

Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Classe

der

k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.



Band XXVIII. Jahrgang 1898.

München.

Verlag der k. Akademie.

1899.

In Commission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).

Koordinaten-Transformationen in geodätischen Dreiecknetzen.

Von **J. H. Franke.**

(Eingelaufen 15. Januar.)

Die an den Namen des Geodäten und Astronomen Soldner geknüpfte bayerische Landesvermessung war in den ersten Jahrzehnten dieses Jahrhunderts ein vorbildliches Muster und ist es in manchen Beziehungen lange geblieben. Die Einführung rechtwinklig-sphärischer Koordinaten, heute Soldner'sche Koordinaten genannt, bildete einen bedeutsamen wissenschaftlichen Fortschritt, während gleichzeitig die an die Koordinaten geknüpfte Systematik der Landesvermessungsblätter für die geodätische Technik von höchster Bedeutung war.

In der That ist die Soldner'sche Projektion, zu den Cylinderprojektionen gehörig, in vorzüglicher Weise zur bildlichen Darstellung eines Landes geeignet, welches links und rechts von der Vermessungsachse nur eine Ausdehnung von etwa 200 km, also eine Breite von 400 km hat. Sie lässt in dieser Ausdehnung die sphärische anstatt der sphäroidischen Rechnung noch als zulässig erscheinen und hat dabei den Vortheil der geringsten linearen und Flächen-Verzerrung, wenn für mässige Entfernungen von der Vermessungsachse die sphärischen Koordinaten als eben und rechtwinklig, bzw. kongruent angesehen werden. Hier bringen sie dann die wirklichen Längen und Flächen mit der möglichst kleinsten Linear- und Flächenverzerrung zur Darstellung.

Die bayerische Landesvermessung und auch die anderer Länder ist einheitlich, d. h. auf einen Nullpunkt und eine Vermessungsachse koordinirt. Dies bedingt wegen der Querausdehnung des Landes bis zu Ordinaten ± 180 km die stete Beibehaltung sphärischer Koordinaten, die auch in der Durchführung grundsätzlich erfolgt ist. So zulässig dies auch für die ältere Vermessung erscheint, da diese eine graphische war und mit dem Messtische erfolgte, so vielfach erschwerende Nachteile hat jene Beibehaltung für die Praxis der modernen Landesvermessung. Diese ist nämlich von der graphischen Aufnahme allgemein zur Zahlenmethode, d. h. zur Theodolitwinkelmessung und zur direkten Längenmessung übergegangen und demnach zur ausgesprochenen trigonometrischen Methode geworden. Die so geänderte Technik in Verbindung mit den gesteigerten Genauigkeitsanforderungen, die sich im Verflusse nahezu eines Jahrhunderts in der Vermessung vollzogen haben, macht eine Weiterbildung des Bestehenden zur gebieterischen Notwendigkeit. Eine gänzliche Umbildung, wie sie in der Einführung der strengen konformen Abbildung (nach Gauss) liegen würde, kann wegen ihres tieferen Eingreifens erst in zweiter Linie in Betracht kommen. Es handelt sich demnach zunächst darum, unter Beibehaltung der Soldner'schen Projektion und der systematischen Vorzüge von dessen einheitlicher Koordinirung zu Koordinatensystemen zu gelangen, welche ihre Brauchbarkeit für die ältere Landesvermessung behalten und doch gleichzeitig den Anforderungen der heutigen trigonometrischen Messungsmethode angepasst sind. Weiter ist dann der etwaige Uebergang zu konformen Koordinaten zu erörtern.

Es dürfte den nachstehenden Entwicklungen zu statten kommen, wenn hier die Grundlagen und Formeln der Soldner'schen Koordinaten kurz vorangestellt werden.

A. Ein durch den Normalpunkt gelegter Vertikalschnitt (gewöhnlich, nicht notwendig, der Meridian jenes Punktes) bildet die Vermessungs- oder Abscissenachse, der auf dieser im Nullpunkte senkrecht stehende Grosskreis die Haupt- oder Direktionsachse (Ordinatenachse). Die Ordinate (o) eines Punktes

ist das von demselben auf die Vermessungsachse gefällte Perpendikel; Abscisse (a) des Punktes ist das von dem Fusspunkte des Perpendikels und vom Normalpunkte aus gezählte Stück der Vermessungsachse. Die orientirenden Richtungen (Direktionswinkel) der Vertikalschnitte zählen von der Ordinatenrichtung aus im rechtsläufigen Sinne. Die Messblatteintheilung steht mit dem sphärischen Koordinatensystem in genauester Verbindung.

Ist l die normale Länge des (quadratischen) Blattes und M die Massstabsgrösse, so ist die (verjüngte) Blattseite lM . Die Vermessungsachse sei nördlich und südlich vom Nullpunkte in gleiche Abstände lM (Schichten N) geteilt; auf den von diesen Punkten ausgehenden Ordinatenkreisen seien von der Vermessungsachse aus die gleichen Abstände lM (Reihen oder Nummern n) aufgetragen. Hierdurch entsteht ein Netz kleiner, nach Ost und West wegen der Konvergenz der Ordinatenkreise sich stetig in der Höhe verringender Vierecke, welche die Messblätter bilden.

Mit den Hilfsausdrücken

$$m = s \sin \varphi; \quad n = s \cos \varphi; \quad \omega = \frac{1}{\sin 1''}$$

sind die Soldner'schen Linearkoordinaten a und o gegeben durch

$$\left. \begin{aligned} a_2 &= a_1 + m + \frac{m}{2R^2} \left(o_1^2 - \frac{n^2}{3} \right) \\ o_2 &= o_1 + n - \frac{m^2}{2R^2} \left(o_1 + \frac{n}{3} \right) \\ \varphi_2 &= 180 + \varphi_1 + \frac{\omega \cdot m}{R^2} \left(o_1 + \frac{n}{2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

in welchen die dritten Glieder die sphärischen Ergänzungen

$$(\delta a), \quad (\delta o), \quad (\delta \varphi)$$

darstellen. Für die Polarkoordinaten bestehen mit $(a_2 - a_1) = \Delta a$ und $(o_2 - o_1) = \Delta o$ die Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi &= \frac{Aa - \frac{Aa}{2R^2} \left(o_1^2 - \frac{(Ao)^2}{3} \right)}{Ao + \frac{(Ao)^2}{2R^2} \left(o_1 + \frac{Ao}{3} \right)} \\ s &= \frac{Aa - \frac{Aa}{2R^2} \left(o_1^2 - \frac{(Ao)^2}{3} \right)}{\sin \varphi} = \frac{Ao + \frac{(Ao)^2}{2R^2} \left(o_1 + \frac{Ao}{3} \right)}{\cos \varphi} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

als erste Näherung (wegen Gleichsetzung von m und n mit Aa , bzw. Ao), die indess für alle gewöhnlichen Landesvermessungszwecke ausreicht.

Für die Blatthöhenverkürzung v_h kann die Richtung und Länge l der Blattseite nordsüdlicher Richtung mit dem unter dem Direktionswinkel 90° durch eine Blattecke gelegten Vertikalschnitt identificirt werden. Man hat dann aus der ersten der Gl. (1), mit o die Mittelordinate des Blattes bezeichnend,

$$v_h = \frac{l \cdot o^2}{2R^2} \quad (3)$$

in natürlichem Masse. Hieraus folgt, da die Blattseiten west-östlicher Richtung definitionsgemäss unverkürzt bleiben, die Flächenverkürzung eines (quadratischen) Blattes

$$v_f = \frac{l^2 \cdot o^2}{2R^2} \quad (4)$$

Entsprechend der bildlichen Darstellung in der Ebene sind auch die Abscissen der Koordinatenpunkte verkürzt aufzutragen.

Bezeichnet a_n die Abscisse des der Direktionsachse zunächst liegenden Blattrandes, so ist der Abscissenrest $(a - a_n)$ ähnlich Gl. (3) um

$$v_a = \frac{(a - a_n) o^2}{2R^2} \quad (5)$$

zu verkürzen.

Die trigonometrischen Arbeiten sind nach den Gl. (1) und (2) in der Regel durchaus sphärisch geführt worden, in den Planarbeiten der graphischen Aufnahme sind gleichfalls die sphärischen Beziehungen (3) und (5) zur Beachtung gelangt.

während lediglich das v_r der Gl. (4) unbeachtet blieb. Die moderne Landesvermessung hat es mit durchaus anderen Verhältnissen zu thun. Anstatt der früheren 2 bis 3 Koordinatenpunkt-Ordnungen bestehen jetzt 7 bis 8 (5 trigonometrische, 2 polygonometrische und gegebenenfalls 1 geometrische); zugleich ist die Zahl der Koordinatenpunkte um das mehrhundertfache gewachsen. Die Gl. (1) ist in den Punktordnungen I—III, dann IV und V mindestens von $o = 0$ bis 20, bzw. 40 km, in den Ordnungen VI und VII von 60, bzw. 90 km an (hier beschränkt auf das erste Glied der sphärischen Ergänzung) zu beachten. Das Gleiche gilt von $o = 90$ km an für die Gl. (3) und (5), während Gl. (4) durchaus zur Anwendung gelangt. Alle diese technischen Massnahmen sind bedingt durch die gesteigerten Genauigkeitsanforderungen in Verbindung mit der heutigen Plandarstellung in grösserem Massstabe. Die wesentlichste Anforderung besteht nun darin, alle diese sphärischen Beziehungen Gl. (1)–(5) unmittelbar in die Koordinaten aufzunehmen, d. h. diese als eben betrachten zu dürfen, und so durch Vereinfachung und Fehlerquellenverschliessung, insbesondere auch der zahlenmässigen Behandlung geometrischer Minimalgrössen, den technischen Wert und die Genauigkeit der modernen Vermessung zu steigern. Die mathematische Erfüllung jener Anforderung ist an und für sich leicht, kann jedoch durch eine wesentliche Bedingung erschwert werden, die darin besteht, dass die neuen Koordinaten mit geometrisch hinreichender Genauigkeit in den allgemeinen Landesvermessungsblättern der einheitlichen Koordinirung unmittelbar verwendet werden können. (Dieser Fall ist, wie in Bayern, dann vorhanden, wenn keine vollständige Neuvermessung des ganzen Landesgebiets vorliegt.) Offenbar kann diese Bedingung nicht lediglich durch Verkleinerung der neuen Systeme, sondern nur durch eine derartige Lage der neuen Koordinatenachsen erreicht werden, dass der Abweichungswinkel gegen die ursprünglichen Achsen der minimalste wird. Hiermit ist zugleich ausgesprochen, dass die Meridiane der neuen Normalpunkte, wenn der Meridian des Nullpunktes der einheitlichen Koordinirung

Vermessungsachse war, nicht als neue Achsen dienen können, da in unseren Breiten bei 100 km Querabstand die Meridiankonvergenz $> 1^{\circ}$ ist.

B. Dementsprechend wird definiert: Die Haupt- oder Richtungsachse des lokalen Systems bildet der bisherige Ordinatenkreis des neuen Nullpunktes N' im ursprünglichen System U , die neue Vermessungs- oder Abscissenachse der hierzu senkrechte Vertikalschnitt in N' . Abscissen und Ordinaten im neuen Systeme sind ähnlich wie im ursprünglichen Systeme, also als Abschnitte, bzw. Perpendikel der neuen Vermessungsachse definiert. Das System ist demnach wieder ein sphärisches nach Soldner. Es sind die allgemeinen Koordinaten (a, o) eines Punktes A in solche (x, y) des neuen Systems mit dem Nullpunkte N' , (a_0, o_0) zu transformiren.

Es bestehen die Grundgleichungen im Systeme U

$$\left. \begin{aligned} a - a_0 &= \Delta a = s \sin \varphi + (\delta a) \\ o - o_0 &= \Delta o = s \cos \varphi + (\delta o) \end{aligned} \right\} \quad (U)$$

und im System N

$$\left. \begin{aligned} x &= s \sin \varphi + (\delta x) \\ y &= s \cos \varphi + (\delta y) \end{aligned} \right\} \quad (N)$$

wo s der Vertikalschnitt $N' A$.

Durch Einführung von (U) in (N) folgt

$$\left. \begin{aligned} x &= \Delta a + (\delta x) - (\delta a) \\ y &= \Delta o + (\delta y) - (\delta o) \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

und da nach Gl. (1)

$$\begin{aligned} (\delta a) &= \frac{m}{2R^2} \left(o^2 - \frac{n^2}{3} \right); & (\delta o) &= -\frac{m^2}{2R^2} \left(o_0 + \frac{n}{3} \right) \\ (\delta x) &= \frac{m}{2R^2} \left(y^2 - \frac{n^2}{3} \right); & (\delta y) &= -\frac{m^2}{2R^2} \cdot \frac{n}{3} \end{aligned}$$

ist (letzteres unter Beachtung, dass die Koordinaten des neuen Nullpunktes gleich Null sind), so erhält man

$$(\delta x) - (\delta a) = -\frac{m}{2R^2} (o^2 - y^2)$$

$$(\delta y) - (\delta o) = \frac{m^2}{2R^2} o_0$$

woraus durch Einsetzung in Gl. (a)

$$\left. \begin{aligned} x &= \Delta a - \frac{m}{2R^2} (o + y) (o - y) \\ y &= \Delta o + \frac{m^2}{2R^2} o_0 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Mit für weite Grenzen hinreichender Sicherheit gelten die Vereinfachungen $m = \Delta a$, $n = \Delta o$ und $y = (o - o_0)$, daher

$$\left. \begin{aligned} x &= \Delta a - \frac{\Delta a}{R^2} \left(o - \frac{o_0}{2} \right) o_0 = \Delta a + \delta \\ y &= \Delta o + \frac{(\Delta a)^2}{2R^2} o_0 = \Delta o + \delta' \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Dies sind die für vereinfachte tabellarische Behandlung eingerichteten Transformationsformeln. Man leitet aus ihnen die Umkehrungen ab

$$\left. \begin{aligned} a &= (a_0 + x) + \frac{x}{R^2} \left(\frac{o_0}{2} + y \right) o_0 = (a_0 + x) + \delta_1 \\ o &= (o_0 + y) - \frac{x^2}{2R^2} \cdot o_0 = (o_0 + y) + \delta_1' \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

die, weil in ihnen $x = \Delta a$ und $y = \Delta o$ gesetzt sind, als erste Näherung gelten. (Die Transformationen (6) sind von mir gelegentlich einer anderen Arbeit bereits 1890 in Nr. 3022 der A. N. abgeleitet worden.)

Es ist noch die Frage der geringsten Achsenkonvergenz¹⁾ zu erledigen, die hier lediglich hinsichtlich der Konvergenz der neuen Achsen mit den Messblattseiten der einheitlichen Koordi-

¹⁾ Diese Konvergenz erhält man auch ganz kurz durch die dritten der Gl. (1) und (15), nämlich $c'' = -\frac{\omega \cdot m o_0}{R^2} = -\frac{\omega \cdot \Delta a \cdot o_0}{R^2}$, wie nachher Gl. (9).

nirung in Betracht kommt. In dieser letzteren Beziehung ist sie ausführlicher zu betrachten.

Die Koordinaten eines quadratförmigen Soldner'schen Blattes im einheitlichen System, hier der Kürze halber a und o positiv genommen, lassen sich ausdrücken durch

Ecken.	<u>SO.</u>	<u>SW.</u>	<u>NW.</u>	<u>NO.</u>
	a	a	$a + l \cdot M$	$a + l \cdot M$
	o	$o + l \cdot M$	$o + l \cdot M$	o

Im lokalen Systeme vermöge (7) durch

$$\left. \begin{array}{ll} \delta: & -\frac{\Delta a}{R^2} \left(o - \frac{o_0}{2} \right) o_0 & -\frac{\Delta a}{R^2} \left((o + lM) - \frac{o_0}{2} \right) o_0 \\ \delta': & \frac{(\Delta a)^2}{2 R^2} o_0 & \frac{(\Delta a)^2}{2 R^2} o_0 \\ \delta: & -\frac{\Delta(a + lM)}{R^2} \left((o + lM) - \frac{o_0}{2} \right) o_0 & -\frac{\Delta(a + lM)}{R^2} \left(o - \frac{o_0}{2} \right) o_0 \\ \delta': & \frac{(\Delta(a + lM))^2}{2 R^2} o_0 & \frac{(\Delta(a + lM))^2}{2 R^2} o_0 \end{array} \right\} (b)$$

Die Subtraktion gibt unter Abwerfung der zu vernachlässigenden Glieder $\frac{lM}{R^2}$ und $\frac{(lM)^2}{2 R^2}$ sowie Uebergang zu natürlichem Masse durch Division mit der Massstabsgrösse M die lineare Divergenz $c = \delta_{so} - \delta_{sw} = \delta_{no} - \delta_{nw}$, dann $\delta'_{no} - \delta'_{so} = \delta'_{sw} - \delta'_{nw}$, der älteren Blattseitenrichtungen mit den neuen Koordinatenachsen für die Blattlänge l

$$c = -\frac{\Delta a \cdot l \cdot o_0}{R^2} \quad (9)$$

Denkt man sich die Mitten der Seiten eines identischen Blattes, einmal mit lokalen, dann mit allgemeinen Koordinaten konstruiert, zur Deckung gebracht, so wird die ganze Konver-

genz zur Hälfte mit $+$ und $-$ auf die 4 Blattecken geworfen, so dass für diese der Ausdruck besteht

$$c_e = \pm \frac{\Delta a \cdot l \cdot o_0}{2 R^2} \quad (10)$$

Der lineare Wert von c_e kann nicht höher als 0,05 mm, die äusserste Anfangsgrenze der geometrischen Darstellbarkeit, angenommen werden; hiernach sind Δa und o_0 durch die Gleichung

$$0,0001 R^2 = l \cdot \Delta a \cdot o_0 \quad (11)$$

verbunden.

In ähnlicher Weise leiten sich die Blattabmessungen ab. Man findet aus den vorhin benützten Gl. (b) erst für die östlichen und westlichen, dann für die südlichen und nördlichen Blattseiten, wieder unter Abwerfung von $\frac{(l \cdot M)^2}{R^2}$, die Näherungsausdrücke

$$\left. \begin{aligned} v_l &= \delta_{NO.} - \delta_{SO.} = \delta_{NW.} - \delta_{SW.} = l \cdot \frac{(2o - o_0)}{2 R^2} o_0 \\ v_i &= \delta'_{SW.} - \delta'_{SO.} = \delta'_{NW.} - \delta'_{NO.} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Dasselbe Blatt hat in lokalen Koordinaten, die ja gleichfalls sphärische sind, wieder eine Verkürzung der Blattlängen in der Abscissenrichtung, die ähnlich wie (3), wenn wie hinreichend $y = (o - o_0)$ gesetzt wird,

$$v_r = \frac{l \cdot y^2}{2 R^2} = \frac{l \cdot (o - o_0)^2}{2 R^2} \quad (13)$$

beträgt, während definitionsgemäss und wie oben die Blattlängen in der Ordinatenrichtung ungeändert bleiben. Die Addition gibt

$$v_l + v_r = \frac{l}{2 R^2} ((2o - o_0) o_0 + (o - o_0)^2) = \frac{l \cdot o^2}{2 R^2} \quad (14)$$

Das ist also die thatsächliche Blattverkürzung v_h der Gl. (3). (Dass das hier gebrauchte o gegen das dort benützte eigentlich $(o - \frac{l}{2})$, ist für die Differentialformel (14) ohne Belang).

Der Zweck der transformirten Koordinaten x, y besteht darin, sie innerhalb gewisser Ausdehnungsgrenzen als ebene Koordinaten betrachten zu können, demnach von den strengen Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} x_2 &= x_1 + m + \frac{m}{2R^2} \left(y_1^2 - \frac{n^2}{3} \right) \\ y_2 &= y_1 + n - \frac{m^2}{2R^2} \left(y_1 + \frac{n}{3} \right) \\ \varphi_2 &= 180 + \varphi_1 + \frac{\omega m}{R^2} \left(y_1 + \frac{n}{2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

zu den genäherten

$$\left. \begin{aligned} x_2 &= x_1 + m \\ y_2 &= y_1 + n \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

übergehen zu können. Hierfür ist das Maximum der Ordinate y massgebend. Die Genauigkeitsanforderungen können verschiedene sein und bemessen sich nach der Grösse der linearen (v) und der Richtungsverzerrung (v') bei der Abbildung in der Ebene. Diese sind im Soldner'schen Systeme wie bekannt und auch leicht zu finden

$$\left. \begin{aligned} 1+v &= 1 + \frac{(\delta a)\sin\varphi + (\delta o)\cos\varphi}{s} = 1 + \frac{\sin^2\varphi}{6R^2} (o_1^2 + o_1o_2 + o_2^2)^1 \\ v' &= \frac{(\delta a)\cos\varphi - (\delta o)\sin\varphi}{s} \\ &= \frac{a_2 - a_1}{6R^2} (2o_1 + o_2) + \frac{\sin\varphi \cos\varphi}{6R^2} (o_1^2 + o_1o_2 + o_2^2) \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Somit hat die lineare Verzerrung ihr Maximum in der Abscissenrichtung, die Richtungsverzerrung im Oktanten.

Die numerische Auswertung gibt hiefür bei $y = \pm 40$ km und bei $s = 7$ km.

$$\text{Max. } l_v = 1 : 50\,000; \text{ Max. } r_v = 3'' \quad (18)$$

Hiernach bestimmen sich die Querausdehnungen lokaler Systeme und damit auch deren Nullpunktsordinate o_0 durch das

1) Für $o_1 = o_2$ wird $1+v = 1 + \frac{o^2}{2R^2} \sin^2\varphi$.

zulässige Max. von y . Die Ausdehnung in der Abscissenrichtung (x) könnte über 200 km steigen, wenn nicht gegebenenfalls die wichtigen Gleichungen (10), bzw. (11) beständen. Mit $l = 0,5$ m, dann $y = \pm 40$ km wird zunächst erhalten für $o_0 = \pm 80$ km, sodann für $o_0 = \pm 160$ km, nach Gl. (11)

$$\Delta a = 102 \text{ km, bzw. } 51 \text{ km.}$$

Das Ergebniss der vorstehenden Darlegung ist sonach:

Werden die sphärischen Koordinaten der einheitlich koordinirten Dreieckspunkte höherer Ordnung eines Soldner'schen Netzes mittels der Gl. (7) auf neue Koordinatenachsen derart, wie sie Seite 24 definiert sind, transformirt, so erhält man wieder ein System rechtwinklig-sphärischer Koordinaten. Man kann diese transformirten Koordinaten innerhalb gewisser, aus (17) abzuleitender Genauigkeitsgrenzen als ebene betrachten und sodann mit den einfachen Formeln (16) weiter rechnen. Nach den in (18) gegebenen numerischen Auswertungen ist dies vom Dreiecknetz III. Ordnung abwärts an bei $y = \pm 40$ km zulässig mit einer linearen Genauigkeit 1:50 000 und einer maximalen Richtungsverzerrung von 3". Zugleich geben bis zu dieser Grenze $y = \pm 40$ km die ebenen Koordinaten das Landesvermessungsblatt der einheitlichen Koordinirung wieder mit einer Abscissenverzerrung im Maximum von 1:50 000, was gleicherweise für die aufzutragenden Abscissenreste gilt. Vermöge der Gl. (11) und der obigen numerischen Auswertung lassen sich die transformirten Koordinaten als ebene gleich den einheitlich sphärischen Koordinaten innerhalb der Werte $y = \pm 40$ km und $\Delta a = x = \pm 102$, bzw. 51 km bei $o_0 = \pm 80$, bzw. 160 km bis zu einer Maximaldifferenz von 0,05 mm für alle Planarbeiten im einheitlichen Blattsystem der Landesvermessung unmittelbar verwenden.

Hienach sind durch die transformirten (ebenen) Koordinaten die sämtlichen (trigonometrische wie geometrische) sphärischen Beziehungen der Gl. (1)–(5) innerhalb technisch zulässiger Grenzen zahlenmässig in diese Koordinaten aufgenommen.

C. Die bisher behandelte Soldner'sche (kongruente) Projektion ist neuerer Zeit durch eine konforme Abbildung (nach Gauss), in welcher Original und Abbildung in den kleinsten Teilen ähnlich sind, hie und da ersetzt worden. Von Herrn General Schreiber wurde sie in modificirter Form als konforme Doppelprojektion der preussischen Landesaufnahme zu Grunde gelegt, und neuerdings durch Herrn Jordan in der Mecklenburgischen Landesvermessung theoretisch und praktisch weiter entwickelt. Ihr eignen gewisse principielle Vorzüge, besonders auch für die einheitliche Projektion eines sehr grossen Landesgebiets. Indessen hat schon 1876 Herr Helmert darauf hingewiesen, dass die konformen Koordinaten ihren grossen Wert auch in der allgemeinen Landesvermessung haben. Zwar ist ihre absolute Flächenverzerrung nahezu doppelt so gross als die Soldner'sche, dafür jedoch nach allen Richtungen gleichmässig und gleichzeitig werden die Richtungsverzerrungen so gering, dass in weit grösserer Ausdehnung die ebene Triangulierung zulässig erscheint.

Seien ξ, η die rechtwinklig-konformen Koordinaten, so hat man die wichtigen, unseres Wissens zuerst von Herrn Helmert aufgestellten Vergleichen zwischen kongruenten und konformen Koordinaten, die allen hier zu machenden Anwendungen zu Grunde liegen, nämlich

$$\left. \begin{aligned} \xi &= a \\ \eta &= o \left(1 + \frac{o^2}{6 R^2} + \frac{o^4}{24 R^4} \right) \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

wobei für eine sphärische Rechnung bis zu $o < 200$ km das Glied vierter Ordnung vernachlässigt werden kann. Innerhalb dieser Grenze sind dann die vorigen Verzerrungen (17) nunmehr

$$\left. \begin{aligned} 1+V &= 1 + \frac{(\delta a)\sin\varphi + (\delta o)\cos\varphi}{s} + \frac{(o_2^2 - o_1^2)}{6R^2s}\cos\varphi = 1 + \frac{(o_1^2 + o_1o_2 + o_2^2)^{1/2}}{6R^2} \\ q'' - q &= V'' = \frac{(\delta a)\cos\varphi - (\delta o)\sin\varphi}{s} - \frac{(o_2^2 - o_1^2)}{6R^2s}\sin\varphi = \frac{a_2 - a_1}{6R^2}(2o_1 + o_2) \end{aligned} \right\} (20)$$

Deren Vergleichung mit den (17) zeigt die principiell und technisch gleich wertvolle gleichmässige Linearverzerrung bei Gauss, während die Richtungsverzerrung nur aus dem ersten Soldner'schen Gliede besteht. Die erstere ist dem Maximum von Soldner gleich, die zweite dagegen erheblich niedriger. Diese ist für $y = 90$ km und $s = 7$ km in der Oktantenrichtung hier $1''$, 2, für Soldner jedoch $12''$, demnach bei der Konformität weit günstiger. Dagegen hat allerdings die Flächenverzerrung, die nach (4) und (17) bei Soldner vermöge der linearen Beziehung $s' = s \left(1 + \frac{f(o)}{R^2} \sin^2 \varphi \right)$ im durchschnittlichen Mittel $\frac{s^2 \cdot o^2}{2R^2}$ beträgt, hier den konstanten Wert $\frac{s^2 \cdot o^2}{R^2}$.

Es liegt nahe, dass die älteren graphischen Aufnahmen in den möglichst kleinsten linearen und damit Flächenverzerrungen das wesentlichste Moment erblicken mussten. Mit demselben Rechte kann aber die auf Winkelmessungen sich aufbauende moderne Vermessung, wie schon von Früheren hervorgehoben, das Hauptgewicht auf die geringere Richtungsverzerrung legen; das umsomehr, als die erhöhte mittlere Flächenverzerrung noch innerhalb technisch zulässiger Grenzen bleibt und die linearen Maxima in beiden Systemen die gleichen sind. Ueberdem könnte erstere auch einschliesslich der Reduktion vom Projektions-Horizont auf das thatsächliche Vermessungsniveau in einfachster Weise bei den Schlussflächen berücksichtigt werden.

Innerhalb der oben angegebenen Grenzen lassen sich demnach mittels der Gl. (19) kongruente in konforme Koordinaten überführen. Soll jedoch vom Netze III. Ordnung abwärts an die ebene Triangulirungsberechnung, bzw. die Gleichsetzung der geodätischen mit den ebenen Dimensionen möglich werden,

¹⁾ Für $o_1 = o_2$ wird $1 + V = 1 + \frac{o^2}{2R^2}$

so kann dies bei grösserer Ausdehnung des einheitlichen Netzes zum Aufgeben der bisherigen einen Vermessungsachse, also zur Anlegung besonderer Kleinsysteme nötigen, in denen die Ordinaten höchstens bis 80 oder 90 km gehen, wobei das Maximum der linearen Verzerrung etwa 1:10 000 ist. Die Wahl der lokalen Vermessungsachsen unterliegt keiner mathematischen Beschränkung, selbst wenn die Beibehaltung der geometrischen Abschlussgrenzen der älteren Landesvermessungsblätter dabei Bedingung wäre. Nur würde es sich bei grösserer Konvergenz der lokalen Achsen mit der Richtung der ursprünglichen Vermessungsachse um umständlichere Transformationsarbeit sowie darum handeln, dass die neuen Achsenrichtungen mit den Blatträndern stärker und geometrisch merkbar divergiren. Das wären indess keine mathematischen, sondern lediglich technische Hemmnisse.

Einschneidender ist die bereits in Theil B erörterte, nicht bloss angenommene, sondern thatsächlich bestehende Bedingung, dass die neuen Koordinaten für die älteren Landesvermessungsblätter unmittelbar benützbar bleiben sollen. Das schränkt nicht nur die den neuen Systemen zu gebenden Abmessungen ein, sondern bedingt auch die Definition der neuen Achsen behufs Herbeiführung der geringst möglichsten Achsenkonvergenz. Die Erfüllung dieser Bedingung zwingt daher vermöge der Gl. (10) und (11) wieder dazu, den älteren Ordinatenkreis und dessen Perpendikel im neuen Nullpunkte zu Achsen zu nehmen. Vermittels der Transformationen (6) und (7) gelangt man zu neuen rechtwinklig-sphärischen Koordinaten, die nach den Gl. (19) in rechtwinklig konforme übergeführt werden. Diese beiden Transformationen würden dann zweckmässig in eine verbunden. Sind ξ, η die konformen Koordinaten, a_0, o_0 die des neuen Nullpunktes, so ist nach (19)

$$\left. \begin{aligned} \xi &= x \\ \eta &= y \left(1 + \frac{y^2}{6R^2} \right), \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

sodann mit Berücksichtigung von (7) unter Weglassung der Glieder höherer Ordnung als der zweiten

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \Delta a - \frac{\Delta a}{R^2} \left(o - \frac{o_0}{2} \right) o_0 = \Delta a + (\delta) \\ \eta &= \Delta o + \frac{(\Delta a)^2}{2R^2} o_0 + \frac{(\Delta o)^2}{6R^2} = \Delta o + (\delta') \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

denen die Zurückführungsformeln entsprechen

$$\left. \begin{aligned} a &= (a_0 + \xi) + \frac{\xi}{R^2} \left(\frac{o_0}{2} + \eta \right) o_0 \\ o &= (o_0 + \eta) - \frac{\xi^2}{2R^2} o_0 - \frac{(\Delta o)^2}{6R^2} \end{aligned} \right\} \quad (22a)$$

Diese Transformationen sind demnach nur um Weniges umständlicher als die (7) und gleich diesen leicht tabellarisch einzurichten. Eine sofort anzustellende Untersuchung ergibt, dass die Blatttrichtungsdivergenz hier nur um zu vernachlässigende Glieder vierter Ordnung von der bei (9) entwickelten abweicht und daher wieder die Gleichungen bestehen.

$$c = -\frac{l \cdot \Delta a \cdot o_0}{R^2}; \quad c_e = \pm \frac{l \cdot \Delta a \cdot o_0}{2R^2} \quad (22b)$$

und für $c_e = 0,05 \text{ mm}$

$$0,0001 R^2 = l \cdot \Delta a \cdot o_0 \quad (22c)$$

Die Blattseitenlängen in der Abscissenrichtung sind hier, wie sich aus der Diskussion der Gl. (14) in Verbindung mit dem Konformitätsprincip ergibt, gleich $l \left(1 - \frac{(2o - o_0)o_0}{2R^2} + \frac{(\Delta o)^2}{2R^2} \right)$,

demnach in konformen Koordinaten ausgedrückt, um $\frac{l \cdot (\Delta o)^2}{2R^2}$ vergrößert, während auch die im vorigen Systeme unverändert gebliebenen Blattseiten in der Ordinatenrichtung hier ebenfalls um

$$v_r = \frac{(\Delta o_2)^2 - (\Delta o_1)^2}{6R^2} = l \cdot \frac{(\Delta o)^2}{2R^2}$$

vergrößert erscheinen. Das Verhältniss $\frac{v_r}{l}$ ist für $o = \pm 90 \text{ km}$ noch 1 : 10 000 und gibt somit kein Hinderniss ab, die trigono-

metrischen und geometrischen Arbeiten der Landesvermessung vom Netze III. Ordnung abwärts an durchaus in der Ebene zu führen.

Die gewonnenen Ergebnisse lassen sich dahin aussprechen:

Wenn die Linear-Koordinaten (mit a und $o < 200$ km) einer einheitlich sphärischen Koordinirung in konforme übergeführt werden sollen und dabei die Bedingungen bestehen, dass sodann: 1) die sämtlichen trigonometrischen und geometrischen Arbeiten innerhalb entsprechenden Vernachlässigungsgrenzen in der Ebene zu führen sind, und 2) die neuen Koordinaten ohne technische Schwierigkeiten nicht nur die alten Landesvermessungsblätter wiedergeben, sondern auch für Planarbeiten in diesen unmittelbar als ebene Koordinaten benützlich sein, so führt der einfachste Weg hierzu nur über transformirte (lokale) Koordinaten. Das entsprechende Mittel zu diesem Zwecke liegt dann lediglich in der passenden Wahl der neuen Koordinatenachsen unter veranlasster Begrenzung der lokalen Systeme.

Der Hauptzweck aller dieser Transformationen bestand in dem Wegbringen der sphärischen Beziehungen, bzw. deren unmittelbare Aufnahme in die Koordinaten. Es wird dies gleichermassen erreicht durch transformirte Soldner'sche oder konforme Koordinaten. In theoretischer Beziehung bleiben nach diesen Ueberführungen die bekannten Mängel und Vorzüge beider Koordinatenarten bestehen: Die grössere Richtungsverzerrung und die ungleichmässige Linearverzerrung mit mittlerer geringerer Verzerrung der Flächen bei Soldner, während das Gegenteil für die Konformität gilt. Eine graphische Aufnahme wird sich für das erstere entscheiden können, während der Zahlenmethode der modernen Landesvermessung zumeist die geringere Richtungsverzerrung im Vereine mit der (differentiellen) Gleichmässigkeit der Linearverzerrung als wichtigste Bedingung gilt. Indess kann man sich in einem vorliegenden Kongruenzsystem principiell für die Beibehaltung kongruenter Koordinaten ent-

scheiden, wenn denselben wie hier eine Einrichtung gegeben wird, dass sie technisch als ebene Koordinaten betrachtet werden können und zugleich in den Plänen der einheitlichen Koordinierung unmittelbar verwertbar sind.

D. Es genügt wohl, nur kurz daran zu erinnern, dass durch die Transformationen (7) und (22) wieder sphärische Koordinaten (x, y) , bzw. konforme (ξ, η) gewonnen werden. Zufolge dessen kommt diesen derselbe Anwendungskreis zu, als den ursprünglichen Koordinaten a, o ; sie müssen demnach sämtlich gleichzeitig < 200 km bleiben. Die Bedingung $y < 40$ km oder $\eta < 90$ km gründet sich nur auf die Absicht, innerhalb zulässiger Grenzen mit durchaus ebenen Koordinaten arbeiten zu wollen, und ebenso bezieht sich die in der Gleichung $0,0001 R^2 = l \cdot \Delta a \cdot o$ gegebene Einschränkung der zulässigen Ausdehnung von Δa lediglich auf die unmittelbare Verwertung der neuen Koordinaten in den Messblättern der ursprünglichen (einheitlichen) Koordinierung. Könnte man hiervon absehen, so würde man mit den transformierten (x, y) , bzw. (ξ, η) in den angegebenen Grenzen (200 km) die bekannte sphärische Koordinatenberechnung haben, wie sie im Soldner'schen Systeme durch die Gl. (1) und (15) ausgedrückt ist. Für die Konformität pflegt man allerdings bei der Neuanlage einer umfassenden Landesvermessung einen ganz anderen Weg einzuschlagen, gegründet auf sphäroidische Beziehungen, bzw. geographische Positionen, in Form von Uebertragungen zwischen Ellipsoid oder Kugel und Ebene. Wenn jedoch in einem sphärischen Netze unter Beibehaltung der bisherigen Hauptachse vermittels der Beziehung $\eta = o \left(1 + \frac{o^2}{6 R^2} \right)$ von bereits bestehenden Soldner'schen Koordinaten zu konformen übergegangen worden wäre, so liegt es nahe, die Form der Soldner'schen Berechnungsweise im Wesentlichen beizubehalten, d. h. direkt auf der Kugel zu rechnen. Hierfür kann noch ein weiterer Grund sprechen, wenn nämlich die sphärischen Ergänzungen nicht logarithmisch gerechnet, sondern bezüglich Diagrammen entnommen werden, wie es z. B. im bayerischen Dreiecksnetze zumeist geschieht.

Man kann daher die sphärischen Berechnungsformeln für die konformen Koordinaten den Gl. (1) und (15) anpassen, wobei man in leichter Ableitung erhält:

$$\left. \begin{aligned} \xi_2 &= \xi_1 + m + \frac{m}{2R^2} \left(\eta_1^2 - \frac{n^2}{3} \right) \\ \eta_2 &= \eta_1 + n + \frac{n}{2R^2} \left(\eta_1 + \frac{n}{2} \right)^2 - \frac{m^2}{2R^2} \left(\eta_1 + \frac{n}{3} \right) + \frac{n^3}{24R^2} \\ (\varphi_2) &= (\varphi_1) + 180 + \frac{m}{R^2} \left(\eta_1 + \frac{n}{2} \right) \end{aligned} \right\} (y)$$

In einem bereits bestehenden Landesnetze mit rechtwinklig konformen Koordinaten würden diese Ausdrücke nur für einzelne, neu einzuschaltende Punkte I. oder II. Ordnung zur Anwendung gelangen, soweit hierbei sphärische anstatt sphäroidische Rechnung und Einschränkung auf Glieder zweiter Ordnung zulässig ist. Hierfür reichen die Formeln aus und gestatten mit Hilfe jener Diagramme besonders bei den Netzpunkten II. Ordnung erleichterte Rechnung, da das dritte Glied $\frac{n^3}{24R^2}$ noch für $n=17 \text{ km}$ $< 0,005 \text{ m}$ bleibt. Für die sämtlichen geodätischen Arbeiten vom Netze III. Ordnung abwärts an sind aber diese Formeln ebenso, wie vorher für die Soldner'schen Gl. (1) nachgewiesen, technisch unpraktikabel, weshalb hier gleichfalls zur Gewinnung ebener Koordinaten lokale Systeme und Transformationen entsprechend den Gl. (22) geboten sind.

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: [Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der Bayerischen Akademie der Wissenschaften München](#)

Jahr/Year: 1898

Band/Volume: [1898](#)

Autor(en)/Author(s): Franke Julius H.

Artikel/Article: [Koordinaten-Transformationen in geodätischen Dreiecksnetzen 19-36](#)