obige Vergleich dazu dienen soll, die angebliche Beziehung des „irrationalen Unendlich" zu dem „rationalen" deutlicher zu machen. Denn erstens erscheint die Zahl π als Grenze einer Zahlenfolge, deren Terme selbst schon irrational sind; zweitens aber ist die Irrationalität von π selbst in gewissem Sinne rein zufällig, d. h. durch die Natur des betreffenden Problems in keiner Weise gefordert. Wählt man nämlich statt des Kreises, der doch in dem obigen Vergleiche lediglich generell den Typus eines eigentlichen d. h. in jedem Punkte mit einer Tangente versehenen Curvenstückes repräsentirt, eine passende andere Curve, z. B. die vom Kreise mit dem Radius 1 erzeugte Cycloide, so liefert der fragliche Grenz-Process die ganze rationale Zahl 8. Mit anderen Worten: der sogenannte analytische Längen-Begriff ist ein rein numerischer Grenz-Begriff, dessen Inhalt sich in keiner Weise mit der Erzeugung des Irrationalen aus dem Rationalen deckt.

Geht man dagegen auf die ursprüngliche geometrische Bedeutung des Längen-Begriffes zurück, so erscheint derselbe, auch wenn es sich um krumme Linien handelt, immerhin als etwas in unserer Vorstellung a priori vollständig vorhandenes, von jeder Grenz-Vorstellung durchaus unabhängiges: man stellt sich eben unter der Länge eines (eigentlichen) Curvenbogens diejenige geradlinige Strecke vor, in welche er durch Biegung oder Abwickelung übergeführt werden kann. Und die Einführung jenes analytischen Längen-Begriffes erscheint lediglich als ein der empirischen Anschauung angepasstes Hülfsmittel zur numerischen Berechnung der geometrischen Länge.

Bei dieser geometrischen Auffassung des Längen-Begriffes wird dann aber der fragliche Vergleich mit dem „irrationalen Unendlich" erst vollends unverständlich.

Halten wir uns nun schliesslich an die scheinbare Analogie des „irrationalen Unendlich" mit der gewöhnlichen

Irrationalzahl, so führt eine genauere Betrachtung des wahren Sachverhalts zu dem Ergebnisse, dass auch hier ein brauchbares tertium comparationis in Wahrheit nicht vorhanden ist. Bei der Einführung der Irrationalzahlen handelt es sich darum, die Lücken[1]) einer unstetigen linearen Mannigfaltigkeit durch Schöpfung einer neuen Zahl-Classe auszufüllen. Und die Schöpfung dieser neuen Zahl-Classe erweist sich als durchführbar, da sich die erforderlichen Eigenschaften ihrer Individuen, sowie deren Beziehungen zu einander und zu den bereits vorhandenen (rationalen) Zahlen eindeutig und widerspruchslos definiren lassen. Im vorliegenden Falle ist dagegen von vornherein eine unendlich-vieldimensionale stetige Mannigfaltigkeit vorhanden, und man erkennt weder das Bedürfniss, noch die Möglichkeit, dieselbe durch Einschaltung neu zu schaffender Individuen noch zu „verdichten." Diese Möglichkeit erscheint aber geradezu ausgeschlossen, da der Versuch, jenes „irrationale Unendlich" zu definiren, wie gezeigt wurde, auf logische Widersprüche führt.

Im übrigen ist der tiefere Grund dieses ganzen Du Bois Reymond'schen Irrthums, wie ich schon in meiner ersten Mittheilung hervorhob[2]) und wie seine „Allgemeine Functionentheorie" beweist, darin zu suchen, dass Du Bois Reymond überhaupt zu keiner mathematisch befriedigenden Auffassung des allgemeinen Zahlbegriffes gelangt ist.

Auch wenn man, wie Du Bois Reymond, die (positiven) Zahlen als Zeichen für bestimmte Quantitäten ansieht, so sind sie doch, geradeso wie die Heine-Cantor'schen rein formalen Zahlen, in erster Linie **Zeichen**, deren Beziehungen und Verknüpfungs-Regeln eindeutig und widerspruchslos definirt werden müssen. Es scheint mir für die Begründung der Lehre von den Irrationalzahlen (im Du Bois Reymond'schen Sinne) ziemlich gleichgültig zu sein,

---

[1]) Genauer gesagt: „Schnitte" = „Lücken zweiter Art" — cf. Stolz, Allg. Arithmetik, Bd. I, S. 81.

[2]) a. a. O. S. 606, Fussnote.

ob man die Existenz „linearer" Grenzwerthe und hierdurch definirter irrationaler Quantitäten mit dem Du Bois Reymond'schen „Empiristen" lediglich als eine durch unsere Anschauung näherungsweise bestätigte Fiction oder, mehr idealistisch,[1]) als ein Axiom ansieht. Die Berechtigung, die diesen „irrationalen Quantitäten" zuzuordnenden Zeichen als **Zahlen** in die Arithmetik einzuführen, beruht doch schliesslich einzig und allein auf der Möglichkeit, die Rechnungs-Operationen für diese neuen Zeichen auf Grund der für rationale Zahlen geltenden Rechnungsregeln formal zu definiren.[2]) Die Auffassung der Zahlen als Quantitäts-Zeichen versagt nun aber vollständig bezüglich der negativen Zahlen, ohne deren Anwendung die allgemeine Arithmetik[3]) sich bisher nicht behelfen konnte und wohl schwerlich auch in Zukunft sich behelfen wird.

---

[1]) Ich sage ausdrücklich nicht: im Sinne des Du Bois Reymond'schen „Idealisten." Denn dieser betrachtet die Existenz des Grenzwerthes als eine beweisbare Thatsache. Dass dieser Beweis misslingt, ist selbstverständlich und wird auch von Du Bois Reymond hervorgehoben. Im übrigen wäre es wohl, um dieses negative Resultat zu erreichen, kaum nothwendig gewesen, jenem Idealisten, der keineswegs als abschreckendes Beispiel eines philosophirenden Schwätzers, sondern als ein durchaus ernst zu nehmender Mathematiker eingeführt wird (Allg. Funct.-Theorie, S. 12 und 152), vollkommene Absurditäten, wie die folgende, in den Mund zu legen: *„Die Anzahl sämmtlicher Zahlen ist unendlich. Die Anzahlen werden gemessen durch die ganzen Zahlen: also (!) giebt es unendlich viele ganze Zahlen"* (a. a. O. S. 77). Dagegen *„giebt es der rationalen Zahlen eine unbegrenzt grosse und keine unendliche Menge"* (S. 79).

[2]) vgl. z. B. Illigens, Zur Definition der Irrationalzahlen. Math. Ann. Bd. 35, S. 454. Der Standpunkt des Herrn Illigens bezüglich der Einführung der Irrationalzahlen deckt sich im übrigen genau mit dem oben charakterisirten des „Empiristen," und Herr Illigens befindet sich in einem principiellen Irrthume, wenn er meint, seine Definitionsweise der Irrationalzahlen sei eine rein arithmetische. Rein arithmetische Quantitäten sind eine leere Redensart, und auch die blosse „Fiction" irrationaler Quantitäten ist untrennbar mit der Vorstellung einer stetigen „linearen" Grösse verknüpft.

[3]) Ich verstehe unter allgemeiner Arithmetik die Zahlen-

Die Begriffe „grösser" und „kleiner" drücken bei der Uebertragung auf negative Zahlen nicht mehr Quantitäts-Unterschiede, sondern lediglich eine bestimmte Succession

---

lehre im weitesten Sinne, insbesondere also auch die Algebra und Analysis (Functionen-Theorie), keineswegs also jenen speciellen Begriff, den Kronecker (Journal für Math. Bd. 100, S. 491) damit verbindet (nämlich: „die arithmetische Theorie ganzer Grössen eines beliebigen natürlichen Rationalitätsbereichs") und den er bei anderer Gelegenheit als eigentliche Arithmetik bezeichnet (Journal f. Math. Bd. 101, S. 345). Wenn also Kronecker an der zuzuletzt erwähnten Stelle die Bemerkung macht, man könne aus der eigentlichen Arithmetik „alle ihr fremden Begriffe, den der negativen, der gebrochenen und der algebraischen Zahlen ausscheiden," so wird die im Texte gemachte Aussage hierdurch zunächst in keiner Weise getroffen. Im übrigen besteht doch diese angebliche „Ausscheidung" der negativen und der gebrochenen Zahlen lediglich in einer ebenso scharfsinnigen, wie unbequemen Umschreibung der betreffenden Zahlbegriffe, durch welche deren Gebrauch, bezw. derjenige der entsprechenden Zahlzeichen auch für die eigentliche Arithmetik keineswegs entbehrlich wird. Und dass Kronecker selbst sie nicht entbehren konnte, zeigt auf's deutlichste die nun unmittelbar folgende „Ausscheidung" der algebraischen Zahlen (a. a. O. S. 347 ff.). Darnach besagt die „sogenannte" Existenz algebraischer Zahlen nichts anderes, als dass eine ganze ganzzahlige Function innerhalb gewisser, arithmetisch definirbarer, von zwei gebrochenen Rationalzahlen begrenzter Intervalle ihr Vorzeichen wechsele. Man versuche nur einmal, diesen Satz zunächst so zu formuliren und darauf auch so zu beweisen, dass die Begriffe der gebrochenen und der negativen Zahlen nach dem Kronecker'schen Verfahren vollständig „ausgeschieden" werden! Wenn nun aber Kronecker in diesem Aufsatze „Ueber den Zahlbegriff" sogar so weit geht, es für möglich und einzig erstrebenswerth zu halten, dass auch die Arithmetik im weitesten Sinne alle „Modificationen und Erweiterungen des Zahlbegriffes (ausser demjenigen der natürlichen Zahl) wieder abstreife" (a. a. O. S. 339), und wenn er darin die wahre „Arithmetisirung" der betreffenden Disciplinen erblickt, so fehlt mir hierfür jedes Verständniss.

Nach meinem Dafürhalten besteht doch gerade das Wesen der arithmetischen Disciplinen darin, dass sie es ermöglichen, ganze Gedankenreihen, selbst solche von äusserst verwickelter Natur, durch eine verhältnissmässig geringe Anzahl bestimmter Begriffsin der geordneten Zahlenreihe aus. Die Multiplication negativer Zahlen kann garnicht anders als rein formal[1]) auf Grund des Princips der Permanenz formaler Gesetze erklärt

---

zeichen darzustellen. Eine Beseitigung der als Frucht der Geistesarbeit von Generationen mühsam erworbenen und erprobten Begriffe und Zeichen würde nach meiner Ansicht nicht einer „Arithmetisirung," sondern einer völligen Vernichtung jener Disciplinen gleichkommen. Nicht darin, dass man die negativen, gebrochenen und irrationalen Zahlen wieder „abstreift," sondern dass man aus ihren Definitionen alle fremdartigen, insbesondere geometrischen Vorstellungen ausscheidet, scheint mir das wünschenswerthe Maass von „Arithmetisirung" zu liegen. Und dieses Ziel dürfte insbesondere durch die Bemühungen von Weierstrass, Cantor und Dedekind vollständig erreicht worden sein.

[1]) Auf der anderen Seite entbehrt die von Du Bois Reymond zur Bekämpfung der formalen Auffassungsweise des Zahlbegriffes vorgebrachte Behauptung (a. a. O. S. 51):

> „*Wie sehr der Formalismus bei den elementarsten arithmetischen Operationen uns im Stiche lässt, zeigt u. A. das Beispiel der Bruchmultiplikation*"

jeder Spur von Berechtigung. Aus den definirenden Gleichungen:

$$b \cdot \left(\frac{a}{b}\right) = a, \quad b' \cdot \left(\frac{a'}{b'}\right) = a'$$

folgt nämlich zunächst:

$$\left\{b \cdot \left(\frac{a}{b}\right)\right\} \cdot \left\{b' \cdot \left(\frac{a'}{b'}\right)\right\} = a\,a',$$

und daher, wenn der commutative und associative Charakter des Productes erhalten bleiben soll:

$$b\,b' \cdot \left\{\left(\frac{a}{b}\right) \cdot \left(\frac{a'}{b'}\right)\right\} = a\,a'.$$

Da andererseits die Definitions-Gleichung besteht:

$$b\,b' \cdot \left(\frac{a\,a'}{b\,b'}\right) = a\,a',$$

so ergiebt sich schliesslich:

$$\left(\frac{a}{b}\right) \cdot \left(\frac{a'}{b'}\right) = \left(\frac{a\,a'}{b\,b'}\right).$$

Die obige Behauptung Du Bois Reymond's erscheint mir hiernach einfach unverständlich.

werden, u. s. f. Kurzum: die negativen Zahlen sind rein formale Zahlen, sie sind blosse Zeichen, welche zu den Zeichen der positiven Zahlen und unter einander in bestimmt definirten Beziehungen stehen.

Nun pflegen doch in arithmetischen Formeln positive und negative Zahlen als völlig gleichberechtigt neben einander aufzutreten; ja ein und dasselbe Zeichen kann zumeist ganz nach Belieben eine positive oder negative Zahl vorstellen. Wie man in einer solchen arithmetischen Formel noch eigentliche Quantitätszeichen und blosse Formalzahlen auseinanderhalten will, scheint mir völlig unerfindlich. Und, was Du Bois Reymond lediglich als eine Art Gewöhnung hinstellt (a. a. O. S. 50) nämlich:

> *„dass, wenn wir in eine numerische Ausrechnung oder in eine algebraische Untersuchung vertieft sind, es uns nicht einfällt, unter unseren Zahlen oder Buchstaben, welche unbestimmt gelassene Zahlen bedeuten, wirkliche Grössen beständig uns vorzustellen"* —

das ist in Wahrheit eine absolute und zwingende Nothwendigkeit. Soll also eine solche arithmetische Formel etwas besseres vorstellen, als die graphische Fixirung einer heillosen Begriffsverwirrung, so ist man schon in dem aller-elementarsten Stadium der Arithmetik (nämlich bei und nach der Einführung der ganzen negativen Zahlen) gezwungen, die Auffassung der Zahlen als Quantitätszeichen vollständig fallen zu lassen. In wieweit man bei der Einführung der positiven Zahlen (auch der gebrochenen und irrationalen) aus historischen und didaktischen Rücksichten den Quantitäts-Begriff zu Grunde legen will, ist schliesslich Geschmacks- und Ansichtssache. Eine einheitliche Auffassung der arithmetischen Operationen und ein consequenter Aufbau der allgemeinen Arithmetik ist aber auf diesem Wege nimmer zu erzielen.

Will man hierzu gelangen, so dürfte es am einfachsten erscheinen, schon die positiven ganzen Zahlen nicht als Quantitätszeichen zu definiren, sondern, nach dem Vorgange von Helmholtz[1]) und Kronecker[2]) an den Begriff der Ordnungszahlen anknüpfend, als Zeichen, denen lediglich eine bestimmte Succession zukommt. Diese mit einem bestimmten Zeichen beginnende und unbegrenzt fortsetzbare Zeichen-Folge lässt sich dann auf Grund der für sie definirbaren Rechnungs-Operationen durch Einführung der Null, der negativen, gebrochenen und irrationalen[3]) Zahlen zu einem Zeichen-System ausgestalten, welches im Cantor'schen Sinne eine zweifach unbegrenzte, lineare, stetige Mannigfaltigkeit bildet. Es bietet alsdann keinerlei Schwierigkeit, a posteriori festzustellen, in wieweit die Individuen dieses Zeichen-Systems geeignet sind bestimmte Quantitäten (z. B. Anzahlen discreter Vielheiten, Längen) oder andere Objecte (z. B. Punkte, Strecken der Länge und Richtung nach) vorzustellen, und in welcher Weise die zwischen ihnen möglichen Beziehungen dazu dienen können, die Beziehungen solcher Objecte abzubilden.

Da Du Bois Reymond diese von ihm etwas geringschätzig als „literaler Formalismus" bezeichnete Auffassung der Arithmetik principiell verwirft und ihr nur allenfalls für praktische Lehrzwecke eine gewisse Berechtigung zuerkennen will,[4]) so scheint er garnicht bemerkt zu haben, dass sein ganzer Infinitär-Calcül durchaus auf einem solchen literalen Formalismus beruht, mit anderen Worten, dass dabei garnicht Quantitäts-Vergleichungen, sondern, wie in Art. 1 des näheren erörtert wurde, lediglich — bis zu einem gewissen Grade willkürlich definirte — Successionen in Frage kommen. Und er findet auf Grund seiner „einge-

---

[1]) „Zählen und Messen, erkenntnisstheoretisch betrachtet," Ges. Abh. Bd. III, S. 360.

[2]) In dem schon oben citirten Aufsatze: „Ueber den Zahlbegriff." A. a. O. S. 339.

[3]) Am einfachsten wohl nach Cantor (s. Heine, die Elemente der Functionenlehre. Journ. f. Math. Bd. 74, S. 174 ff. Cantor, Math. Ann. Bd. 5, S. 123 ff. Bd. 21, S. 567 ff.).

[4]) a. a. O. S. 55.

wurzelten Grössenvorstellungen" da „Paradoxen", wo in Wahrheit nur eine unzulässige Anwendung von Quantitäts-Vortellungen vorliegt.

4.

Ich möchte bei dieser Gelegenheit noch einen anderen Punkt besprechen, welcher gleichfalls geeignet ist, die Unklarheit der Du Bois Reymond'schen Grenz-Vorstellungen in Evidenz zu setzen. Auf S. 165 seiner Allgemeinen Functionentheorie heisst es im Hinblick auf das sogenannte „allgemeine Convergenz- und Divergenz-Princip":[1]) *„So wenig Beachtung war ihm geschenkt worden, dass ich 1871 einen besonderen Fall des Princips (dass eine Reihe $u_1 + u_2 +$ etc. convergirt, wenn der Cauchy'sche Ausschnitt $u_m + u_{m+1} + \ldots + u_n$ bei in's Unbegrenzte zunehmenden m und n stets die Grenze Null hat) für eines Beweises bedürftig erklären musste."*[2])

Hierzu will ich zunächst historisch bemerken, dass die fragliche Cauchy'sche Formulirung der Convergenz-Bedingung sich in den Exercices de Mathématiques, T. II, p. 221 vorfindet, und auch anderen Reihen-Theoretikern bereits Anlass zu kritischen Erörterungen gegeben hat. Sie lautet, wenn $u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1} = s_n$ gesetzt wird, in der Originalfassung: „Pour que la série soit convergente, il est nécessaire, et il suffit que la différence

$$s_{n+m} - s_n = u_n + u_{n+1} + \ldots + u_{n+m-1}$$

devienne infiniment petite, quand on attribue au nombre n une valeur infiniment grande, quel que soit d'ailleurs le nombre entier représenté par m."[3]) Dabei ist der auf die Zahl m bezügliche Zusatz so zu verstehen, dass

---

[1]) Darunter versteht Du Bois Reymond das bekannte Kriterium für die Existenz bezw. Nicht-Existenz eines bestimmten Grenzwerthes; cf. Allg. Funct.-Th. S. 6.

[2]) Dabei wird auf S. 2 des Antrittsprogramms: „Neue Lehrsätze über die Summen unendlicher Reihen" (Freiburg 1871) verwiesen.

[3]) Aehnlich übrigens bei Abel: Crelle's Journal, Bd. 1, S. 313. (1826).

m sowohl eine bestimmte, d. h. bei wachsendem n constante, beliebig gross anzunehmende Zahl vorstellen oder auch gleichzeitig mit n und zwar in ganz beliebiger Weise in's Unendliche wachsend gedacht werden kann.[1]) Dies geht freilich aus der von Cauchy gewählten Fassung allein nicht mit genügender Deutlichkeit hervor. Es folgt aber mit absoluter Sicherheit aus der Art und Weise, wie Cauchy auf den unmittelbar folgenden Seiten der betreffenden Abhandlung „Sur la convergence des séries" jene Convergenz-Bedingung anwendet. So erschliesst er aus derselben die Divergenz von $\sum\frac{1}{n}$, weil hier der fragliche $\lim\limits_{n=\infty}(s_{n+m} - s_n)$ zwar für jedes noch so grosse endliche m verschwindet, dagegen unendlich gross wird, wenn m so unendlich wird, wie n oder ein endliches Multiplum von n (a. a. O. S. 225). Und er folgert ferner die Divergenz von $\sum\frac{1}{n\lg n}$ daraus, dass jener Grenzwerth, der noch verschwindet, wenn m so wie n in's Unendliche wächst, unendlich ausfällt, wenn $m = n(n+1)$ oder $n(n+1)^2$ etc.[2])

Lediglich der Nicht-Beachtung dieser den eigentlichen Sinn der Cauchy'schen Convergenz-Bedingung unzweideutig fixirenden Ausführungen ist es zuzuschreiben, dass Catalan in seinem „Traité élémentaire des séries" (Paris 1860) dieselbe schlechthin für falsch erklärt.[3]) Dabei versteht er jene Bedingung zunächst in der Weise, dass m lediglich jede

[1]) Es genügt sogar, ausschliesslich solche Werthe m in's Auge zu fassen, welche gleichzeitig mit n in beliebiger Weise unendlich werden — vgl. den Schluss dieses Artikels.

[2]) Beiläufig bemerkt wird wohl das auf die Reihe $\sum\frac{1}{n\lg n}$ bezügliche Resultat gewöhnlich Abel zugeschrieben. Die betreffende Mittheilung Abel's: Note sur le mémoire de Mr. Olivier: „Remarques sur les séries infinies etc." (Crelle's Journal, Bd. 3, S. 74) ist aber um ein Jahr später erschienen (1828), als der citirte Band der Exercices.

[3]) a. a. O. S. 4, Fussnote.

noch so grosse bestimmte Zahl bedeuten soll, und fügt hinzu, dass sie selbst dann nicht richtig ist, wenn man auch unendlich grosse Werthe von m zulässt. Da er sich aber hierbei ausdrücklich auf das Beispiel der Reihe $\sum \frac{1}{n \lg n}$ beruft,[1]) so geht daraus mit vollster Sicherheit hervor, dass er jene Cauchy'sche Abhandlung garnicht gelesen haben kann und aus diesem Grunde den Sinn der obigen Bedingung missverstanden hat.

Laurent in seiner „Théorie des séries" (Paris 1862) erwähnt (S. 6), dass Catalan jene Bedingung für unzureichend erklärt habe, und fährt dann fort: „Sans oser partager son opinion, je laisserai de côté ce théorème, qui n'est nullement indispensable dans la théorie des séries." Im übrigen steht er, wie einige weitere theils nichtssagende, theils geradezu falsche Bemerkungen beweisen, dieser Frage doch völlig rathlos gegenüber und findet sich damit schliesslich sehr einfach in der Weise ab, dass er sagt: „Marchons droit à notre but et tournons l'obstacle, qu'il serait trop difficile de renverser."

Wie weiter unten gezeigt werden soll, steht die Richtigkeit der Cauchy'schen Bedingung, wenn man nur ihren Inhalt von vornherein richtig auffasst, ausser Zweifel. Du Bois Reymond giebt derselben in dem oben citirten „Antrittsprogramm" (S. 1) die folgende Form:

> *U ist endlich und bestimmt oder U ist es nicht, jenachdem die Summe*
>
> $$u_m + u_{m+1} + \ldots + u_n$$
>
> *Null zur Grenze hat oder nicht, wenn m und n mit irgend welcher relativen Geschwindigkeit unendlich werden.* (Dabei ist: $U = \lim\limits_{n=\infty} U_n$ und: $U_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$).

Nachdem dann kurz erwähnt ist, dass der auf die Diver-

---

1) a. a. O. S. 6.

genz von $\sum u_\nu$ bezügliche Theil dieser Aussage leicht erwiesen werden kann, heisst es weiter:

„*Nicht so leicht ist zu beweisen, dass, wenn* $u_m + u_{m+1} + \ldots + u_n$ *für* $m = \infty$, $n = \infty$ *stets verschwindet,* U *nicht auch unbestimmt oder unendlich werden könne. Wiewohl man das vorstehende Princip öfters anwendet, ist mir ein strenger Beweis dafür nicht bekannt, und ich werde es hier voraussetzen, diesen Beweis aber, der mir ohne den Begriff des bestimmten Integrals nicht scheint geführt werden zu können, an einer anderen Stelle nachtragen.*“

Dabei wird auf eine „demnächst zu veröffentlichende“ Schrift: Die Theorie der Convergenz und Divergenz bestimmter Integrale und unendlicher Reihen — hingewiesen.

Diese Schrift, welche Du Bois Reymond auch noch an einer anderen Stelle[1]) als demnächst bei B. G. Teubner erscheinend citirt, ist meines Wissens niemals erschienen: aus welchen Gründen, ist mir unbekannt. Aber auch anderwärts scheint der in Rede stehende Beweis nicht publicirt worden zu sein. Immerhin wäre ja in dieser Beziehung ein Irrthum von meiner Seite nicht ausgeschlossen, und ich bin sogar sehr geneigt, an einen solchen zu glauben, da kaum anzunehmen ist, dass ein Mathematiker, der einen für unbewiesen erkannten und für nicht leicht beweisbar erklärten Satz benützt und den Beweis dafür in Aussicht stellt, ganze 11 Jahre später sich ausdrücklich dieser That rühmen sollte, ohne den versprochenen Beweis nachgeliefert zu haben.

Im übrigen genügt die oben citirte, auf die Form dieses Beweises bezügliche Andeutung vollständig, um zu erkennen, dass Du Bois Reymond den eigentlichen Kern der vorliegenden Frage völlig missverstanden hat. Gewiss kann es in manchen Fällen bequemer erscheinen, Eigenschaften unendlicher Reihen als specielle Fälle von Integral-Eigenschaften abzuleiten; ja bei Reihen-Sätzen complicirter Natur kann

[1]) Annal. di Mat. S. II, T. IV, p. 338, Fussnote.

dieser Weg möglicherweise als der einzig brauchbare gelten, da die Einführung des Continuitäts- und Infinitesimalbegriffes die Anwendung eines übersichtlichen und wunderbar wirksamen Algorithmus gestattet, für welchen bei der Beschränkung auf discontinuirliche Mannigfaltigkeiten kein Ersatz vorhanden ist. Hier aber handelt es sich lediglich um die principielle Begründung eines einfachen, auf die Existenz des Grenzwerthes einer abzählbaren Menge bezüglichen Fundamental-Satzes. Und wenn jemand behauptet, dieser Satz lasse sich nur durch Anwendung des bestimmten Integrals begründen, so begeht er damit einen schweren logischen Fehler[1]) und zeigt nach meiner Ansicht unwiderleglich, dass er von vornherein mit falschen Grenz-Vorstellungen arbeitet. Um diese meine Ansicht vollends zu rechtfertigen, wird es schliesslich nur noch nöthig erscheinen, den sehr einfachen Beweis des fraglichen Satzes hier wirklich folgen zu lassen.

Bevor ich hierzu übergehe, erscheint es mir zweckmässig, zunächst den Unterschied zwischen der Cauchy'schen Formulirung der Convergenz-Bedingung und der sonst üblichen deutlich hervorzuheben. Diese letztere lautet mit Benützung der oben von Du Bois Reymond angewendeten Bezeichnungen folgendermaassen:

---

[1]) Denselben logischen Fehler begeht übrigens Du Bois Reymond an einer auf die besprochene unmittelbar folgenden Stelle (a. a. O. S. 2, Satz 3); auch: Zur Geschichte der trigonometrischen Reihen, S. 58, Fussnote), indem er die Beziehung:

$$u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n$$
$$= v_1 (u_1 + u_2 + \dots + u_r + \vartheta u_{r+1}) + v_n ((1 - \vartheta) u_{r+1} + u_{r+2} + \dots +_n)$$

als eine Folge „seines" Integral-Mittelwerthsatzes hinstellt. Dieselbe ist vielmehr eine ganz direkte Consequenz des bekannten Abel'schen Lemma's (Journ. f. Math. Bd. 1, S. 314) und steht zu dessen gewöhnlicher Form genau in demselben Verhältniss, wie die Du Bois Reymond'sche Form des Mittelwerthsatzes zu der von Bonnet aufgefundenen Fundamentalform, welche keineswegs, wie Du Bois Reymond prätendirt, lediglich einen besonderen Fall „seines" Mittelwerthsatzes darstellt (Zur Gesch. d. trig. R. S. 58).

Für die Convergenz der Reihe $\sum u_\nu$ ist nothwendig und hinreichend, dass:

$$(1) \qquad | U_{m_0+\varrho} - U_{m_0} | < \varepsilon \quad \text{für:} \quad \varrho = 0, 1, 2, \ldots$$

d. h. jeder (beliebig kleinen) Zahl $\varepsilon > 0$ muss sich eine ganze Zahl m_0 so zuordnen lassen, dass Ungl. (1) für jeden ganzzahligen Werth von ϱ besteht.

Die Richtigkeit dieser Aussage bedarf keines Beweises, dieselbe deckt sich in Wahrheit vollständig mit der Definition der Convergenz, d. h. der Existenz eines bestimmten Grenzwerthes $\lim\limits_{n=\infty} U_n$. Denn die Ungleichung (1) enthält geradezu die Definition der Grenzwerth-Existenz im Cantor'schen Sinne, die nothwendige und hinreichende Bedingung derselben (das „allgemeine Convergenz-Princip") im Du Bois Reymond'schen Sinne.

Bedeuten dann m, n zwei beliebige ganze Zahlen $\geqq m_0$, so hat man nach (1):

$$| U_m - U_{m_0} | < \varepsilon, \quad | U_n - U_{m_0} | < \varepsilon$$

und daher:

$$(2) \qquad | U_n - U_m | < 2\varepsilon \quad \text{für:} \begin{cases} m \geqq m_0 \\ n \geqq m_0 \end{cases}.$$

Alsdann wird aber allemal:

$$(3) \qquad \lim_{m=\infty,\, n=\infty} | U_n - U_m | = 0,$$

ohne dass über die Art des Grenzüberganges von m und n irgendwelche besondere Fortsetzung getroffen zu werden braucht.

Also: Aus der üblichen Form (1) der Convergenz-Bedingung lässt sich stets die Existenz der Cauchy'schen Bedingung herleiten.

Aber auch das Umgekehrte kann ebenso einfach gezeigt werden. Angenommen nämlich es bestehe die Cauchy'sche Bedingung (3) in dem von Du Bois Reymond festgesetzten Sinne d. h. mit der Einschränkung $n \geqq m$, oder, um mich ganz genau der Du Bois Reymond'schen Bezeichnungsweise anzuschliessen, es bestehe die Beziehung:

$$\lim_{m=\infty,\, n=\infty} (u_m + u_{m+1} + \ldots + u_n) = 0, \tag{4}$$

wenn m und n mit irgend welcher relativen Geschwindigkeit unendlich werden, so setze man $n = m + p$, wo $p \geqq 0$ wegen $n \geqq m$. Alsdann folgt aus (4), dass:

$$\lim_{m=\infty} (u_m + u_{m+1} + \ldots + u_{m+p}) = 0, \tag{5}$$

gleichgültig ob p als constant oder gleichzeitig mit m in's Unendliche wachsend angenommen wird. Die Bedingung (5) zerfällt also in Wahrheit in die folgenden zwei Bedingungen:

$$\lim_{m=\infty} (u_m + u_{m+1} + \ldots + u_{m+p}) = 0 \tag{5a}$$

für jedes einzelne $p = 0, 1, 2, \ldots,$ und:

$$\lim_{m=\infty,\, p=\infty} (u_m + u_{m+1} + \ldots + u_{m+p}) = 0. \tag{5b}$$

Die Bedingung (5a) würde selbstverständlich für die Convergenz von $\sum u_\nu$ nicht genügen (sie ist nämlich allemal schon erfüllt, wenn nur $\lim\limits_{m=\infty} u_m = 0$).

Dagegen lässt sich zeigen, dass die Convergenz der Reihe schon aus der Bedingung (5b) allein folgt. Mit anderen Worten: Die Cauchy'sche Bedingung ist für die Convergenz der Reihe nicht nur hinreichend, sondern sie lässt sich sogar von vornherein noch durch eine formal etwas weniger verlangende ersetzen.[1])

---

[1]) Gerade um dies deutlich zu machen, habe ich den vorliegenden etwas umständlicheren Weg eingeschlagen. Andernfalls könnte man auf Grund der Definition des Grenzwerthes einer zweifach-unendlichen Zahlenfolge (s. z. B. meinen Aufsatz über Unendliche Doppelreihen, Sitz.-B. S. 103) aus Ungl. (3) ohne weiteres schliessen, dass:

$$|U_n - U_m| < \varepsilon$$

Die Gl. (5b) besagt nämlich: Jeder Zahl $\varepsilon > 0$ lassen sich zwei ganze Zahlen m_0, p_0 so zuordnen, dass:

$$|u_m + u_{m+1} + \ldots + u_{m+p}| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für: } m \geqq m_0,\ p \geqq p_0.$$

Alsdann wird aber:

$$|u_{m_0} + u_{m_0+1} + \ldots + u_{m_0+p_0+\varrho}| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für: } \varrho = 0, 1, 2, \ldots,$$

also speciell:

$$|u_{m_0} + u_{m_0+1} + \ldots + u_{m_0+p_0}| < \frac{\varepsilon}{2}$$

und daher durch Substraction:

$$|u_{m_0+p_0+1} + \ldots + u_{m_0+p_0+\varrho}| < \varepsilon \quad \text{für: } \varrho = 1, 2, 3, \ldots$$

oder, wenn man noch $m_0 + p_0 = n_0$ setzt:

(6) $$|u_{n_0+1} + \ldots + u_{n_0+\varrho}| = |U_{n_0+\varrho} - U_{n_0}| < \varepsilon \quad \text{für: } \varrho = 1, 2, 3, \ldots,$$

womit nach Ungl. (1) die Convergenz der betreffenden Reihe erwiesen ist.

---

etwa für $m \geqq m'$, $n \geqq n'$, und daher wenn m_0 die grössere der beiden Zahlen m', n' bedeutet:

$$|U_n - U_{m_0}| < \varepsilon \quad \text{für: } n \geqq m_0,$$

eine Ungleichung, deren Inhalt genau mit demjenigen der Convergenz-Bedingung (1) übereinstimmt.

Nimmt man jetzt $|x| > 1$, so wird, da die $f_\nu(y)$ durchweg positiv sind:

$$(21) \qquad S(x, y) > S(1, y) \text{ d. h. } > 1,$$

und man erkennt somit durch Vergleichung der Resultate (20), (21) mit Gl. (18), dass $S(x, y)$ an der Stelle $y = 0$ unstetig ist, sobald man x einen beliebigen Werth $\geqq 1$ bezw. $\leqq -1$ beilegt.

Für $|x| < 1$ bleibt, beiläufig bemerkt, die Gleichmässigkeit der Convergenz und somit die Stetigkeit der Reihensumme $S(x, y)$ auch an der Stelle $y = 0$ erhalten. Denn die $f_\nu(y)$ bleiben für jeden Werth von ν und y numerisch kleiner als 1, es tritt also hier der oben ausgesprochene, modificirte Abel'sche Satz ohne weiteres in Kraft.

Nachtrag zu dem Aufsatze:
„Ueber die Du Bois Reymond'sche Convergenz-Grenze etc.“

S.-B. p. 303—334.

Um bezüglich der auf S. 332 gemachten Bemerkung, dass die Bedingung:

$$(1) \qquad U_{m+\varrho} - U_m < \varepsilon \quad (\varrho = 0, 1, 2, \ldots.)$$

stets die Existenz eines bestimmten Grenzwerthes $\lim\limits_{n=\infty} U_n$ involvire, jedes Missverständniss auszuschliessen, möchte ich zu dem dort gesagten noch folgendes hinzufügen.

Nur, wenn man die Cantor'sche Definition der Irrationalzahlen acceptirt, enthält die Bedingung (1) geradezu die Definition der Grenzwerth-Existenz und zwar in folgendem Sinne: Auf Grund von Ungl. (1) definirt die Folge der U_ν eine bestimmte Zahl U, mit welcher nach bestimmten Vorschriften gerechnet werden kann, sodass also insbesondere auch $|U - A|$ eine wohldefinirte Zahl vorstellt, gleichgültig ob A eine rationale Zahl oder eine solche vom Charakter U bedeutet. Da nun, wie leicht zu sehen:

(2) $|U - U_\nu|$ beliebig klein wird, etwa für $\nu \geqq n$,

so nennt man U auch den Grenzwerth der U_ν, in Zeichen:

$$U = \lim_{n=\infty} U_n.$$

Legt man dagegen irgend eine andere Definition der Irrationalzahlen zu Grunde, so bildet, wie ich es auf S. 332 ausdrückte, die Ungl. (1) lediglich die nothwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz eines bestimmten Grenzwerthes, d. h. einer bestimmten Zahl U, welche der Bedingung (2) genügt. Das ist so zu verstehen, dass in diesem Falle die Existenz der Ungleichung (2) erst bewiesen werden muss, aber auch wirklich bewiesen werden kann. Dabei wird natürlich der betreffende Beweis je nach der gewählten Definitions-Form der Irrationalzahlen zu modificiren sein.

Den ersten correcten Beweis auf Grund seiner eigenen Definition hat Herr Dedekind am Schlusse seiner Schrift „Stetigkeit und irrationale Zahlen" (1872) publicirt.[1]) Herr Dini hat demselben eine etwas leichter fassliche Form gegeben.

Demnächst hat Herr Stolz, gelegentlich der Besprechung eines unzulänglichen Beweises von Bolzano, einen anderen, auf der Existenz der „Unbestimmtheits-Grenzen" beruhenden Beweis geliefert.[2]) Derselbe ist naturgemäss merklich einfacher und kürzer: nur muss man sich darüber klar sein, dass hierbei der Schwerpunkt des fraglichen Beweises in Wahrheit lediglich in den Nachweis für die Existenz der Unbestimmt-

---

[1]) Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali (1878), p. 27, Art. 22 — mit dem unwesentlichen Unterschiede, dass es sich dort um den allgemeineren Fall einer beliebigen (d. h. nicht nothwendig abzählbaren) Zahlenmenge handelt. Dieser Beweis ist auch in die deutsche Ausgabe (S. 33, § 22) aufgenommen, obschon er dort wegen des veränderten Ausgangspunktes (Annahme der Cantor'schen Definition) in der Hauptsache überflüssig ist.

[2]) B. Bolzano's Bedeutung in der Geschichte der Infinitesimalrechnung. Math. Ann. Bd. XVIII, S. 260 (1881).

heits-Grenzen verlegt ist,[1]) wozu wiederum noch die folgenden zwei Sätze erforderlich sind: 1) Jede Menge endlicher Zahlen besitzt eine bestimmte obere bezw. untere Grenze. 2) Jede monotone Folge endlich bleibender Zahlen besitzt einen bestimmten Grenzwerth. — Der Beweis dieser Sätze hängt dann wiederum wesentlich von der Wahl der Irrationalzahl-Definition ab.

Der Beweis, welchen Du Bois Reymond in seiner Functionen-Theorie[2]) für den in Rede stehenden Satz („das allgemeine Convergenz-Princip") giebt, ist eine einfache Modification des Dini'schen Beweises (der sich, beiläufig bemerkt, in analoger Weise auch leicht für die Weierstrass'sche Definitions-Form der Irrationalzahlen adaptiren lässt).

Herr Tannery, der in seiner Introduction à la théorie des fonctions (1886) zunächst von der Dedekind'schen Definition ausgeht, beweist den fraglichen Satz, indem er zeigt, dass jede Irrationalzahl im Cantor'schen Sinne auch eine solche nach Dedekind ist,[3]) mit anderen Worten, dass jede der Bedingung (1) genügende Zahlenfolge einen Dedekind'schen Schnitt definirt. Dieses letztere Princip liegt auch dem von Herrn C. Jordan in der zweiten Auflage seines Cours d'Analyse (1893) mitgetheilten, sehr präcis gefassten Beweise zu Grunde.[4])

---

1) Vgl. Du Bois Reymond, Antrittsprogramm S. 3. Uebrigens enthält der dort gegebene Beweis wiederum einen für die Unklarheit der Du Bois Reymond'schen Grenz-Vorstellungen charakteristischen Irrthum. Es wird dort behauptet und bewiesen (!), dass U_n für $\lim n = \infty$ die Werthe A, B der beiden Unbest.-Grenzen stets unendlich oft annehmen muss. Diese Behauptung hat aber entweder überhaupt keinen bestimmten Sinn, oder sie kann nur soviel bedeuten, dass U_n für noch so grosse endliche Werthe von n immer wieder einmal die Werthe A und B annimmt (in diesem Sinne dürfte sie auch gemeint sein, wie der vorgebliche Beweis — a. a. O. S. 4 — anzudeuten scheint). Dann ist sie aber offenbar falsch, wie ein einziger Blick auf das Beispiel $U_n = \sin n$ lehrt.

2) S. 260 (1882).

3) a. a. O. Art. 27.

4) a. a. O. Art. 9.

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der Bayerischen Akademie der Wissenschaften München

Jahr/Year: 1897

Band/Volume: 1897

Autor(en)/Author(s): Pringsheim Alfred

Artikel/Article: Ueber die Du Bois Reymond'sche Convergenz-Grenze und eine besondere Form der Convergenz-Bedingung für unendliche Reihen 303-358