Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Classe

der

k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.

1899. Heft I.

München.
Verlag der k. Akademie.
1899.

In Commission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).

Zur Theorie des Doppel-Integrals, des Green'schen und Cauchy'schen Integralsatzes.

Von **Alfred Pringsheim.**

(Eingelaufen 4. Februar.)

Die folgende Mittheilung knüpft an eine frühere an, die ich unter dem Titel: „Zur Theorie des Doppel-Integrals“ im vorigen Bande dieser Berichte veröffentlicht habe[1]. Im Anschlusse an die daselbst abgeleitete Hauptformel:

$$\iint\limits_{(x_0, y_0)}^{(X, Y)} f(x, y)\cdot dx\cdot dy \left\{\begin{aligned} &= \int_{y_0}^{Y} dy \overline{\underline{\int}}_{x_0}^{X} f(x, y)\cdot dx \\ &= \int_{x_0}^{X} dx \overline{\underline{\int}}_{y_0}^{Y} f(x, y)\cdot dy \end{aligned}\right.$$

wird zunächst untersucht, in wieweit die Existenz jenes Doppel-Integrals diejenige der beiden einfachen Integrale $\int_{x_0}^{X} f(x, y)\cdot dx$, $\int_{y_0}^{Y} f(x, y)\cdot dy$ nach sich zieht, bezw. deren Nicht-Existenz offen lässt, und sodann durch Beispiele festgestellt, dass der Fall der Nicht-Existenz in dem als möglich erkannten Umfange auch wirklich vorkommt (§ 1). Dagegen wird in § 2 durch Construction einer eigenthümlichen Gattung von Punktmengen gezeigt, dass selbst die durchgängige Existenz jener einfachen und der aus ihnen gebildeten iterirten Integrale, sowie die Gleichheit dieser letzteren noch keines-

---

[1]) Sitz.-Ber. Bd. 28 (1898), p. 59—74.

wegs die Existenz des Doppel-Integrals verbürgt. Das Resultat des § 1 wird hierauf benützt, um den Green'schen Satz über die Reduction eines Flächen-Integrals auf ein Linien-Integral unter etwas allgemeineren Voraussetzungen zu beweisen, als bisher wohl geschehen ist (§ 3). Die hierbei auftretende Eventualität von Integralen nicht-integrabler Differential-Quotienten führt zu einer Umgestaltung der fundamentalen Beziehung:

$$\int_{x_0}^{X} f'(x) \cdot dx = f(X) - f(x_0)$$

für den Fall eines nicht-integrablen $f'(x)$, woraus dann noch ein zweiter, etwas kürzerer Beweis des Green'schen Satzes in dem fraglichen Umfange resultirt (§ 4). Die vorstehenden Ergebnisse werden dann schliesslich zu entsprechender Verallgemeinerung des Cauchy'schen Integralsatzes benützt (§ 5).

---

§ 1.

Bedeutet $f(x, y)$ eine im Rechtecke $[x_0 \leq x \leq X,\ y_0 \leq y < Y]$ endlich bleibende[1]) Function, so bestehen die Beziehungen:

$$(1) \qquad \int\!\!\int_{(x_0, y_0)}^{(X, Y)} f(x, y) \cdot dx \cdot dy \begin{cases} = \int_{y_0}^{Y} dy \overline{\int_{x_0}^{X}} f(x, y) \cdot dx \\ = \int_{y_0}^{Y} dy \cdot \underline{\int_{x_0}^{X}} f(x, y) \cdot dx \end{cases}$$

allemal, wenn das betreffende Doppel-Integral existirt.[2])
Ist dies also der Fall, so hat man:

$$(2) \qquad \int_{y_0}^{Y} dy \left\{ \overline{\int_{x_0}^{X}} f(x, y) \cdot dx - \underline{\int_{x_0}^{X}} f(x, y) \cdot dx \right\} = 0.$$

---

[1]) D. h. $|f(x, y)| < G$ für $x_0 \leq x \leq X$, $y_0 \leq y \leq Y$.
[2]) A. a. O. p. 69, Gl. (20).

Da nun, vermöge der Bedeutung des „oberen" und „unteren" Integrals[1]) die in der Klammer stehende Differenz, welche man zweckmässig als die Integral-Schwankung von $\int_{x_0}^{X} f(x, y)\, dx$ bezeichnen kann, niemals negativ ausfällt, so folgt aus einer einfachen Umformung der Riemann'schen Integrabilitäts-Bedingung,[2]) dass Gl. (2) dann und nur dann besteht, wenn für eine im Intervalle (y_0, Y) überall dichte Menge von Werthen y':

$$(3) \qquad \overline{\int_{x_0}^{X}} f(x, y') \cdot dx - \underline{\int_{x_0}^{X}} f(x, y')\, dx = 0,$$

so dass also $\int_{x_0}^{X} f(x, y') \cdot dx$ existirt, und wenn ausserdem die Stellen y, für welche:

$$(4) \qquad \overline{\int_{x_0}^{X}} f(x, y) \cdot dx - \underline{\int_{x_0}^{X}} f(x, y) \cdot dx > \varepsilon,$$

bei beliebig kleinem $\varepsilon > 0$ eine unausgedehnte Menge bilden.[3]) (NB. Dabei können immerhin die Stellen y, für welche jene Differenz von Null verschieden ist, auch eine ausgedehnte z. B. überall dichte Menge bilden).

Da im übrigen unter der gemachten Voraussetzung auch die zu (1) analogen Gleichungen bestehen:

$$(5) \qquad \int\!\!\int_{(x_0, y_0)}^{(X, Y)} f(x, y) \cdot dx \cdot dy \left\{ \begin{aligned} &= \int_{x_0}^{X} dx \overline{\int_{y_0}^{Y}} f(x, y) \cdot dy \\ &= \int_{x_0}^{X} dx \underline{\int_{y_0}^{Y}} f(x, y) \cdot dy, \end{aligned} \right.$$

so gewinnt man den Satz:

---

[1]) A. a. O. p. 64.

[2]) S. z. B. Dini-Lüroth, p. 359, Nr. 14.

[3]) Dini-Lüroth, p. 355, Nr. 9.

Existirt für die Function $f(x, y)$ ein über das Rechteck $[x_0 \leqq x \leqq X,\ y_0 \leqq y \leqq Y]$ erstrecktes eigentliches Doppel-Integral, so existiren die einfachen Integrale:

$$\int_{x_0}^{X} f(x, y) \cdot dx, \qquad \int_{y_0}^{Y} f(x, y) \cdot dy$$

für je eine im Intervalle (y_0, Y) bezw. (x_0, X) *überall dichte* Menge. Die Stellen y bezw. x, wo jene Integrale *nicht* existiren, können zwar ebenfalls *überall dicht* liegen: jedoch bilden diejenigen Stellen, für welche die Integral-Schwankung eine beliebig kleine positive Zahl ε übersteigt, allemal eine *unausgedehnte* Menge.[1])

Beispiele: I.[2]) Jede Zahl x lässt sich durch einen systematischen Bruch mit beliebig gewählter ganzzahliger Basis $b \geqq 2$ darstellen und zwar auf eine einzige Weise, wenn man Brüche mit der Periode $(b - 1)$ ausschliesst. Bezeichnet man die Anzahl der hierbei auftretenden Bruchstellen mit p_x (wo

---

[1]) Unrichtig ist es also, mit Harnack (Elem. der Diff.- und Integr.-Rechnung, p. 313) anzunehmen, dass die Nicht-Existenz jener einfachen Integrale allemal auf eine unausgedehnte Menge y bezw. x beschränkt sein müsse, worauf schon Herr Stolz im Anschlusse an Du Bois Reymond (Journ. f. Math. 94 (1883), p. 278) aufmerksam gemacht hat (Math. Ann., Bd. 26 (1886), p. 93, Fussn.). Auf der andern Seite ist es aber für den Gültigkeits-Beweis der Formel (1) bezw. (5) auch nicht nothwendig, diese Beschränkung mit Herrn Stolz ausdrücklich unter die Voraussetzungen aufzunehmen, wie ich in der oben citirten Mittheilung des näheren erörtert habe.

[2]) Dieses Beispiel ist lediglich eine etwas allgemeinere und genauere Fassung des a. a. O. p. 71 von mir gegebenen, welches letztere ein Versehen enthält. Es müsste auf p. 72, Gl. (6) heissen:

$$f(x, y) = \frac{1}{1 + p_x} + \frac{1}{1 + q_y},$$

wenn beide Veränderliche x, y durch endliche Decimalbrüche darstellbar sind, in jedem anderen Falle:

$$f(x, y) = 0.$$

also: $p_x \geqq 0$), so mag x eine systematische Zahl heissen, wenn p_x endlich ist, und (x, y) als systematischer Punkt bezeichnet werden, wenn beide Coordinaten x, y systematische Zahlen sind. Für ein systematisches x hat alsdann $\frac{1}{1+p_x}$ einen bestimmten positiven Werth $\leqq 1$, für ein nicht-systematisches wird man diesem Symbole und dem allgemeineren: $\frac{\nu}{\nu + p_x}$ naturgemäss den Werth Null beizulegen haben. Definirt man sodann q_x durch die Gleichung:

$$q_x = \lim_{\nu=\infty} \frac{\nu}{\nu + p_x}, \tag{6}$$

so hat man offenbar:

$$\begin{cases} q_x = 1, & \text{wenn } x \text{ systematisch}, \\ q_x = 0, & \text{wenn } x \text{ nicht-systematisch}. \end{cases} \tag{7}$$

Nun werde gesetzt:

$$f(x, y) = \frac{q_y}{1 + p_x} + \frac{q_x}{1 + p_y}, \tag{8}$$

so hat man:

$$\begin{cases} f(x, y) = \dfrac{1}{1+p_x} + \dfrac{1}{1+p_y}, & \text{wenn } (x, y) \text{ systematisch}, \\ f(x, y) = 0, & \text{wenn } (x, y) \text{ nicht-systematisch}. \end{cases} \tag{9}$$

Da es in jedem endlichen Intervalle (x_0, X) bezw. (y_0, Y) nur eine endliche Anzahl von Werthen x bezw. y giebt, für welche $1 + p_x < \frac{1}{\varepsilon}$ bezw. $1 + p_y < \frac{1}{\varepsilon}$, also auch in dem entsprechenden Rechtecke nur eine endliche Anzahl von Punkten, für welche $f(x, y) > 2\varepsilon$, so erkennt man unmittelbar die Richtigkeit der Beziehungen:

$$\int_{x_0}^{X} \frac{1}{1+p_x} \cdot dx = 0, \quad \int_{y_0}^{Y} \frac{1}{1+p_y} \cdot dy = 0, \quad \iint_{(x_0, y_0)}^{(X, Y)} f(x, y) \cdot dx \cdot dy = 0. \tag{10}$$

Daraus folgt weiter:

$$
(11)\quad \begin{cases} \int_{x_0}^{X} f(x,y)\cdot dx = \frac{1}{1+p_y}(X-x_0), & \int_{x_0}^{X} f(x,y)\cdot dx = 0, \\ \int_{y_0}^{Y} f(x,y)\cdot dy = \frac{1}{1+p_x}(Y-y_0), & \int_{y_0}^{Y} f(x,y)\cdot dy = 0. \end{cases}
$$

Somit existiren die Integrale $\int_{x_0}^{X} f(x,y)\cdot dx$ bezw. $\int_{y_0}^{Y} f(x,y)\cdot dy$ nur für alle nicht-systematischen Werthe y bezw. x, während für die ebenfalls überall dicht liegenden systematischen die betreffende Integral-Schwankung den Werth $\frac{1}{1+p_y}(X-x_0)$ bezw. $\frac{1}{1+p_x}(Y-y_0)$ besitzt, der jedoch stets nur für eine endliche (also sicherlich unausgedehnte) Menge y bezw. x ein beliebig kleines $\varepsilon > 0$ übersteigt. Daraus folgt dann schliesslich, dass auch:

$$
(12)\qquad \int_{y_0}^{Y} dy \int_{x_0}^{X} f(x,y)\cdot dx = \int_{x_0}^{X} dx \int_{y_0}^{Y} f(x,y)\cdot dy = 0
$$

wird, übereinstimmend mit dem Werthe des Doppel-Integrals (10).

II. Bei dem vorigen Beispiele bildeten die Punkte (x, y), für welche $f(x, y)$ einen von Null verschiedenen Werth besitzt, eine in dem betreffenden Rechtecke überall dichte, aber abzählbare Menge (nämlich die Menge der systematischen Punkte). Um eine Function zu erhalten, bei welcher die entsprechende Rolle einer nicht-abzählbaren Menge zufällt, setze man:

$$
(13)\qquad \varphi(x,y) = (q_x - q_y)^2 \cdot \left(\frac{1}{1+p_x} + \frac{1}{1+p_y}\right).
$$

Theilt man die nicht-systematischen Punkte (x, y) in unsystematische und halbsystematische, je nachdem jede der beiden Coordinaten oder nur eine derselben eine nicht-systematische Zahl ist, so hat man:

$$(14a) \qquad \varphi(x, y) = 0, \quad \text{wenn } (x, y) \text{ systematisch oder unsystematisch,}$$

dagegen:

$$(14b) \qquad \varphi(x, y) \begin{cases} = \dfrac{1}{1+p_x}, & \text{wenn } x \text{ systematisch, } y \text{ unsystematisch,} \\[2ex] = \dfrac{1}{1+p_y}, & \text{wenn } y \text{ systematisch, } x \text{ unsystematisch,} \end{cases}$$

so dass also (x, y) für die nicht-abzählbare Menge der halbsystematischen Punkte von Null verschieden ausfällt. Dennoch ist die Menge der Punkte, für welche $\varphi(x, y) > \varepsilon$ wird, eine zweidimensional-unausgedehnte, da dieselben nur auf einer endlichen Menge von Linien: $y = p_x$ bezw. $x = p_y$ (wenn auch daselbst überall dicht) vorkommen. In Folge dessen existirt wiederum das betreffende Doppel-Integral (mit dem Werthe 0), und es gelten im übrigen die Gleichungen (11), (12) genau wie im Falle I.

III. Zu analogen Functions-Bildungen kann man auch gelangen, wenn man statt der Eintheilung der Zahlen in systematische und nicht-systematische diejenige in rationale und irrationale zu Grunde legt. Ist x rational und setzt man $x = \dfrac{m_x}{n_x}$, so ist n_x eindeutig bestimmt, wenn man m_x, n_x als relativ prime ganze Zahlen und $n_x > 0$ annimmt. Im Falle eines irrationalen x mag dann wiederum dem Symbole $\dfrac{1}{n_x}$ bezw. $\dfrac{\nu}{\nu + n_x}$ der Werth Null beigelegt werden, so dass also:

$$(15) \qquad r_x = \lim_{\nu=\infty} \frac{\nu}{\nu + n_x} \begin{cases} = 1, & \text{wenn } x \text{ rational,} \\ = 0, & \text{wenn } x \text{ irrational.} \end{cases}$$

Setzt man sodann:

$$(16)\qquad \begin{cases} f(x,y) = \dfrac{r_y}{1+n_x} + \dfrac{r_x}{1+n_y} \\ \varphi(x,y) = (r_x - r_y)^2 \cdot \left\{ \dfrac{1}{1+n_x} + \dfrac{1}{1+n_y} \right\}, \end{cases}$$

so haben $f(x,y)$, $\varphi(x,y)$ ganz analoge Integral-Eigenschaften, wie die entsprechenden Functionen in I und II.

§ 2.

Der Satz des vorigen Paragraphen in Verbindung mit Gl. (1) und (5) lehrt, dass die Existenz der Integrale $\int\limits_{x_0}^{X} f(x,y)\cdot dx$. $\int\limits_{y_0}^{Y} f(x,y)\cdot dy$ für je eine im Intervalle (y_0, Y) bezw. (x_0, X) überall dichte Werthmenge, sowie die Beziehung:

$$(17)\qquad \int\limits_{y_0}^{Y} dy \int\limits_{x_0}^{X} f(x,y)\cdot dx = \int\limits_{x_0}^{X} dx \overline{\int\limits_{y_0}^{Y}} f(x,y)\cdot dy$$

nothwendige Bedingungen für die Existenz des Doppel-Integrals $\int\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(X,Y)} f(x,y)\cdot dx\cdot dy$ bilden. Ob dieselben auch hinreichend seien, entzieht sich zunächst der Beurtheilung. Soviel steht freilich fest, dass aus der Existenz und Gleichheit zweier Grenzwerthe von der Form $\lim\limits_{\varepsilon=0}\lim\limits_{\delta=0}\varphi(\delta,\varepsilon)$ und $\lim\limits_{\delta=0}\lim\limits_{\varepsilon=0}\varphi(\delta,\varepsilon)$ im allgemeinen nicht ohne weiteres auf die Existenz von $\lim\limits_{\delta=0,\,\varepsilon=0}\varphi(\delta,\varepsilon)$ geschlossen werden darf.[1]) Andererseits wird man bei der besonderen Art der hier vorliegenden Grenzwerthe die Richtigkeit der fraglichen Schlussfolgerung für äusserst wahrscheinlich halten müssen, zumal, wenn

[1]) Vgl. Sitz.-Ber. 27 (1897), p. 107.

man beachtet, dass ohne Beschränkung der Allgemeinheit $f(x, y)$ durchweg als positiv vorausgesetzt werden kann.[1]) Nichtsdestoweniger erweist sich jene naheliegende Vermuthung als unzutreffend, selbst wenn die betreffenden Voraussetzungen noch merklich eingeschränkt werden. Es lässt sich nämlich folgendes zeigen:

Ist $f(x, y)$ eine im Rechtecke $[a \leq x \leq A,\ b < y \leq B]$ unter einer festen Grenze bleibende positive Function und bezeichnet man mit x_0, X, y_0, Y beliebige den Bedingungen: $a \leq x_0 < X < A$, $b \leq y_0 < Y \leq B$, genügende Zahlen, so braucht *kein* Doppel-Integral von der Form:

$$\int\int_{(x_0, y_0)}^{(X, Y)} f(x, y) \cdot dx \cdot dy \tag{18}$$

zu existiren, auch wenn die einfachen Integrale:

$$\int_a^A f(x, y) \cdot dx, \qquad \int_b^B f(x, y) \cdot dy \tag{19}$$

für *jedes* y des Intervalles (b, B) bezw. für *jedes* x des Intervalles (a, A) existiren und ausserdem stets die Beziehung besteht:

$$\int_{y_0}^{Y} dy \int_{x_0}^{X} f(x, y) \cdot dx = \int_{x_0}^{X} dx \int_{y_0}^{Y} f(x, y) \cdot dy, \tag{20}$$

---

[1]) Da nämlich ein für allemal $|f(x, y)| < G$ angenommen wird, so hat man: $f(x, y) + G > 0$. Aus der Existenz von:

$$\int\int_{(x_0, y_0)}^{(X, Y)} (f(x, y) + G)\, dx \cdot dy$$

würde aber sofort auch diejenige von:

$$\int\int_{(x_0, y_0)}^{(X, Y)} f(x, y) \cdot dx \cdot dy$$

sich ergeben.

(welche natürlich auch die Existenz[1]) der betreffenden iterirten Integrale involvirt).

Da die nothwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz des Doppel-Integrales darin besteht, dass die Stellen (x, y), an welchen $f(x, y)$ Sprünge $> \varepsilon$ erleidet, eine zweidimensional-unausgedehnte Menge bilden,[2]) so wird es für den Nachweis der obigen Behauptung im wesentlichen nur darauf ankommen, die Existenz von Punktmengen festzustellen, die zwar in einem zweidimensionalen Gebiete, dagegen auf keiner horizontalen oder vertikalen Linie ausgedehnt sind. Ob derartige Mengen bisher schon bemerkt worden sind, ist mir nicht bekannt. Ich will daher zunächst zeigen, wie man Mengen definiren kann, welche die

---

[1]) Man bemerke, dass die Existenz von:

$$\int_{x_0}^{X} dx \int_{y_0}^{Y} f(x, y) \cdot dy$$

für $a \leqq x_0 < X < A,\ b < y_0 < Y \leqq B$, auch bei durchweg positivem $f(x, y)$ merklich mehr besagt, als diejenige von:

$$\int_{a}^{A} dx \int_{b}^{B} f(x, y) \cdot dy.$$

Setzt man z. B.

$$f(x, y) = 1 \text{ für rationale } x,$$
$$f(x, y) = 2y \text{ für irrationale } x,$$

so wird:

$$\int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y) \cdot dy = 1,$$

während

$$\int_0^1 dx \int_0^Y f(x, y)\, dy$$

für $Y < 1$ nicht existirt. (Uebrigens existirt in diesem Falle auch nicht:

$$\int_0^1 dy \int_0^1 f(x, y) \cdot dx.$$

Vgl. Thomae, Zeitschr. f. Math. 23 (1878), p. 67).

[2]) Stolz, a. a. O. p. 90.

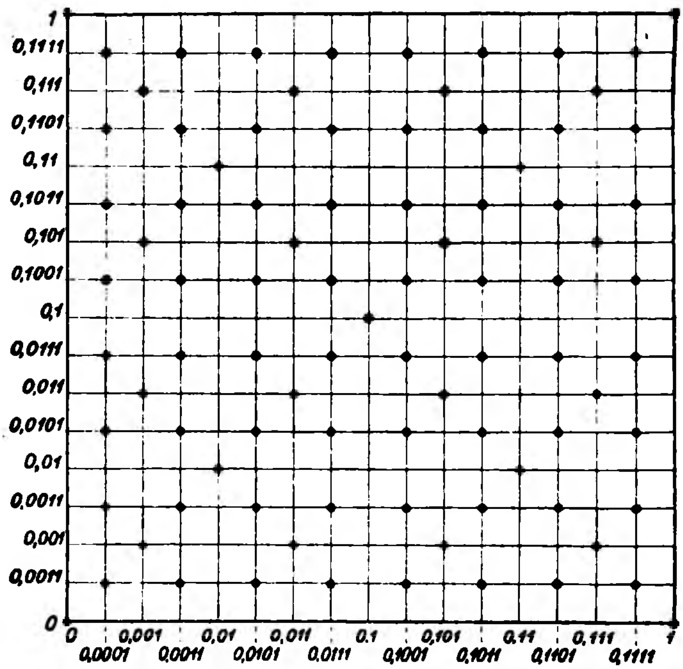
fragliche Eigenschaft gewissermaassen in höchster Vollkommenheit besitzen: dieselben liegen nämlich in jedem zweidimensionalen Gebiete überall dicht, während sie auf jeder Horizontalen oder Vertikalen nur in endlicher Anzahl vorkommen.

Man denke sich wieder wie in § 1 die Zahlen x, y als systematische Brüche mit beliebiger Basis b dargestellt. Ist dann x' irgend eine systematische (d. h. durch einen endlichen Bruch darstellbare) Zahl, $p_{x'}$ die zugehörige Bruchstellen-Anzahl, so sollen dem Werthe x' alle diejenigen y' zugeordnet werden, für welche $p_{y'} = p_{x'}$ — vice versa. Werden zugleich die x bezw. y auf ein ganz beliebiges endliches Intervall (a, A) bezw. (b, B) eingeschränkt, so gehört zu jedem x' nur eine endliche Anzahl von y' (nämlich innerhalb jedes ganzzahligen Intervalles z. B. $(0, 1)$ genau $b p_{x'} - 1\,(b-1))$ — und umgekehrt. Es liegt also auf jeder Vertikalen $\xi = x'$, sowie auf jeder Horizontalen $\eta = y'$ stets nur eine endliche Anzahl von Punkten (x', y'), während auf den Vertikalen $\xi = x$ und den Horizontalen $\eta = y$, wenn x, y nicht-systematisch, überhaupt keine Punkte (x', y') liegen. Nichtsdestoweniger liegen die Punkte (x', y') in jedem zweidimensionalen Gebiete überall dicht. Betrachtet man nämlich irgend eine um 45° gegen die Axen geneigte, durch den Anfangspunkt gehende Linie:

$$\eta = \xi + \alpha,$$

wo α eine positive oder negative systematische Zahl bezw. 0 bedeutet, so wird $p_\eta = p_\xi$, sobald $p_\xi > p_\alpha$ (übrigens auch schon für $p_\xi = p_\alpha$, mit Ausschluss derjenigen ξ, deren letzte Bruchstelle diejenige von α zu 0 oder b ergänzt). Darnach gehören alle Punkte jener Geraden, deren Abscissen systematische Zahlen mit einem $p_\xi > p_\alpha$ sind, zur Menge der (x', y'), und die letzteren liegen also auf jeder solchen Geraden überall dicht. Da aber bei veränderlichem α auch diese Geraden überall dicht liegen, so folgt in der That, dass die Punkte (x', y') in jedem zweidimensionalen Gebiete überall dicht liegen.

Die beistehende Figur, welche sich auf den Fall $0 \leqq x \leqq 1$, $0 \leqq y \leqq 1$ und $b = 2$ bezieht, mag die Anordnung der Punkte (x', y') bis zu $p_{x'} = p_{y'} = 4$ veranschaulichen. (NB. Die Mittelpunkte der kleinen Quadrate würden diejenigen (x', y') repräsentiren, für welche $p_{x'} = p_{y'} = 5$.)



Punktmengen von ähnlicher Art kann man wiederum auch erhalten, wenn man von der Eintheilung der Zahlen x, y in rationale und irrationale ausgeht. Man ordne jedem rationalen $x' = \frac{m_{x'}}{n_{x'}}$ alle diejenigen $y' = \frac{m_{y'}}{n_{y'}}$ zu, für welche $n_{y'} = n_{x'}$ — vice versa. Zu jedem x' gehört dann wiederum für jedes endliche y-Intervall nur eine endliche Anzahl von Werthen y' (nämlich im y-Intervalle $(0,1)$ die $\varphi(n_{x'})$ Werthe: $\frac{m}{n_{x'}}$, für welche $m < n_{x'}$ und relativ prim zu $n_{x'}$) — und umgekehrt.

Die Punkte (x', y') kommen also wiederum auf jeder begrenzten Vertikalen oder Horizontalen nur in endlicher Anzahl (bezw. gar nicht) vor, während sie in jedem zweidimensionalen Gebiete wieder überall dicht liegen: letzteres kann in analoger Weise erkannt werden, wie in dem zuvor betrachteten Falle und folgt übrigens auch unmittelbar daraus, dass die dort für $b = 2$ resultirende Punktmenge lediglich eine Theilmenge der hier definirten bildet. —

Bedeutet jetzt (x', y') irgend eine Punktmenge der eben charakterisirten Art und setzt man:

$$(21) \qquad \begin{cases} \qquad\qquad\quad f(x', y') = c', \\ \text{im übrigen: } f(x, y) = c, \end{cases}$$

wo c, c' zwei beliebige von einander verschiedene Constanten bedeuten, so erscheint offenbar die Existenz jedes Doppel-Integrals von der Form:

$$\int\!\!\int_{(x_0, y_0)}^{(X, Y)} f(x, y) \cdot dx \cdot dy$$

definitiv ausgeschlossen. Nichtsdestoweniger hat man:

$$(22) \quad \int_{x_0}^{X} f(x, y) \cdot dx = c \cdot (X - x_0), \quad \int_{y_0}^{Y} f(x, y) \cdot dy = c \cdot (Y - y_0),$$

gleichgültig, ob y bezw. x zu den Zahlen y' bezw. x' gehört oder nicht. Daraus folgt dann weiter:

$$(23) \quad \int_{y_0}^{Y} dy \int_{x_0}^{X} f(x, y) \cdot dx = \int_{x_0}^{X} dx \int_{y_0}^{Y} f(x, y) \cdot dy = c \cdot (X - x_0) \cdot (Y - y_0),$$

q. e. d.

Schliesslich bemerke ich noch folgendes. Ordnet man in dem zuerst betrachteten Falle jedem x' mit endlichem $p_{x'}$ alle diejenigen y' zu, welche durch die Bedingung bestimmt sind: $p_{y'} \leqq p_{x'}$, so liegen auf jeder Vertikalen ebenfalls nur eine endliche Anzahl von Punkten (x', y') (bezw. gar keine). Da aber andererseits zu jedem y' alle diejenigen x' gehören, für welche $p_{x'} \geqq p_{y'}$, so liegen die Punkte (x', y') auf jeder zu irgend einem y' gehörigen Horizontalen überall dicht. Definirt man nun bei dieser veränderten Bedeutung der Punkte (x', y') die Function $f(x, y)$ wiederum durch die Gleichungen (21), so wird auch hier:

$$
(24) \quad \begin{cases} \int_{y_0}^{Y} f(x, y) \cdot dy = c \cdot (Y - y_0), \\ \int_{x_0}^{X} dx \int_{y_0}^{Y} f(x, y) \cdot dy = c \cdot (X - x_0) \cdot (Y - y_0), \end{cases}
$$

während das Integral:

$$
(25) \qquad \int_{x_0}^{X} f(x, y') \cdot dx
$$

die Integral-Schwankung $|(c - c') \cdot (X - x_0)|$ besitzt, und somit:

$$
\int_{y_0}^{Y} dy \int_{x_0}^{X} f(x, y) \cdot dx
$$

nicht existirt.[1])

---

§ 3.

Ich habe bei früherer Gelegenheit[2]) die Behauptung aufgestellt, dass für die Gültigkeit des Green'schen Satzes:

$$
(26) \qquad \iint \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \cdot dy = \int (P \cdot dx + Q \cdot dy)
$$

die Existenz der Doppel-Integrale: $\iint \frac{\partial Q}{\partial x} \cdot dx \cdot dy$, $\iint \frac{\partial P}{\partial y} \cdot dx \cdot dy$ in Verbindung mit der Eindeutigkeit und Stetigkeit von $Q(x, y)$, $P(x, y)$ eine hinreichende Bedingung

---

1) Dieses Beispiel erscheint mir für die in Frage kommende Möglichkeit wesentlich prägnanter, als das auf p. 48 Fussn. 1 angeführte des Herrn Thomae, da hier die Existenz der Integrale (24) von der Wahl der Grenzen völlig unabhängig ist.

2) Sitz.-Ber. 25 (1895), p. 71, Fussnote.

bilde (ohne dass es also nothwendig wäre, über die Existenz von: $\int \frac{\partial Q}{\partial x} \cdot dx$, $\int \frac{\partial P}{\partial y} \cdot dy$ irgendwelche Voraussetzungen zu machen). Die nämliche Behauptung ist vielleicht auch schon anderweitig ausgesprochen,[1]) aber, soviel ich weiss, niemals wirklich bewiesen worden. Und da andererseits ihre Richtigkeit keineswegs ohne weiteres einleuchtet und neuerdings auch wirklich angezweifelt worden ist,[2]) so dürfte ein solcher Nachweis vielleicht nicht überflüssig erscheinen. Dabei genügt es offenbar in der Hauptsache, den folgenden Satz zu beweisen:

Ist $Q(x, y)$ eindeutig, endlich und stetig für das Rechteck $[x_0 < x \leq X,\ y_0 < y \leq Y]$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ für jede einzelne Stelle im Innern eindeutig definirt und numerisch unter einer endlichen Grenze bleibend, so hat man:

$$(27)\quad \int\int_{(x_0, y_0)}^{(X\,Y)} \frac{\partial Q}{\partial x} \cdot dx \cdot dy = \int_{y_0}^{Y} \{Q(X, y) - Q(x_0, y)\} \cdot dy,$$

falls jenes Doppel-Integral *existirt.*

Beweis. Aus dem Satze des § 1 folgt, dass das Integral $\int_{x_0}^{X} \frac{\partial Q(x, y')}{\partial x} \cdot dx$ für eine im Intervalle (y_0, Y) überall dichte Menge von Werthen y' existirt, so dass also:

---

[1]) So könnte z. B. eine Stelle in Herrn Thomae's „Abriss einer Theorie der complexen Functionen etc." (2. Aufl., Halle 1878), p. 31, Fussn. in diesem Sinne gedeutet werden. Da aber dort ausdrücklich verlangt wird, dass die betreffenden Functionen „die doppelte Integration in eindeutigem Sinne zulassen sollen", so kann hierunter möglicher Weise auch die Existenz der betreffenden iterirten Integrale mit einbegriffen sein.

[2]) Herr Osgood (New-York M. S. Bullet. (2), V (1898), p. 86) setzt ausdrücklich noch die Existenz von $\int \frac{\partial Q}{\partial x} \cdot dx$, $\int \frac{\partial P}{\partial y} \cdot dy$ voraus, da er (wie ich einer brieflichen Mittheilung entnehme) diejenige des Doppel-Integrals allein nicht für ausreichend hält.

$$(28)\quad \int_{x_0}^{X} \frac{\partial Q(x,y')}{\partial x} \cdot dx = \int_{x_0}^{X} \frac{\partial Q(x,y')}{\partial x} \cdot dx = Q(X,y') - Q(x_0,y').$$

Da nun vermöge der Beziehung (§ 1, Gl. (1)):

$$(29)\quad \int_{y_0}^{Y} dy \int_{x_0}^{X} \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} \cdot dx = \iint_{(x_0,y_0)}^{(X,Y)} \cdot dx \cdot dy$$

$\int_{x_0}^{X} \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} \cdot dx$ eine im Intervalle (y_0, Y) nach y integrirbare Function vorstellt, welche nach Gl. (28) mit der ebenfalls integrirbaren (weil stetigen) Function $\{Q(X,y) - Q(x_0,y)\}$ daselbst für eine überall dichte Werthmenge y' übereinstimmt, so hat man nach einem bekannten Satze:[1])

$$(30)\quad \int_{y_0}^{Y} dy \int_{x_0}^{X} \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} \cdot dx = \int_{y_0}^{Y} \{Q(X,y) - Q(x_0,y)\} \cdot dy,$$

und daher schliesslich:

$$(27)\quad \iint_{(x_0,y_0)}^{(X,Y)} \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} \cdot dx \cdot dy = \int_{y_0}^{Y} \{Q(X,y) - Q(x_0,y)\} \cdot dy,$$

q. e. d.

Das analoge gilt sodann für: $\iint_{(x_0,y_0)}^{(X,Y)} \frac{\partial P}{\partial y} \cdot dx \cdot dy$. Und da sich die vorstehenden Ergebnisse ohne Schwierigkeit auf den Fall übertragen lassen,[2]) dass an die Stelle des Rechtecks irgend ein zusammenhängender, von einer oder mehreren gegen die Coordinaten-Richtungen abtheilungsweise monotonen (stetigen)[3]) Rand-Curven begrenzter Bereich tritt, so er-

---

[1]) Dini-Lüroth, p. 356, Nr. 10.

[2]) Vgl. Sitz.-Ber. 25 (1895), p. 56; 28 (1898), p. 73.

[3]) Die Stetigkeit ist eigentlich implicite schon in der Angabe enthalten, dass die betreffenden Curven die vollständige Begrenzung eines Bereiches bilden sollen.

giebt sich die Gültigkeit des Green'schen Satzes in dem folgenden Umfange:

Sind $Q(x, y)$, $P(x, y)$ eindeutig definirt und stetig im Innern und auf der Grenze C eines zusammenhängenden, von einer oder mehreren gegen die Coordinaten-Richtungen abtheilungsweise monotonen[1]) Curven begrenzten Bereiches T, ausserdem $\frac{\partial Q}{\partial x}$, $\frac{\partial P}{\partial y}$ eindeutig definirt und numerisch unter einer endlichen Grenze bleibend im Innern von T, so hat man:

$$(31) \qquad \iint_{(T)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \cdot dT = \int_{(+C)} (P \cdot dx + Q \cdot dy),$$

wenn die Doppel-Integrale $\iint_{(T)} \frac{\partial Q}{\partial x} \cdot dT$, $\iint_{(T)} \frac{\partial P}{\partial y} \cdot dT$ *existiren*, d. h. wenn die Stellen, an welchen $\frac{\partial Q}{\partial x}$, $\frac{\partial P}{\partial y}$ Sprünge $> \varepsilon$ erleiden, eine *zweidimensional unausgedehnte* Menge bilden.

§ 4.

Der im vorigen Paragraphen gelieferte Nachweis, dass für die Gültigkeit des Green'schen Satzes eine besondere Voraussetzung bezüglich der Existenz der einfachen Integrale $\int_{x_0}^{X} \frac{\partial Q}{\partial x} \cdot dx$, $\int_{y_0}^{Y} \frac{\partial P}{\partial y} \cdot dy$ nicht erforderlich ist, gewinnt durch den Umstand erhöhte Bedeutung, dass der hiernach als möglich zugelassene

[1]) Dabei ist also keineswegs ausgeschlossen, dass die Curven gegen irgendwelche anderen Richtungen unendlich viele Maxima und Minima (sogar überall dicht) besitzen.

Fall der Nicht-Existenz jener Integrale auch wirklich eintreten kann: es giebt nämlich thatsächlich solche in einem Intervalle $x_0 \leq x \leq X$ stetige Functionen $f(x)$, welche durchweg ein eindeutiges und numerisch unter einer endlichen Schranke bleibendes, jedoch nicht integrables $f'(x)$ besitzen, d. h. für welche das bestimmte Integral $\int_{x_0}^{X_0} f'(x) \cdot dx \; (X_0 \leq X)$ nicht existirt. Die Möglichkeit derartiger Functionen ist wohl zuerst von Dini nachdrücklich hervorgehoben und durch den Nachweis des Satzes gestützt worden, dass eine Function mit überall dichten Oscillationen wohl eine eindeutige und endlich bleibende, aber niemals eine integrable Derivirte besitzen könne.[1] Die wirkliche Existenz ist sodann von Volterra[2] durch Aufstellung eines Beispiels direkt dargethan und späterhin auch speciell in der Richtung des angeführten Dini'schen Satzes durch Koepcke's differenzirbare Function mit überall dichten Oscillationen[3] bestätigt worden.

Ist nun aber einmal die Existenz solcher $f(x)$ definitiv festgestellt, so liegt die Frage nahe: Was tritt in diesem Falle an die Stelle der Gleichung:

$$\int_{x_0}^{X} f'(x) \cdot dx = f(X) - f(x_0), \tag{32}$$

welche ja nur für integrable $f'(x)$ einen Sinn hat? Auf diese Frage lässt sich mit Benützung des allemal existirenden oberen und unteren Integrals eine ganz präcise Antwort geben.

Schaltet man zwischen x_0 und X die Zwischenwerthe x_1, x_2, ... x_{n-1} ein, so hat man identisch:

$$f(X) - f(x_0) = \sum_1^n{}_\nu \frac{f(x_\nu) - f(x_{\nu-1})}{x_\nu - x_{\nu-1}} \cdot (x_\nu - x_{\nu-1}) \quad (x_n = X). \tag{33}$$

[1]) Dini, Fondamenti § 200 (Dini-Lüroth, p. 383).

[2]) Giorn. di Mat. T. 19 (1881), p. 335.

[3]) Math. Ann. Bd. 29 (1887), p. 123; 34 (1889), p. 161; 35 (1890), p. 104. — Hamb. Mitth. Bd. II (1890), p. 128.

Ist jetzt $f(x)$ im Intervalle $x_0 \leqq x < X$ stetig und zum mindesten für $x_0 < x < X$ mit einer eindeutigen Derivirten begabt, so gestatten die betreffenden Differenzen-Quotienten die Anwendung des (Rolle'schen) Mittelwerthsatzes, d. h. es ergiebt sich:

$$(34)\quad f(X) - f(x_0) = \sum_1^n {}_\nu\, f'_\nu(\xi_\nu) \cdot (x_\nu - x_{\nu-1}), \text{ wo: } x_{\nu-1} < \xi_\nu < x_\nu.$$

Unter der weiteren Annahme, dass $f'(x)$ im Intervalle (x_0, X) numerisch unter einer endlichen Grenze bleibt, besitzt $f'(x)$ in jedem Theil-Intervalle $x_{\nu-1} \leqq x < x_\nu$ eine bestimmte obere und untere Grenze G'_ν bezw. g'_ν. Alsdann folgt aber aus Gl. (34):

$$(35)\quad \sum_1^n {}_\nu\, g'_\nu \cdot (x_\nu - x_{\nu-1}) \leqq f(X) - f(x_0) \leqq \sum_1^n {}_\nu\, G'_\nu \cdot (x_\nu - x_{\nu-1}),$$

und somit ergiebt sich für $\lim (x_\nu - x_{\nu-1}) = 0$, $\lim n = \infty$ die Ungleichung:

$$(36)\qquad \underline{\int_{x_0}^{X}} f'(x) \cdot dx \leqq f(X) - f(x_0) \leqq \overline{\int_{x_0}^{X}} f'(x) \cdot dx,$$

welche in der That die Gleichung (32) als speciellen Fall enthält und ohne weiteres in dieselbe übergeht, wenn $f'(x)$ integrabel ist.

Mit Hülfe dieser Relation lässt sich der am Anfange des vorigen Paragraphen bewiesene Haupttheil des Green'schen Satzes unter den dort geltenden Voraussetzungen ableiten, ohne dass man nöthig hätte, auf den an jener Stelle benützten allgemeinen Integralsatz (p. 54 Fussn. 1) zu recurriren. Man hat nämlich nach (36):

$$(37)\qquad \underline{\int_{x_0}^{X}} \frac{\partial Q}{\partial x} \cdot dx \leqq Q(X, y) - Q(x_0, y) \leqq \overline{\int_{x_0}^{X}} \frac{\partial Q}{\partial x} \cdot dx$$

und daher auch:

$$(38) \quad \int_{y_0}^{Y} dy \underline{\int_{x_0}^{X}} \frac{\partial Q}{\partial x} \cdot dx \leq \int_{y_0}^{Y} \{Q(X, y) - Q(x_0, y)\} \leq \int_{y_0}^{Y} dy \overline{\int_{x_0}^{X}} \frac{\partial Q}{\partial x} \cdot dx.$$

Da aber nach Gl. (1) die beiden äusseren Glieder dieser Ungleichung mit dem entsprechenden, als existirend vorausgesetzten Doppel-Integral zusammenfallen, so erhält man unmittelbar:

$$(27) \qquad \iint_{(x_0, y_0)}^{(X, Y)} \frac{\partial Q}{\partial x} \cdot dx \cdot dy = \int_{y_0}^{Y} \{Q(X, y) - Q(x_0, y)\} \cdot dy,$$

q. e. d.

---

§ 5.

Aus dem Green'schen Satze (Gl. (31)) ergiebt sich der Cauchy'sche, wenn die Functionen $Q(x, y)$, $P(x, y)$ so beschaffen sind, dass:

$$(39) \qquad \iint_{(T)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \cdot dT = 0$$

wird. Die hierzu nothwendige und hinreichende Bedingung besteht aber darin, dass die Stellen (x, y), für welche:

$$(40) \qquad \left|\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right| > \varepsilon,$$

bei beliebig kleinem $\varepsilon > 0$ eine zweidimensional unausgedehnte Menge bilden.[1]) Mithin ergiebt sich, wenn T wiederum einen Bereich von der am Schlusse von § 3 definirten

---

[1]) Dabei können also die Stellen, für welche:

$$\left|\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right| > 0,$$

immerhin auch eine zweidimensional-ausgedehnte Menge bilden, z. B. überall dicht liegen. (Vgl. die Beispiele in § 1).

Art, C seine vollständige Begrenzung bedeutet, der Cauchy'sche Integralsatz in dem folgenden Umfange:

Sind $Q(x, y)$, $P(x, y)$ eindeutig definirt und stetig im Innern und auf der Begrenzung von T, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ und $\frac{\partial P}{\partial y}$ eindeutig definirt und numerisch unter einer endlichen Grenze bleibend im Innern von T, so hat man:

$$\int_{(C)} (P \cdot dx + Q \cdot dy) = 0,$$

wenn die Stellen (x, y), für welche $\frac{\partial Q}{\partial x}$, $\frac{\partial P}{\partial y}$ Sprünge $> \varepsilon$ erleiden[1]) oder Ungl. (40) besteht, bei beliebig kleinem $\varepsilon > 0$ eine *zweidimensional unausgedehnte* Menge bilden.[2])

Hierzu ist nun aber noch folgendes zu bemerken. Die Existenz der Beziehung (39) hängt ausschliesslich davon ab, dass Ungl. (40) höchstens für eine zweidimensional unausgedehnte Menge besteht, keineswegs aber davon, dass $\frac{\partial Q}{\partial x}$, $\frac{\partial P}{\partial y}$ irgendwelchen Stetigkeits-Bedingungen unterworfen werden. Diese sind lediglich erforderlich, um die getrennte Existenz der beiden Doppel-Integrale $\iint_{(T)} \frac{\partial Q}{\partial x} \cdot dT$,

---

1) Es würde auch genügen, diese Stetigkeits-Bedingung für eine der beiden Functionen $\frac{\partial Q}{\partial x}$, $\frac{\partial P}{\partial y}$ zu statuiren, da sie dann für die andere vermöge der zweiten Bedingung (nämlich:

$$\left| \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right| \leqq \varepsilon,$$

mit Zulassung der näher bezeichneten Ausnahmen) von selbst erfüllt ist.

2) Man kann sogar noch die Bedingung der Stetigkeit von P, Q, sowie der Endlichkeit von $\frac{\partial Q}{\partial x}$, $\frac{\partial P}{\partial y}$ mit Hülfe bekannter Ausschliessungs-Methoden in gewissem Umfange fallen lassen.

$\iint\limits_{(T)} \frac{\partial P}{\partial y} \cdot dT$ zu gewährleisten, auf welcher der Beweis des Green'schen Satzes wesentlich beruhte. Im Grunde genommen basirt aber Gl. (41) gar nicht nothwendig auf der Existenz jener beiden Doppel-Integrale, sondern lediglich auf derjenigen der beiden iterirten Integrale $\int dy \int \frac{\partial Q}{\partial x} \cdot dx$, $\int dy \int \frac{\partial P}{\partial y} \cdot dx$, und auf der Vertauschbarkeit der Integrationsfolge bei dem zweiten dieser Integrale. Nachdem nun aber die Betrachtungen des § 2 deutlich gezeigt haben, dass diese letzteren Bedingungen sehr wohl erfüllt sein können, auch wenn jene Doppel-Integrale nicht existiren, so erkennt man, dass für die Gültigkeit des Cauchy'schen Satzes (Gl. (41)) die den Functionen $\frac{\partial Q}{\partial x}$, $\frac{\partial P}{\partial y}$ auferlegten Stetigkeits-Bedingungen keineswegs nothwendige sind und sich durch andere, umfassendere ersetzen lassen müssen. Da man indessen für das Zustandekommen der Beziehung:

$$\int_{y_0}^{Y} dy \int_{x_0}^{X} \frac{\partial P}{\partial y} \cdot dx = \int_{x_0}^{X} dx \int_{y_0}^{Y} \frac{\partial P}{\partial y} \cdot dy \tag{42}$$

lediglich hinreichende Bedingungen kennt, von denen die Existenz des betreffenden Doppel-Integrals zur Zeit als die weitaus allgemeinste gelten darf, so gelangt man auf diesem Wege schliesslich doch zu keiner befriedigenden Fassung des fraglichen Satzes, die allgemeiner wäre, als die oben gegebene.

Immerhin geht aus dieser Betrachtung mit Evidenz hervor, dass der Green'sche Satz keineswegs als allgemeinste Grundlage des Cauchy'schen Satzes (41) angesehen werden kann. Dies gilt nun aber in erhöhtem Maasse für des letzteren Anwendung auf Functionen einer complexen Veränderlichen. Hier gelangt man zunächst auf Grund der oben gegebenen Fassung zu dem folgenden Resultate:

Ist $f(z) = f(x + yi) = \varphi(x, y) + i \cdot \psi(x, y)$ eindeutig definirt und stetig[1]) im Innern und auf der Begrenzung von T; sind ausserdem $\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \psi}{\partial x}, \frac{\partial \psi}{\partial y}$ eindeutig definirt und absolut genommen unter einer endlichen Grenze[1]) bleibend, so hat man:

$$\int_{(C)} f(z) \cdot dz = 0, \tag{43}$$

wenn die Stellen z, für welche $\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}$ (oder auch:[1]) $\frac{\partial \psi}{\partial x}, \frac{\partial \psi}{\partial y}$) Sprünge $> \varepsilon$ erleiden oder eine der Ungleichungen besteht:

$$\left| \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \right| > \varepsilon, \qquad \left| \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \right| > \varepsilon, \tag{44}$$

bei beliebig kleinem $\varepsilon > 0$ eine *zweidimensional unausgedehnte* Menge bilden. Daraus folgt dann nach bekannten Methoden, dass $f(z)$ im Innern von T eine *analytische* Function vorstellt.

Insbesondere ergiebt sich also, dass unter den gemachten Voraussetzungen $f(z)$ im Innern von T einen „vollständigen“, d. h. von der Art des Grenzüberganges (nicht nur von der Differentiations-Richtung) unabhängigen Differential-Quotienten besitzt. Wird nun, wie gewöhnlich geschieht, diese letztere Forderung schon in der Voraussetzung aufgenommen, so verlangt man damit von vornherein merklich mehr, als die Existenz jener partiellen Ableitungen und sogar die ausnahmslose Existenz der Beziehungen:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \tag{45}$$

---

[1]) Vergl. die beiden vorigen Fussnoten.

besagen würde.[1]) Hiernach erscheint es aber keineswegs ausgeschlossen, dass die Existenz eines solchen $f'(z)$ schon allein die Integral-Beziehung (43) und somit den analytischen Charakter von $f(z)$ nach sich zieht, ohne dass es nöthig wäre, $f'(z)$ irgend welchen Stetigkeits-Bedingungen zu unterwerfen. Und so lange es nicht etwa gelingt, durch Aufstellung von Beispielen das Gegentheil festzustellen, wird diese Frage als eine offene gelten müssen.

---

[1]) Vergl. Thomae, Abriss etc., p. 17, 119. — Stolz, Grundlagen der Diff.- und Integr.-Rechnung, I, p. 134; II, p. 82. — Osgood, a. a. O. p. 87.

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der Bayerischen Akademie der Wissenschaften München

Jahr/Year: 1899

Band/Volume: 1899

Autor(en)/Author(s): Pringsheim Alfred

Artikel/Article: Zur Theorie des Doppel-Integrals, des Green'schen und Cauchy'schen Integralsatzes 39-62