Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Classe

der

k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.

Band XXVII. Jahrgang 1897.

München.
Verlag der k. Akademie.
1898.

In Commission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).

Theorie der Aequivalenz von linearen ∞^λ-Schaaren bilinearer Formen.

Von **S. Kantor.**

(*Eingelaufen 3. Juli.*)

Dass nach Herrn Weierstrass die Theorie der Elementartheiler in keiner Weise auf ∞^λ-Schaaren, $\lambda > 1$, ausgedehnt wurde, hat seinen Grund zweifellos darin, dass für $\lambda > 1$ die Zerlegbarkeit der Determinante S_{pq} mangelt. Indessen wird die gegenwärtige Arbeit zeigen, dass sogar eine leichte Umänderung im Ausspruche des Weierstrass'schen Theoremes unerlässlich ist, um daran eine Verallgemeinerung knüpfen zu können.

Von dem Wunsche, die linearen ∞^λ-Systeme von Correlationen im R_r zu erschöpfen, wurde ich zu einer Verallgemeinerung der Theorie der Aequivalenz geführt, von der es mir schwer wird, sie nicht als die einzig mögliche anzusehen. Die Theorie der Weierstrass'schen Elementartheiler tritt in eine neue Beleuchtung und der geometrische Beweis für das Aequivalenztheorem scheint eine paradigmatische Bedeutung zu besitzen, sodass ich mich entschloss, den folgenden, hinreichend deutlichen Auszug meiner Theorie in die Oeffentlichkeit zu bringen.[1])

[1]) Mit der von Gordan begründeten Theorie der Combinanten zunächst und unter höheren Gesichtspunkten mit der Theorie der Formen von l durch unabhängige lineare Substitutionen $H_1 H_2 \ldots H_l$ transformirten Variabelnreihen steht der gegenwärtige Gegenstand, wenn auch nicht meine Behandlungsweise desselben, in engster Verbindung. Cf. auch Frobenius Cr. J. Bd. 86, § 13.

§ 1. Das Problem.

Sind $p_1 P_1 + \ldots + p_{\lambda+1} P_{\lambda+1} \ldots$ 1) und $p_1 P'_1 + \ldots + p'_{\lambda+1} P'_{\lambda+1} \ldots$ 2) zwei Schaaren bilinearer Formen, wo allgemein $P = \Sigma A_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta$, so stellt sich die Algebra die Frage nach den nothwendigen und hinreichenden Bedingungen, damit durch die simultanen und successiven Transformationen $H \ldots x_\alpha = \Sigma h_{\alpha\gamma} u_\gamma \ldots (\alpha, \gamma = 1, \ldots r+1)$ und $K \ldots y_\beta = \Sigma k_{\beta\gamma} v_\gamma \ldots (\beta, \gamma = 1, \ldots r+1)$, durch welche in P entsteht $A'_{\alpha\beta} = \Sigma h_{\delta\beta} k_{\alpha\gamma} A_{\alpha\beta}$, die Schaar 1) in 2) übergeführt werden könne unter der Voraussetzung, dass die $h_{\delta\beta}$, $k_{\alpha\gamma}$ sämmtlich frei von den p sind. Beim Variiren der $A_{\alpha\beta}$ beschreibt P eine lineare Mannigfaltigkeit von $\sigma = (r+1)^2 - 1$ Dimensionen, einen R_σ.[1]) Die durch $H(\cdot)K$ bewirkte Transformation der $A_{\alpha\beta}$ in die $A'_{\alpha\beta}$, welche eine lineare Substitution des R_σ ist, soll Ω heissen. Wegen $|P'| = |H|\,|P|\,|K|$ folgt, dass alle Ω die Mannigfaltigkeit $S = |A_{\alpha\beta}| = 0$ des R_σ in sich transformiren.

§ 2. Eigenschaften von S und Ω.

Ich führe sie ohne Beweise an, die aber unschwer geliefert werden können.

S ist ein Monoid der Ordnung $r+1$. — S besitzt nur continuirliche i-fache Mannigfaltigkeiten, für jedes i von 2 bis r nur eine. Diese Vielfachheiten sollen als $V^{(i)}$ bezeichnet werden. — Jede $V^{(i)}$ ist in der $V^{(i-1)}$ i-fach enthalten. — Geometrisch interpretirt repräsentiren die $V^{(i)}$ $(i = 1, \ldots r)$ die Correlationen des R_r, welche zwei ganz singuläre O_{i-1}, O'_{i-1} in den R_r, R'_r besitzen. — Die $M_{\sigma-1} \equiv S$ besitzt also keine anderen vielfachen Mannigfaltigkeiten als jene, welche die Correlationen mit resp. zwei singulären O_1, O'_1;

[1]) Wird P als Correlation gedeutet, so stellt jeder Punkt des R_σ eine Correlation dar, aber man hüte sich vor der umgekehrten Angabe, dass jede Correlation durch 1) repräsentirt werden könne. Der Begriff der Correlation erscheint also hier nicht als etwas Absolutes, sondern als etwas an die Bestimmungsweise durch 1) Gebundenes. Hievon ist die Auffassung der abzählenden Geometrie (Zeuthen, Schubert) verschieden.

O_2, O_2'; ... O_{r-1}, O_{r-1}' repräsentiren. — Die Mannigfaltigkeit $V^{(i)}$ hat die Dimension $\sigma_i = (r+1)^2 - i^2 - 1$ und ist abbildbar.[1]) Die $V^{(r)}$ enthält zwei getrennte ∞^r-Schaaren von R_r : R_r^x, R_r^y und keine lineare Räume höherer Dimension. Durch jeden Punkt von $V^{(r)}$ gehen zwei R_r.[2]) — Verbindet man irgend zwei R_r^x oder zwei R_r^y durch einen R_{2r+1}, so ist derselbe in der $V^{(r-1)}$ enthalten und $V^{(r-1)}$ enthält keine höheren linearen Räume. — Verbindet man irgend $r-i$ R_r^x (oder R_r^y) der $V^{(r)}$ durch einen $R_{(r-i)(r+1)-1}$, so ist derselbe ganz in der $V^{(i-\lambda)}$ enthalten und $V^{(i-1)}$ enthält keine höheren linearen Räume. — Die Gesammtgruppe der linearen Transformationen im R_σ, welche S invariant lassen, besteht aus zwei getrennten Schaaren; die eine bewahrt die R_r^x, R_r^y-Schaaren, die andere vertauscht sie.[3]) — Eine allgemeinste lineare Transformation der 1. Schaar hat ihre $\sigma+1$ Doppelpunkte in $V^{(r)}$. Denn sie lässt sich zusammensetzen aus zwei Transformationen, von denen die eine jeden R_r^x, die andere jeden R_r^y ungeändert lässt. In einem festen R_r^x entstehen dann $r+1$ Doppelpunkte, sodass $r+1$ invariante R_r^x, $r+1$ R_r^y existiren, welche sich in den

---

1) Es ist weit schwieriger, die Ordnung der $V^{(i)}$ zu berechnen. Hierauf beziehe man einige von Herrn Reye für Polarsysteme im R_3, von Schröter für Flächen 3. O. (das Geradensextupel), von mir für Collineationen im R_3 und R_r bestimmte Anzahlen.

2) Nimmt man in den O_{r-1}, O_{r-1}' zweier Correlationen 4 Coordinatenräume, so werden die Formen $x_1 y_1$, $x_2 y_2$ und es ist nicht jede Correlation der Schaar $x_1 y_1 + \lambda x_2 y_2 = 0$ in $V^{(r)}$ enthalten. Dies findet nur statt, wenn die beiden O_{r-1} oder O_{r-1}' coincidiren; der jedesmalige O_{r-1}' oder O_{r-1} kann dann im ganzen R_{r-1}' oder R_{r-1} variiren, woraus der Inhalt des Theoremes.

3) Die zweite Schaar entspricht auch der Transposition der Variabeln reihen in der bilinearen Form. Herr Weierstrass hat diese Aenderungen von P gewiss mit Absicht unbeachtet gelassen, bei Kronecker deutet eine Bemerkung über „die Zuweisung der beiden Variabelnreihen“ darauf hin. Hier darf er nicht fehlen.

$(r+1)^2 = \sigma + 1$ Doppelpunkten schneiden.[1] — Ersetzt man in einer Determinante $|A_{\alpha\beta}|$ jedes Element durch eine lineare Function aller Elemente der Determinante, so bleibt $|A_{\alpha\beta}|$ nur dann ungeändert, wenn die lineare Substitution die Form hat $A'_{\alpha\beta} = \Sigma h_{\delta\beta} k_{\alpha\gamma} A_{\alpha\beta}$ oder diese combinirt mit $A'_{\alpha\beta} = A_{\beta\alpha}$. — Dieses Theorem sollte auf den ersten Seiten jedes Lehrbuches der Determinanten stehen. — Die linearen Transformationen des R_σ, welche $V^{(r)}$ (also auch S) unter Bewahrung jeder der R^x-, R^y-Schaaren invariant lassen, stimmen genau mit den durch die Weierstrass'schen Transformation $H\,A\,K$ hervorgerufenen Ω überein.

Die $M_{\sigma-1} = S$ hat die Eigenschaft, dass unter den Punkten des R_σ und ihren linearen Polaren nach S eine birationale Verwandtschaft besteht, die von der Ordnung r ist und die $S, V^{(2)}, \ldots V^{(r)}$ als Fundamentalmannigfaltigkeiten besitzt.[2] — Die Hesse'sche Co-

---

[1]) Dies stimmt mit den Correlationen überein. Denn die Composition $P\,A\,Q$ lässt, wenn P allgemein sind, nur $(r+1)^2$ singuläre Correlationen invariant. Nämlich: P in R_r hat $r+1$ Doppelräume D_i, Q in R'_r hat $r+1$ Doppelräume D'_r, die $(r+1)^2$ Correlationen, welche die singulären Axen $D_i\,D'_k$ besitzen, sind die invarianten. — Die Theoreme VII, VIII und besonders IX in § 6 von Herrn Frobenius' so wichtiger Arbeit in Cr. J. Bd. 84 sind also nicht richtig.

[2]) Es sei X'_{ik} die zu X_{ik} in 7) gehörige Unterdeterminante. Dann sind die X'_{ik} homogene Functionen der $(r+1)^2$ Grössen X_{ik}. Dass jedesmal $2r+1$ X_{ik} fehlen, soll uns nicht aufhalten. Ich schreibe $X'_{ik} = f_{ik}(X_{11}, \ldots X_{r+1,\,r+1})$. Dann fasse ich dies als eine eindeutige Transformation der $(r+1)^2$ X_{ik} in die $(r+1)^2$ X'_{ik} auf. Die Coefficienten in den Transformationsformeln sind nun ± 1. Wiederhole ich die Transformation und setze $X''_{ik} = f_{ik}(X'_{11}, \ldots X'_{r+1,\,r+1})$, so heisst das, wie man sieht, nichts anderes, als: ich setze in die f_{ik} selbst wieder die f_{ik} ein; hierauf applicirt sich ein bekannter alter Determinantensatz, wonach $X''_{ik} = S^r \cdot X_{ik}$ wird. Also definiren die Ausdrücke der $(r+1)^2$ Unterdeterminanten in den $(r+1)^2$ Elementen eine involutorische birationale Transformation im R_σ. Hieraus folgt sofort das Theorem des Textes.

variante H von S ist für r ungerade identisch Null[1]) und für r gerade die $S(r-1)$-fach gezählt, $H = S^{r-1}$. — Alle Covarianten der σ-ären Form S verschwinden entweder identisch oder sind eine Potenz von S selbst.[2]) Alle Polaren von S haben die Eigenschaft, dass sie keine variable absolute Invariante mehr besitzen. Aus allem Gesagten ziehe ich die **Conclusion:** Auf der $M_{\sigma-1} = S$ befindet sich ausser den $V^{(2)}, \ldots V^{(r)}$ nichts, was gegen alle linearen Transformationen Ω invariant wäre.

§ 3. Definition der Elementarzahlen für eine ∞^λ-Schaar bilinearer Formen.

Die Schaaren 1) und 2) werden im R_σ durch zwei R_λ, R'_λ repräsentirt und es wird gefragt, wann R_λ in R'_λ durch eine Ω übergeführt werden könne. Dass ihre Schnittmannigfaltigkeiten $M_{\lambda-1} = A$, $M'_{\lambda-1} = A'$ mit S, in deren Gleichungen $|\Sigma p_i P_i| = 0$, $|\Sigma p_i P'_i| = 0$ sind, in einander überführbar sein müssen, ist nothwendig, aber nicht hinreichend. Denn es könnten die Singularitäten der A, A' auf verschiedene Arten aus den $V^{(i)}$ von S entstanden sein. Das allgemeinste Verhalten von R_λ gegen S ist das folgende: Es seien

---

1) S ist somit ein Beleg für die von Gordan und Nöther in Math. Ann. Bd. X nachgewiesene Möglichkeit, dass die Hesse'sche Covariante identisch verschwinde, ohne dass die Form sich auf weniger Variabeln reduciren liesse.

2) Die Giltigkeit dieses Theoremes ist aber unerlässlich für die Giltigkeit des Weierstrass'schen Aequivalenztheoremes. Denn seien C eine Covariante, T, T^1 zwei Punkte von S. Dann kann man zwei Geraden ziehen, von denen die eine in T die $S(r-1)$-punktig berührt, aber die C nirgends berührt, die andere die S in T $(r-1)$-punktig berührt und auch C in irgend einem Punkte einfach berührt. Wenn nun T und T^1 beide nicht in $V^{(2)}$ enthalten sind, so ist es nach dem Weierstrass'schen Theoreme möglich, eine Transformation Ω zu finden, welche R_1 in R'_1 verwandelt. Ω transformirt also S in sich, also auch C in sich, daher müsste eine Tangente von C in eine Nichttangente verwandelt werden.

$T_1^{(0)}, T_2^{(0)}, \ldots . T_{\varrho 0}^{(0)}$ die einzelnen Punkte (M_0)

$T_1^{(1)}, T_2^{(1)}, \ldots . T_{\varrho 1}^{(1)}$ die einzelnen irreductibeln Linien (M_1)

. . . .

$T_1^{(\nu)}, T_2^{(\nu)}, \ldots . T_{\varrho_\nu}^{(\nu)}$ die einzelnen irreductibeln M_ν

vielfach für die A und sie seien so entstanden, dass $T_x^{(v)}$ der $V^{(i_{x,v})}$ nicht aber der $V^{(i_{x,v}+1)}$ angehöre. Dann wird der R_λ sich in $T_x^{(v)}$ noch verschieden gegen S verhalten können. Es habe R_λ mit S längs $T_x^{(v)}$ mit $V^{(i_{x,v})}$ einen $l^{x,v}_{i_{x,v}-1}$-punktigen Contact, sodass $T_x^{(v)}$ so vielfach im Schnitte des R_λ mit $V^{(i_{x,v})}$ zählt. Längs derselben $T_x^{(v)}$ habe R_λ mit $V^{(i_{x,v}-1)}$ einen $l^{(x,v)}_{i_{x,v}-2}$-punktigen Contact, längs ihrer mit $V^{(i_{x,v}-2)}$ einen $l^{(x,v)}_{i_{x,v}-3}$-punktigen Contact u. s. w., endlich mit $V^{(2)}$ einen $l_1^{(x,v)}$-punktigen und längs derselben $T_x^{(v)}$ mit S einen l-punktigen Contact. Es bestehen also die folgenden Zahlen, welche sämmtlich Contactordnungen von R_λ mit den V längs den T bezeichnen:

$$l^{(x,0)}_{i_{x,0}},\ l^{(x,0)}_{i_{x,0}-1}, \ldots .\ l^{(x,0)}_{\pi 0} \ldots .\ l^{(x,0)}_1,\ l^{(x,0)} \quad x \text{ von } 1 \text{ bis } \varrho_0$$

$$l^{(x,1)}_{i_{x,1}},\ l^{(x,1)}_{i_{x,1}-1}, \ldots .\ l^{(x,1)}_{\pi 1} \ldots .\ l^{(x,1)}_1,\ l^{(x,1)} \quad x \text{ von } 1 \text{ bis } \varrho_1$$

. . . .

$$\text{D)} \quad l^{(x,v)}_{i_{x,v}},\ l^{(x,v)}_{i_{x,v}-1}, \ldots .\ l^{(x,v)}_{\pi_v} \ldots .\ l^{(x,v)}_1,\ l^{(x,v)} \quad x \text{ von } 1 \text{ bis } \varrho_v$$

. . . .

$$l^{(x,\nu)}_{i_{x,v}},\ l^{(x,\nu)}_{i_{x,v}-1}, \ldots .\ l^{(x,\nu)}_{\pi_\nu} \ldots .\ l^{(x,\nu)}_1,\ l^{(x,\nu)} \quad x \text{ von } 1 \text{ bis } \varrho_\nu .$$

Diese Zahlen sind gewiss für die Ω im R_σ und daher auch für die $H(\cdot\,\cdot)K$ im R_r invariant, solange $|H| \gtrless 0$, $|K| \gtrless 0$.

Es kommt nun darauf an, diese Zahlen an der Formenschaar a l g e b r a i s c h z u f i x i r e n. Dazu sind die „g e m i s c h t e n A b l e i t u n g e n d e r P u n k t e v o n R_σ n a c h S“ tauglich und nothwendig. Die i-ten Ableitungen gehen sämmtlich $(l-i)$-fach durch $V^{(i)}$, also verhalten sich die 1., 2., . . . μ . . . . gemischten Ableitungen Π nach S so gegen R_λ, dass dieser in T_x die $(i_{x,v}-1)$-fachen, $(i_{x,v}-2)$-fachen, ... 2-fachen Varietäten von $\overset{1}{\underset{\sigma-1}{\Pi}}$ (also die $V^{(i_{x,v})}$, $V^{(i_{x,v}-1)}$, ... $V^{(2)}$) und die $\overset{1}{\underset{\sigma-1}{\Pi}}$ selbst gerade und genau

$$l^{(x,v)}_{i_{x,v}-1},\ l^{(x,v)}_{i_{x,v}-2},\ \ldots\ l^{(x,v)}_{1}\text{-fach berührt,}$$

allgemein die $(i_{x,v}-\mu)$-fachen, $(i_{x,v}-\mu-1)$-fachen, ... 2-fachen Varietäten von $\overset{\mu}{\underset{\sigma-1}{\Pi}}$ (also wieder die $V^{(i_{x,v})}$, $V^{(i_{x,v}-1)}$ .... $V^{(2)}$ und die $\overset{\mu}{\underset{\sigma-1}{\Pi}}$ selbst gerade und genau

$$l^{(x,v)}_{i_{x,v}-1},\ l^{(x,v)}_{i_{x,v}-2},\ \ldots\ l^{(x,v)}\text{-fach berührt.}$$

Also: Wenn der eine Schaar 1) repräsentirende R_λ in R_σ gegen S das in D) beschriebene Verhalten besitzt, so schneidet derselbe die sämmtlichen allgemeinsten 1. Ableitungen in

$$L_1)\quad \begin{matrix} l^{(x,0)}_{i_{x,0}-1}, & l^{(x,\nu)}_{i_{x,\nu}-1}, & \ldots & l^{(x,v)}_{i_{x,v}-1}, & \ldots & l^{(x,\nu)}_{i_{x,\nu}-1} & \text{mit} \\ T^{(0)}_{x^0}, & T^{(1)}_{x^1}, & \ldots & T^{(v)}_{x^v}, & \ldots & T^{(\nu)}_{x^\nu} & \end{matrix}$$

$$(x^{(v)} \text{ von } 1 \text{ bis } \varrho_v;\ v \text{ von } 1 \text{ bis } \nu)$$

zusammenfallenden Varietäten, schneidet sämmtliche allgemeinsten 2. gemischten Ableitungen von S in

$$L_2)\quad \begin{matrix} l^{(x,0)}_{i_{x,0}-2}, & l^{(x,1)}_{i_{x,1}-2}, & \ldots & l^{(x,v)}_{i_{x,v}-2}, & \ldots & l^{(x,\nu)}_{i_{x,\nu}-2} & \text{mit} \\ T^{(0)}_{x^0}, & T^{(1)}_{x^1}, & \ldots & T^{(v)}_{x^v}, & \ldots & T^{(\nu)}_{x^\nu} & \end{matrix}$$

zusammenfallenden Varietäten und allgemein die sämmtlichen allgemeinsten μ gemischten Ableitungen gerade und genau in

$$L_\mu)\quad l^{(x,0)}_{i_{x,0}-\mu},\ l^{(x,1)}_{i_{x,1}-\mu},\ \ldots\ l^{(x,v)}_{i_{x,v}-\mu},\ \ldots\ l^{(x,\nu)}_{i_{x,\nu}-\mu} \quad \text{mit}$$

denselben

$$T^{(0)}_{x^0},\quad T^{(1)}_{x^1},\quad \ldots\quad \dot{T}^{(v)}_{x^v},\quad \ldots\quad T^{(\nu)}_{x^\nu}$$

zusammenfallenden Varietäten.

Die Zahlen aus D) erscheinen also hier wieder, sind aber jetzt aus einem anderen Grunde als invariant zu beurtheilen. Auch sind jetzt die Verticalreihen mit den Horizontalreihen vertauscht. Sie waren für die erste Auffassung nach den T geordnet und sind es jetzt nach den Π.

Es sind nun statt der Ableitungen $\overset{\mu}{\Pi}$ ihre Schnittvarietäten mit dem R_λ einzuführen auf Grund folgender Theoreme: Hat R_λ in den $T_x^{v)}$ das in D) beschriebene Verhalten, so haben die Schnittvarietäten mit allen $\overset{\mu}{\underset{\sigma-1}{\Pi}}$ in $T_x^{(v)}$ gerade und genau

$$l^{(x,v)}_{i_{x,v}-\mu} \quad \text{gemeinsame Varietäten.}$$

Findet das letztere statt, so hat R_λ das Verhalten von L_μ gegen die $\overset{\mu}{\underset{\sigma-1}{\Pi}}$. Findet dieses statt, so hat R_λ das in D) beschriebene Verhalten gegen S und gegen die $V^{(i)}$.

Hat R_λ das in D) beschriebene Verhalten gegen S, so haben die Schnittvarietäten der gemischten μ-Ableitungen $\overset{\mu}{\underset{\sigma-1}{\Pi}}$ mit dem R_λ allgemeinst gerade und genau

L_μ) . . . . (wie oben)

T) mit resp.

$T_{x0}^{(0)}$, $T_{x1}^{(1)}$, ... $T_{xv}^{(v)}$ . . . . $T_{x\nu}^{(\nu)}$

i) zusammenfallende

$i_{x,0}-\mu+1$, $i_{x,1}-\mu+1$, ... $i_{x,v}-\mu+1$, ... $i_{x,\nu}-\mu+1$-fache Varietäten gemeinsam.

§ 4. Die Subdeterminanten.

Sind $X_y^{(r+1-\mu)}$ die $(r+1-\mu)$-ten Subdeterminanten von S, wo y ein conventioneller Index, $X^{(\mu)}$ die complementäre Subdeterminante, so ist die μ-Ableitung eines Punktes Σ^4 nach S: $\Sigma \pm \Sigma^{4(\mu)}_y \; X_y^{y(r+1-\mu)}$. Also stellen die $(r+1-\mu)$ · Subdeterminanten μ-Ableitungen nach S dar. Daher stellen ferner die Subdeterminanten von $|\Sigma p_i P_i|$ die Schnitte des R_λ mit gemischten Ableitungen nach S dar und zwar als Gleichungen in $p_1, \ldots p_{\lambda+1}$ genommen und diese Schnitte sind linear unabhängig und haben also keine höheren gemeinsamen Varietäten und in diesen keine höheren Vielfachheiten und längs diesen keine höheren Contacte als die $\overset{\mu}{\underset{\sigma-1}{H}}$ i. A. Daraus:

Hat R_λ das in D) beschriebene Verhalten gegen S, so haben die durch die μ-Subdeterminanten von $|\Sigma p_i P_i|$ dargestellten Varietäten $M_{\lambda-1}$ der Ordnung $r+1-\mu$ in den

	T)	(siehe oben)
gerade und genau	L_μ)	(siehe oben)
zusammenfallende	i)-fache	(siehe oben)

Varietäten gegenseitig gemeinsam.

Haben die sämmtlichen durch die μ-Subdeterminanten von $|\Sigma p_i P_i|$ dargestellten Varietäten $M_{\lambda-1}^{r+1-\mu}$ das gegenseitige eben beschriebene Verhalten, so hat R_λ das in D) beschriebene Verhalten gegen S.

§ 5. Das Aequivalenztheorem.

Nothwendig und hinreichend, damit die Schaar 1) in 2) durch $H(\cdot\cdot)K$ übertragbar sei, wo H, K von $p_1, \ldots p_{\lambda+1}$ unabhängig sind und $|H| \gtrless 0$, $|K| \gtrless 0$, ist, dass

1. die Mannigfaltigkeit $|\Sigma p_i P_i| = 0$ in den Variabeln $p_1, \ldots p_{\lambda+1}$ linear überführbar sei in $|\Sigma p_i P_i'| = 0$, dass also ihre Formensysteme in Bezug auf $p_1, \ldots p_{\lambda+1}$ übereinstimmen und aber dass

2. für jede vielfache Varietät $T_x^{(v)}$ dieser Mannigfaltigkeit die durch den gegenseitigen Schnitt aller μ-Subdeterminanten zu bestimmmenden Zahlen

$$L_\mu)\quad l^{(x,0)}_{i_{x,0}-\mu},\quad l^{(x,1)}_{i_{x,1}-\mu},\quad \ldots\quad l^{(x,\nu)}_{i_{x,\nu}-\mu}$$

oder die Differenzen

$$l^{(x,v)}_{i_{x,v}-\mu} - l^{(x,v)}_{i_{x,v}-(\mu-1)} = l^{(x,v)}_{i_{x,v}-(\mu-1)}$$

übereinstimmen.

Hier sind dann die $l_1^{(x,v)}$, $l_2^{(x,v)}$, ... $l_{i_{x,v}}^{(x,v)}$ die auf $T_x^{(v)}$ bezüglichen **Elementarzahlen.**

Im Weierstrass'schen Falle, also $\lambda = 1$ kann v nur den einen Wert Q annehmen, die $T_x^{(0)}$ sind die vielfachen Wurzeln der $S_{p,q}$ und er nennt $(\varrho - c_x)\,l_{i_x}$ den meiner Elementarzahl entsprechenden Elementartheiler. Diese Festsetzung hört auf möglich zu sein für $\lambda > 1$. Ich werde den Beweis des Aequivalenztheoremes für $\lambda = 1$ geben, dem er für $\lambda > 1$ nachgebildet werden kann.

Ich behaupte: Sind die Bedingungen des Aequivalenztheoremes befriedigt, so können stets unendlich viele Transformationen Ω des R_σ construirt werden, welche R_1 in R_1' überführen. Ich construire wie folgt: $M_{\sigma-1} = S$ ist ein Monoid, ich projicire es aus einem Punkte seiner $V^{(r)}$, etwa X_{ik}, der zugleich Coordinateneckpunkt sein kann, auf den $R_{\sigma-1}$ herunter, bilde es auf diesen $R_{\sigma-1}$ ab. Wenn eine Collineation Ω des R_σ S invariant lässt und ausserdem das Centrum X_{ik}, so sind sie nach $R_{\sigma-1}$ in eine neue Collineation Ω_1 abgebildet. Ω_1 hat keine andere Bedingung zu erfüllen, als den Schnitt-$X_{\sigma-2}$ des Osculationskegels von S in X_{ik} mit dem $R_{\sigma-1}$ in sich zu transformiren. $X_{\sigma-2}$ ist sogar ein Kegel und es kann eine Collineation von $X_{\sigma-2}$ in sich schon construirt werden, wenn eine Collineation bekannt ist, welche den Schnitt mit einem $R_{\sigma-2(r+1)}$, der also den Scheitelraum nicht mehr trifft, in sich transformirt. Dieser Schnitt hat aber als Gleichung die erste Unterdeterminante X_{ik}' von S, ist also abermals ein Monoid derselben Art.

Bei der ersten Projection, welche ich die erste wesentliche nenne, sind jene T_x von R_1, welche auf S, aber nicht auf $V^{(2)}$ waren, in freie Punkte des $R_{\sigma-1}$ gekommen, auf $X_{\sigma-2}$ bleiben alle übrigen Punkte T. Sie bleiben auch noch weiter auf dem jedesmaligen Schnitte bei den darauf folgenden Zwischenprojectionen, durch welche der Scheitelraum des Kegels erschöpft wird, also bis im $R_{\sigma-(2r+1)}$. Das erhaltene Monoid projicire ich abermals wie das erste; dies ist die 2. wesentliche Projection; bei dieser werden jene Punkte T freie Punkte des

$R_{\sigma-(2r+2)}$, welche auf $V^{(2)}$, aber nicht auf $V^{(3)}$ waren und die übrigen bleiben auf dem Osculationsschnitte, bis der Scheitelraum des neuen Kegels erschöpft ist. Bei der 3. wesentlichen Projection werden die T, welche auf $V^{(3)}$, aber nicht auf $V^{(4)}$ waren, freie Punkte u. s. w. Auf $X_y^{(r-1)}$ werden sich also nur jene T befinden, welche auf $V^{(r)}$ waren. Ich setze dieses Projectionsverfahren fort bis herab zu den $X_y^{(r-1)}$ 2. Ordnung und behalte dabei immer im Auge, dass es meine Aufgabe war, eine Collineation zu construiren, welche R_1 in R_1' überführt. Es werden schliesslich im R_3 nebst den $X_y^{(r-1)}$ 2. Ordnung zwei Geraden erhalten, auf welchen je ϱ Punkte $T_1, \ldots T_\varrho$ und $T_1', \ldots T_\varrho'$ gegeben sind, sodass der Wurf der ersten projectiv zum Wurfe der zweiten ist und wenn ein Punkt T der $X_y^{(r-1)} = M_2^2$ zugehört, ist es auch mit T der Fall. Beide Schnittpunkte von R_1 (oder R_1') mit der M_2^2 können nicht von Punkten T herstammen, weil meist die Gerade R_1 (oder R_1') in S enthalten gewesen wäre. Die entscheidende Aufgabe ist nun, eine Collineation des R_3 zu construiren, welche M_2^2 in sich transformirt und die Punktgruppe $T_1, \ldots T_\varrho$ auf R_1 in die projective Punktgruppe $T_1', \ldots T_\varrho'$ auf R_1' überführt. Ueber die Lösbarkeit dieser Aufgabe habe ich kein Wort zu verlieren. — Die einzige Schwierigkeit, die sich hiebei in den R_{r-1}, $R_{(r-1)^2-1}, \ldots R_3$ nach den wesentlichen Projectionen zu bieten scheint, dass nämlich die Schnittpunkte der projicirten R_1, R_1' mit den X-Varietäten, welche nicht von Punkten T herstammen, ebenfalls der Bedingung der Projectivität genügen, ist nicht thatsächlich; denn diese accidentiellen Schnittpunkte sind nicht von den wesentlichen unabhängig.

Ein 2. Beweis ist vollständig enthalten in der **Conclusion** des § 2, wenn dieselbe als streng bewiesen angesehen wird.

Einen 3. Beweis habe ich, wenigstens für ∞^1-Schaaren alternirender Formen in meiner Arbeit aus Cr. J. 1897 geliefert. Derselbe beruht ebenfalls darauf, eine Collineation direct zu construiren. Ich schneide die ∞^λ-Systeme mit R_{r-1}, R_{r-1}', setze das Theorem als giltig für diese voraus, construire ein die in R_{r-1}, R_{r-1}' entstehenden Correlationssysteme äquivalent machendes Collineationspaar, indem, wenn die Bedingungen des Theoremes für den R_r erfüllt sind, sie es nothwendig auch für den Schnitt-R_{r-1} sind, beweise dann, dass in Folge der 1. Bedingung — die 2. braucht kaum mehr erwähnt zu werden — ein Collineationspaar möglich ist, welche zwei Correlationen des Büschels im R_r in zwei Correlationen des Büschels im R'_r, deren Wahl eben möglich ist, überträgt und jenes unter R_{r-1}, R'_{r-1} construirte Collineationspaar enthält. Während im ersten Beweise der Schluss von n auf $n+1$ in der successiven Wahl der Projectionscentra versteckt ist, ist er hier im Schnitte mit R_{r-1} offenbar.

§ 6. Fall, wo die Determinante $|\Sigma p_i P_i|$ identisch verschwindet.

Die obigen Deductionen bleiben streng aufrecht. Der R_λ gehört, wann alle Subdeterminanten $(l+1)\cdot$, aber nicht alle $l\cdot$Ordnung verschwinden, der $V^{(r-l+1)}$ an. Da sicher jeder Punkt von $V^{(r-l+1)}$ in jeden anderen ihrer Punkte transformirt werden kann, so kommt es nur auf die Contacte von R_λ mit den $V^{(r-l+2)}, \ldots V^{(r)}$ an und es sind die obigen Deductionen statt für $V^{(2)} \ldots V^{(r)}$ nur für diese V anzustellen. Daher das Theorem:

Verschwinden alle Subdeterminanten $(l+1)\cdot$ aber nicht alle $l\cdot$Ordnung von $|\Sigma p_i P_i|$ identisch, so ist für die Aequivalenz nothwendig und hinreichend, dass: 1. der grösste gemeinsame Theiler aller Subdeterminanten $l\cdot$Ordnung für 1) und 2) derselbe sei und 2. alle darauf folgenden (d. h. für diesen Theiler gebildeten) Zahlen l für beide Schaaren dieselben seien.

Ad notam. Ich kenne für den von Kronecker behandelten Fall $\lambda = 1$ die Tragweite der hiemit ausgesprochenen Behauptung. Sie sagt nichts anderes aus, als dass die Invarianten m_k (die niedrigsten Grade der Relationen unter den 1. Ableitungen) von Kronecker nicht unabhängige Invarianten, sondern an die m_k gebunden sind, obzwar er weder 1868 noch 1874 noch 1890 dies erwähnt, sondern sogar einmal die Wendung gebraucht, dass die Anzahl der numerischen Invarianten in den Fällen $S = 0$ dieselbe bleibe wie bei Weierstrass. Ich will versuchen, meine Behauptung direct zu erproben in dem Falle der symmetrischen Formen, weil für diesen eine weitere Aeusserung von Kronecker in einer von C. Segre bei ihm erbetenen und dann in den Atti di Torino Vol. XIX mitgetheilten brieflichen Aufklärung vorliegt.

Der Schnitt mit einem R_{r-1} trifft die R_0-Kegel — ich setze etwa der Einfachheit der Sprache wegen voraus, dass die 1. Subdeterminanten nicht sämmtlich verschwinden — in einer Schaar von M^2_{r-2}, deren invariantiver Character gegen $H(\cdot\cdot)K$ nach dem Weierstrass'schen Theoreme genau in den singulären M^2_{r-2} und deren projectivem Wurfe enthalten ist. Diese sind: 1. R_0-Kegel, deren Spitzen in dem Schnitte mit dem Scheitelorte des Kegelbüschels sind also m und diese sind in dem allen M^2_{r-2} gemeinsamen R_{m-1} enthalten, 2. R_0-Kegel, deren Spitzen Schnitte von R'_{r-1} mit den R_1-Axen des gegebenen Büschels sind. Der grösste gemeinsame Theiler liefert diese $r - 2m$ Kegel. Stimmen die beiden Zahlen in $(p_1 P_1 + p_2 P_2)$ und $(p_1 P'_1 + p_2 P'_2)$ überein, so schliessen wir aus der geometrischen Deutung, dass beide Schaaren den Scheitelort je in einem R_m haben und also aus der blossen Uebereinstimmung der Exponenten des grössten gemeinsamen Theilers ist schon zu schliessen, dass, weil gleichzeitig S identisch verschwindet, die M^2_{r-2} einen R_{m-1} gemeinsam haben, woraus dann folgt, dass die übrigen $2m$ Scheitel sich auf R_{m-1} befinden müssen, aber zu zweien coincident in insgesammt m Punkten. Diese m Punkte besitzen im R_{m-1} keine Invariante, ebensowenig die Curve M^m_1 im R_m durch den R_{m-1}, welche nach der geometrischen Deutung existiren muss. Sind die Bedingungen des Theoremes erfüllt, so lässt sich eine lineare Transformation im R_{m-1} finden, welche das M^2_{r-2}-Büschel von $(p_1 P_1 + p_2 P_2)$ in das von $(p_1 P'_1 + p_2 P'_2)$ überführt und also R_{m-1} in R'_{m-1}, daher im R_r eine Transformation, welche die soeben genannte enthält und die Ortscuvre

M_1^m des R_m in die Ortscurve $M_1'^m$ des R_m' überführt. Dass dabei auch die Scheitel der Kegel 2. Species in die von R_r' übergeführt werden, folgt aus der Projectivität, kann aber erschlossen werden, wenn man das ganze Büschel aus zwei Kegeln mit den Scheiteln R_0^1, R_0^2 zusammensetzt, wo die Gerade R_0^1, R_0^2 die R_{m-1} in einem Punkte R_0^x trifft, welcher mit den dortigen m Punkten immer noch keine Invariante im R_{m-1} besitzt. Dabei muss ich den Lesern auch des Segre'schen Aufsatzes noch zu bedenken geben, dass die dort behauptete Invariante μ (für ϱ-Species) nicht von dem grössten gemeinsamen Theiler der ϱ-Subdeterminanten unabhängig sein kann.

§ 7. Fall, wo eine Substitutionsdeterminante verschwindet.

Die Ω, welche den $H(\cdot\cdot)K$ entsprechen, wo ϱ der höhere unter den Rängen von $|H|$, $|K|$ ist, verwandeln den ganzen R_σ in $V^{(\varrho)}$, aber $V^{(\varrho+1)}, \ldots V^{(r)}$ jeder in sich.[1]) Dann lautet das Aequivalenztheorem:

Nothwendig und hinreichend, damit 1) in 2) übergehe, ist, dass jene $l_\mu^{(x)}$ übereinstimmen, wo $\mu > h$, wenn h der grössere unter den beiden Rängen von $|H|$ oder $|K|$ ist.

§ 8. Symmetrische und alternirende Formen.

Die Eigenschaften von S und Ω übertragen sich auf diesen Fall mit geringen Aenderungen, z. B. ist nur eine R_r-Schaar vorhanden. Die Dimension von $V^{(i)}$ ist hier im symmetrischen Falle $[r\,(r+3) - i\,(i+1)]:2$. Die birationale Verwandtschaft besteht auch hier. Wegen des Pfaff'schen Satzes enthält S unendlich viele $R_{(r-1)(r+3):2}$, welche sie längs einer Varietät $M_{(r-1)(r+2):2-1}$ berühren. Diese $\sqrt{S_2}$ besitzt nur vielfache $V^{(2)}, V^{(3)}, \ldots V^{\frac{(r+1)}{2}}$.[2]) Das Aequivalenztheorem spricht sich

---

[1]) Vom Standpunkte der Gruppentheorie enthält die Beibehaltung von $|H| \gtrless 0$, $|K| \gtrless 0$ eine Discontinuität.

[2]) Es entsteht so die bisher nicht aufgeworfene Frage nach anderen linearen Räumen, welche S längs einer einzigen irreductibeln Varietät

für ∞^λ-Schaaren ähnlich wie bei Weierstrass aus.[1]) 1896 bis 1897 (Washington).

---

berühren, osculiren, etc., also es soll, wenn man die Elemente einer Determinante als gegen rationale Functionen von λ Parametern ausdrückt, die Determinante eine Potenz einer Function dieser Parameter werden. — Andere besondere Räume für S werden durch die in der Theorie der Thetafunctionen auftretende Determinante (Nöther, Prym) geliefert.

[1]) Dass lineare Relationen unter den Subdeterminanten m. Ordnung einer symmetrischen Determinante bestehen müssen, sieht man bei der Auffassung des § 3 sehr leicht. Denn man erhält im R_σ Schnitt des $R_{\sigma'}$ (wo $R_{\sigma'}$ der Raum der symmetrischen Formen ist) mit gemischten $(r+1-m)$ten Ableitungen und diese dürfen kein höheres lineares System als das im $R_{\sigma'}$ für die S_1 gebildete zusammensetzen, also bestehen $N_{r_1, m} - N_{r', m} - \frac{1}{2}\binom{r+1}{m}^2 + \binom{r+1}{m}$ lineare Relationen, wo $r' = \frac{r(r+3)}{2}$, $r_1 = (r+1)^2 - 1$ und $N_{r, m}$ die Dimension der gemischten $(r+1-m)$ten Ableitungen nach M_{r-1} im R_r ist.

Aus demselben Grunde scheint es, dass auch unter den Subdeterminanten einer schiefen Determinante lineare Relationen bestehen müssen, ungeachtet der gegentheiligen Behauptung von C. Runge Cr. J. Bd. 93. Auch für die Nöther'sche Determinante wird man lineare Relationen unter den Subdeterminanten finden.
