Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Classe

der

k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.

1899. Heft III.

München.
Verlag der k. Akademie.
1900.

In Commission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Zur Theorie der automorphen Functionen.

Von **F. Lindemann.**

(*Eingelaufen 8. Februar.*)

Die Theorie der doppelt periodischen Functionen lässt sich bekanntlich sehr einfach dadurch begründen, dass man versucht, nach der Theorie der Partialbruch-Reihen eine Function zu bilden, die in jedem Periodenparallelogramme nur einen Pol erster Ordnung hat. Die entstehende Function ist dann mit einem Integrale zweiter Gattung im Wesentlichen identisch $\left(\frac{H'(z)}{H(z)}\right.$ in Jacobi's Bezeichnung$\Big)$; und von ihm steigt man durch Integration oder Differentiation unmittelbar zu den H- oder σ-Functionen bez. zur $\wp$-Function auf.

Bei den automorphen Functionen hat zwar Poincaré einen analogen Ansatz gemacht, erhält aber nicht die analoge Integralfunction zweiter Gattung, sondern seine „fonctions thetafuchsiennes", die sich bei linearer Transformation des Arguments um einen Factor ändern. Für die einfachsten Reihen, welche auch hier zu jenen Integralfunctionen führen würden, fehlt der Convergenzbeweis. Diese Schwierigkeit habe ich versucht, im Folgenden zu überwinden. Dadurch gelange ich dann direct zu den Integralen zweiter Gattung, an die man die Theorie der algebraischen Functionen (z. B. des Riemann-Roch'schen Satzes) sofort anknüpfen könnte; und durch Integration werden die Integrale dritter sowie diejenigen erster Gattung eingeführt.

Für einen besonderen Fall (wo die das Kreisbogen-Polygon begrenzenden Kreise sich nicht schneiden, und die zugehörige Curve p^{ten} Geschlechts $p+1$ reelle Züge besitzt) hat Schottky schon analoge Untersuchungen angestellt, nachdem er den nöthigen Convergenzbeweis auf anderem Wege erbrachte; bei ihm bilden indessen nicht die Integrale zweiter Gattung den Ausgangspunkt, sondern er bildet direct unendliche Producte der Art, wie sie unten am Schlusse von § 3 auftreten werden.

Im Folgenden schliesse ich mich in der Darstellung und Bezeichnungsweise durchaus an die grossen Arbeiten Poincaré's an.[1]) Die Entwicklungen sind zunächst dem Falle angepasst, wo ein Polygon mit „Hauptkreis" gegeben ist, lassen sich aber (wie ja auch die Poincaré'schen Untersuchungen) unmittelbar auf die übrigen Fälle übertragen.

§ 1. Die Convergenz einer gewissen Reihe.

Die Substitutionen der gegebenen Gruppe bezeichnen wir durch $f_i(z)$, so dass

$$f_i(z) = \frac{a_i z + b_i}{c_i z + d_i} \tag{1}$$

gesetzt wird und i einen von 0 bis ∞ laufenden Index bezeichnet, durch den die Substitutionen numerirt werden; dabei sei $f_0(z) = z$. Nach Herrn Poincaré kann man leicht Functionen bilden, die sich bei Substitutionen der Gruppe nur um einen Factor ändern, und zwar auf folgende Weise. Sei $H(z)$ eine rationale Function von z, so bilde man die Reihe

$$\Theta(z) = \sum_k H(f_k(z)) \, [f'_k(z)]^m. \tag{2}$$

Dieselbe ist, wenn $m > 1$, für alle Werthe von z absolut convergent, allein ausgenommen die Pole der Function $H(z)$ und die Pole der Functionen $f'_k(z)$, welche mit denjenigen Punkten identisch sind, die bei den Transformationen (1) dem

[1]) Acta mathematica, Bd. 1 und 3.

unendlich fernen Punkte zugeordnet werden; denn (da die Determinante $a_i d_i - b_i c_i$ immer gleich der Einheit angenommen wird) ist

$$f_i'(z) = \frac{1}{(c_i z + d_i)^2}. \tag{3}$$

Die durch (2) definirte Function genügt der Bedingung

$$\Theta(f_i(z)) = \Theta(z) \cdot [f_i'(z)]^{-m} = \Theta(z) \cdot (c_i z + d_i)^{2m}. \tag{4}$$

Bildet man den Quotienten zweier solcher Poincaré'schen Θ-Functionen, bei denen m denselben Werth hat, so erhält man eine automorphe Function, d. h. eine solche, die bei den Transformationen der Gruppe völlig ungeändert bleibt.

Für uns kommt es darauf an, Reihen der Form (2) zu untersuchen, wenn die Zahl m den von Poincaré ausgeschlossenen Werth 1 besitzt. Zu dem Zwecke betrachten wir zunächst die Reihe

$$\Sigma f_i''(z) = -2 \Sigma \frac{c_i}{(c_i z + d_i)^3} \tag{5}$$

und beweisen ihre absolute Convergenz.

Durch logarithmische Differenzirung der Gleichung (4) erhalten wir

$$\begin{aligned} -f_i''(z) &= \frac{1}{m}\left[\frac{\Theta'(f_i)}{\Theta(f_i)} f_i'^2 - \frac{\Theta'(z)}{\Theta(z)} f_i'\right] \\ &= \frac{1}{m}\left[\frac{\Theta'(f_i)}{\Theta(z)} f_i'^{m+2} - \frac{\Theta'(z)}{\Theta(z)} f_i'\right]. \end{aligned} \tag{6}$$

Die Untersuchung der Reihe (5) können wir daher auf die Untersuchung der beiden einzelnen Reihen

$$\begin{aligned} U &= \Sigma \frac{1}{m} \frac{\Theta'(f_i)}{\Theta(z)} f_i'^{m+2}, \\ V &= \Sigma \frac{1}{m} \frac{\Theta'(z)}{\Theta(z)} f_i' \end{aligned} \tag{7}$$

zurückführen und haben dann den Vortheil, dass wir sowohl für die Zahl m, als für die Function $\Theta(z)$ noch besonders günstige Wahl treffen dürfen.

Wir beginnen mit Untersuchung der Reihe V. Die Gleichung (6) ist eine Identität; in ihr kann daher auch die Zahl m und die Function Θ von dem Index i selbst abhängen. Wir definiren nun $\Theta(z)$ durch die Gleichung (2), indem wir $H(z)$ durch die Gleichung

$$(8) \qquad H(z) = (z - f_1(\zeta))^2 (z - f_2(\zeta))^2 \ldots\ldots (z - f_j(\zeta))^2,$$

bestimmen, wo ζ einen willkürlichen Punkt bezeichnet, und wo die Zahl j so gewählt sein möge, dass für alle Zahlen k, die der Bedingung $k > j$ genügen, die Ungleichheit

$$(9) \qquad \text{abs}\, f'_k(\zeta) < 1$$

erfüllt sei. Dabei können wir uns der Einfachheit wegen die Substitutionen (1) so geordnet denken, dass dem grösseren absoluten Betrage von $f'_i(z)$ ein kleinerer Index entspricht, ausserdem aber immer $f_0 = z$ gesetzt wird. Die Ungleichheit (9) ist für endliche hinreichend grosse Werthe von k immer zu erfüllen, denn nach Poincaré ist die Reihe

$$(10) \qquad \Sigma f'_i(\zeta)^2$$

stets convergent, also sicher lim abs $f'_i(\zeta) = 0$. Wir erhalten aus (2)

$$(11) \qquad \Theta'(z) = \sum_{k=0}^{\infty} m\, H(f_k(z))\, [f'_k(z)]^{m-1} f''_k(z)$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty} H'(f_k(z))\, [f'_k(z)]^{m+1},$$

also für $z = \zeta$:

$$\Theta'(\zeta) = \sum_{k=j+1}^{\infty} m\, H(f_k(\zeta))\, [f'_k(\zeta)]^{m-1} f''_k(\zeta) + \sum_{k=j+1}^{\infty} H'(f_k(\zeta))\, [f'_k(\zeta)]^{m+1}.$$

$$\Theta(\zeta) = H(\zeta) + \sum_{k=j+1}^{\infty} H(f_k(\zeta))\, [f'_k(\zeta)]^m.$$

Bedeutet nun m eine Zahl, welche mit dem Index i ebenfalls unendlich gross wird, etwa $m = i$, und sei dem entsprechend

$$(12) \qquad \Theta_i(\zeta) = H(\zeta) + \sum_{k=j+1}^{\infty} H(f_k(\zeta))\,[f'_k(\zeta)]^i,$$

so wird $\Theta_i(\zeta)$ für keinen noch so grossen Werth von i unendlich gross und nach den Poincaré'schen Sätzen nur an einer endlichen Anzahl von Stellen in jedem Bereiche gleich Null. Die Anzahl der Nullstellen wächst allerdings mit der Zahl $m = i$ in's Unendliche, bleibt aber stets eine discrete, so dass wir durch passende Wahl von ζ stets das Verschwinden von $\Theta(\zeta)$ vermeiden können; für $i = \infty$ wird überdies $\Theta_i(\zeta) = H(\zeta)$. Der absolute Betrag der Function $\frac{1}{\Theta_i(\zeta)}$ bleibt daher stets unterhalb einer endlichen Grenze M:

$$(13) \qquad \text{abs}\,\frac{1}{\Theta_i(\zeta)} < M_i.$$

Ferner sind die Reihen (da $i > 2$)

$$\sum_{k=j+1}^{\infty} H(f_k(\zeta)) \left[\frac{f'_k(\zeta)}{f'_{j+1}(\zeta)}\right]^{i-1} f'_k(\zeta) \quad \text{und} \quad \sum_{j+1}^{\infty} H'(f_k(\zeta)) \left[\frac{f'_k(\zeta)}{f'_{j+1}(\zeta)}\right]^{i+1}$$

convergent und bleiben stets endlich. Bezeichnen wir die oberen Grenzen ihrer absoluten Beträge mit P_i und Q_i, so wird

$$\text{abs}\,V = \text{abs} \sum_i \frac{1}{i} \frac{\Theta'_i(\zeta)}{\Theta_i(\zeta)} f'_i(\zeta)$$

$$< \sum_i M_i \left[P_i \,\text{abs}\,(f'_{j+1}(\zeta))^{i-1} + \frac{1}{i}\, Q_i \,\text{abs}\,(f'_{j+1}(\zeta))^{i+1}\right] \text{abs}\, f'_i(\zeta).$$

Da nun die Reihe $\sum_i \text{abs}\,(f'_{j+1}(\zeta)^{i+1}$ in Folge der Forderung (9) sicher convergirt, so folgt, dass auch die Reihe V für $z = \zeta$ convergent, und zwar absolut convergent ist; ausgenommen sind dabei die Punkte $\zeta = -\frac{c_i}{d_i}$, für welche die Functionen $f'_i(\zeta)$ unendlich gross werden.

Was jetzt die Reihe U betrifft, so gilt für die in den Nennern auftretende Function wieder die Ungleichung (13). Auch der Zähler $\Theta'_i(f_i(\zeta))$ bleibt nach (11) stets endlich; dies gilt noch für unendlich grosse Werthe von i, denn $f_i(\zeta)$ bezeichnet stets einen im Innern des Hauptkreises gelegenen Punkt, bleibt also endlich für unendlich grosse Werthe von i; in der Ungleichung (9) kann daher die Zahl j so gross gewählt werden, dass diese Bedingung nicht nur für einen Punkt ζ, sondern auch für alle Punkte ζ erfüllt ist, die aus dem ersten durch die Substitutionen $f_i(\zeta)$ hervorgehen, so dass:

$$\text{abs}\, f'_k(f_i(\zeta)) < 1 \quad \text{für } k > j.$$

Setzen wir fest, dass die Zahl j in dieser erweiterten Weise bestimmt werde, so werden dadurch unsere Betrachtungen über die Reihe V nicht gestört. Das allgemeine Glied der Reihe U aber wird von der Form

$$R\,[f'_{j+1}(f_i(\zeta))]^{i-1} f'_i(\zeta)^{i+2} + \frac{1}{i} S\,[f'_{j+1}(f_i(\zeta))]^{i-1} f'_i(\zeta)^{i+2},$$

wo mit R und S endlich bleibende Ausdrücke bezeichnet sind. Die Reihe ist also sicher convergent, und zwar (wegen der Factoren $f_i'^{\,i+2}$) in stärkerem Grade wie die Reihe U. Nach (5) und (6) haben wir also das Resultat gewonnen, dass die Reihe

$$\Sigma f'_i(\zeta) \tag{14}$$

für alle Werthe von ζ, in denen $f_i(\zeta)$ nicht unendlich gross wird, absolut convergirt.

Die Zahl, welche gewählt werden muss, um den Rest der Reihe $U + V$ kleiner als eine gegebene Zahl zu machen, hängt von der Zahl j ab, die nöthig ist, um die Ungleichung (9) zu befriedigen; und diese Zahl wieder ist von dem betrachteten Punkte ζ abhängig. Vergleicht man die Zahlen j für mehrere Stellen ζ mit einander, so braucht man nur den grössten benötigten Werth von j zu wählen, um für alle diese Stellen das gewollte zu erreichen. Ist dann die Zahl j entsprechend definirt, so ist die Reihe offenbar gleichmässig in einem gegebenen endlichen Gebiete, in dem kein Pol der Functionen f'_i liegt, convergent, denn sie convergirt im Wesentlichen wie eine Potenzreihe

$$\sum_i [f'_{j+1}(\zeta)]^i,$$

und die absoluten Beträge der Functionen f'_{j+1} sind durch passende Wahl von j kleiner als Eins gemacht worden; die Potenzen $(f'_{j+1})^i$ lassen sich also durch passende Wahl von i kleiner als eine beliebig vorgegebene Zahl machen, und zwar für alle Werthe ζ eines solchen Gebietes durch denselben Werth von i.

Die Reihe $\sum f''_i$ kann hiernach gliedweise integrirt werden; und somit folgt, dass die Reihe

$$\sum_i [f'_i(z) - f'_i(z_0)]$$

ebenfalls absolut convergirt, denn die gliedweise Integration einer absolut convergenten Reihe führt stets wieder zu einer absolut convergenten Reihe. Es ist

$$f'_i(z) - f'_i(z_0) = (z_0 - z)\,\frac{c_i(z_0 + z) + 2\,d_i}{(c_i z_0 + d_i)^2\,(c_i z + d_i)^2}\,c_i,$$

oder wenn wir annehmen, dass der Punkt $z = 0$ im Innern unseres Fundamentalbereiches liege, für $z_0 = 0$:

$$f'_i(z) - f'_i(0) = -z\,\frac{z + 2\dfrac{d_i}{c_i}}{(c_i z + d_i)^2\left(\dfrac{d_i}{c_i}\right)^2}.$$

Der absolute Werth von $\dfrac{c_i}{d_i}$ nähert sich mit wachsendem i der Grenze Eins, kann daher auf die Convergenz der Reihe nicht von Einfluss sein. Folglich muss auch die Reihe

$$(15)\qquad \Theta_0(z) = \sum_i \frac{1}{(c_i z + d_i)^2} = \sum_i f'_i(z)$$

absolut convergiren für jede von den Punkten $-\dfrac{d_i}{c_i}$ verschiedene Stelle z.

Für diese Reihe $\Theta_0(z)$ gelten dieselben Ueberlegungen, wie sie Poincaré für seine Reihen $\Theta(z)$ anstellt. Es ist nemlich

$$\Theta_0(f_i(z)) = \sum_k f'_k(f_i(z)) = \sum_k \frac{d f_k(f_i(z))}{dz} \frac{1}{f'_i(z)},$$

also:

(16)
$$\Theta_0(f_i(z)) = \frac{1}{f'_i(z)} \Theta_0(z).$$

§ 2. Integrale zweiter Gattung.

Wir untersuchen jetzt die von zwei Punkten z und ζ abhängende Reihe

(17)
$$\Omega(z, \zeta) = \sum_k \frac{f'_k(\zeta)}{z - f_k(\zeta)}.$$

Da der reciproke Werth von $z - f_k(\zeta)$ stets endlich und von Null verschieden bleibt, falls nur z von ζ und den Punkten $f_i(\zeta)$ verschieden ist, so zieht die absolute Convergenz der Reihe (15) auch unmittelbar diejenige der Reihe (17) nach sich.

Die Eigenschaften dieser Reihe, insofern sie von ζ abhängt, sind nach Analogie der Poincaré'schen Reihe und der Gleichung (16), durch die folgende Gleichung dargestellt:

(18)
$$\Omega(z, f_i(\zeta)) = \frac{1}{f'_i(\zeta)} \Omega(z, \zeta).$$

Der Punkt ζ liege im Innern des Hauptkreises; dann wird $\Omega(z, \zeta)$ nur an der Stelle $z = \zeta$ und den homologen Stellen $z = f_k(\zeta)$ unendlich gross (erster Ordnung). Als Function von ζ wird Ω auch unendlich (zweiter Ordnung) an den Nullstellen der Gleichungen $c_i \zeta + d_i = 0$.

Hauptsächlich kommt es uns darauf an, das Verhalten der Function Ω für den Fall festzustellen, dass z durch $f_i(z)$ ersetzt wird. Offenbar ist

$$\frac{1}{f_i(z) - f_k(\zeta)} = \frac{(c_i z + d_i)(c_k \zeta + d_k)}{(a_i c_k - c_i a_k) + \zeta(a_i d_k - c_i b_k)} \frac{1}{z - \zeta_1} = \frac{\Omega_{ik}}{z - \zeta_1},$$

wodurch Ω_{ik} definirt sei, und wo:

$$\zeta_1 = -\frac{b_i - d_i f_k(\zeta)}{a_i - c_i f_k(\zeta)} = f_i^{-1}(f_k(\zeta)),$$

ferner:

$$\frac{c_i z + d_i}{z - \zeta_1} = c_i + \frac{1}{z - \zeta_1} \frac{a_i d_i - b_i c_i}{a_i - c_i f_k(\zeta)},$$

$$\Omega_{ik} = \frac{c_i z + d_i}{a_i - c_i f_k(\zeta)},$$

also

$$\frac{\Omega_{ik}}{z - \zeta_1} = \frac{c_i}{a_i - c_i f_k(\zeta)} + \frac{1}{z - \zeta_1} \frac{a_i d_i - b_i c_i}{[a_i - c_i f_k(\zeta)]^2}$$

$$= \frac{c_i}{a_i - c_i f_k(\zeta)} + \frac{1}{z - f_i^{-1}(f_k(\zeta))} \frac{d f_i^{-1}(f_k(\xi))}{d f_k(\zeta)},$$

schliesslich

$$\Omega(f_i(z), \zeta) = \sum_k \frac{\Omega_{ik}}{z - \zeta_1} f'_k(\zeta)$$

$$= \sum_k \frac{1}{z - f_i^{-1}(f_k(\zeta))} \frac{d f_i^{-1}(f_k(\zeta))}{d \zeta} + \sum_k \frac{c_i f'_k(\zeta)}{a_i - c_i f_k(\zeta)},$$

oder, da die Gesammtheit der Werthe $f_i^{-1}(f_k(\zeta))$ identisch ist mit der Gesammtheit der Werthe $f_k(\zeta)$:

$$\Omega(f_i(z), \zeta) = \Omega(z, \zeta) + \Omega\left(\frac{a_i}{c_i}, \zeta\right). \tag{19}$$

Das Verhalten der Function Ω ist also vollkommen analog dem Verhalten eines Integrals einer algebraischen Function; die Grösse $\Omega\left(\frac{a_i}{c_i}, \zeta\right)$ ist ein Periodicitäts-Modul des Integrals. Die Function Ω bezeichnen wir als Integral zweiter Gattung, weil sie mit dem Abel'schen Integrale zweiter Gattung die erwähnte Eigenschaft gemein hat, und nach den Poincaré'schen Resultaten auch stets mit einem solchen Integrale identificirt werden kann.

Der Differentialquotient der Function $\Omega(z, \zeta)$ nach z ist nicht eine automorphe Function, sondern hat die Eigenschaft der Poincaré'schen Θ-Functionen sich um einen Factor zu ändern; in der That folgt aus (19):

$$\frac{d\,\Omega(z,\zeta)}{dz} \cdot \frac{d f_i(z)}{dz} = \left(\frac{d\,\Omega(z,\zeta)}{dz}\right)_{f_i(z)} = \frac{d\,\Omega(f_i(z), \zeta)}{d f_i(z)}. \tag{20}$$

Wir haben hier also eine neue Methode zur Bildung derartiger Functionen.

Die Periodicitätsmoduln von $\Omega(z, \zeta)$ sind Functionen von ζ, und zwar ist

$$\Omega\left(\frac{a_i}{c_i}, \zeta\right) = \sum_k \frac{c_i}{a_i - c_i f_k(\zeta)} f'_k(\zeta), \tag{21}$$

also nach (18):

$$\Omega\left(\frac{a_i}{c_i}, f_r(\zeta)\right) \cdot f'_r(\zeta) = \Omega\left(\frac{a_i}{c_i}, \zeta\right). \tag{22}$$

Die Function $\dfrac{\Omega(z, \zeta)}{\Theta_0(\zeta)}$ dagegen würde, falls nicht etwa $\Theta_0(\zeta)$ identisch verschwindet, nur automorphe Functionen zu Periodicitätsmoduln haben, dem entsprechend, dass die Periodicitätsmoduln der Integrale zweiter Gattung algebraische Functionen des singulären Punktes sind. Die Functionen (21) sind stets endlich, weil die Punkte $\dfrac{a_i}{c_i}$ stets ausserhalb des Hauptkreises liegen, der Punkt ζ oder $f_i(\zeta)$ also nie mit ihnen zusammenfallen kann.

§ 3. Integrale dritter Gattung.

Durch Integration der Function Ω nach der Variabeln ζ zwischen den Grenzen η und ξ entsteht eine neue Function, die wir $S_{\xi\eta}$ nennen, und welche in zwei Punkten ($z = \xi$ und $z = \eta$) eines jeden Gebietes je logarithmisch unendlich wird. Wir haben

$$S_{\xi\eta}(z) = \int_\eta^\xi \Omega(z, \zeta)\, d\zeta = \sum_k \log \frac{z - f_k(\xi)}{z - f_k(\eta)}. \tag{23}$$

Die gliedweise Integration der Reihe

$$\sum_i f'_i(\zeta) = \sum_i \frac{1}{(c_i\zeta + d_i)^2} = \sum_i \frac{1}{c_i^2} \frac{1}{\left(\zeta + \dfrac{d_i}{c_i}\right)^2}$$

ist in der That erlaubt; denn die Grössen $\dfrac{d_i}{c_i}$ bleiben endlich für $i = \infty$; die Convergenz der Reihe hängt also nur von den Grössen c_i^{-2} ab, ist folglich von dem Werthe der Variabeln ζ nicht wesentlich abhängig. Das allgemeine Glied der rechten Seite von (23) wird gleich Null bei unendlich wachsendem Index, denn es ist

$$f_k(\xi) = \frac{a_k}{c_k} - \frac{a_k d_k - b_k c_k}{(c_k \xi + d_k) c_k}, \quad f_k(\eta) = \frac{a_k}{c_k} - \frac{a_k d_k - b_k c_k}{(c_k \eta + d_k) c_k}.$$

Beide Grössen nähern sich also für $k = \infty$ dem von ξ und η unabhängigen endlichen Grenzwerthe von $\frac{a_k}{c_k}$. Ebenso kann die Reihe

$$\sum_i \frac{f_i'(\zeta)}{f_i(\zeta)} = \sum_i \frac{1}{(a_i \zeta + b_i)(c_i \zeta + d_i)} = \sum_i \frac{1}{c_i^2 \left(\frac{a_i}{c_i} \zeta + \frac{b_i}{c_i}\right)\left(\zeta + \frac{d_i}{c_i}\right)}$$

gliedweise integrirt werden; denn ihre Convergenz wird ebenfalls durch die Glieder c_i^{-2} bedingt, während sich die Quotienten $\frac{a_i}{c_i}$ und $\frac{d_i}{c_i}$ endlichen (wenn auch unbestimmten) Grenzwerthen nähern und ebenso

$$\frac{b_i}{c_i} = \frac{a_i d_i}{c_i^2} - \frac{a_i d_i - b_i c_i}{c_i^2} = \frac{a_i d_i}{c_i^2} - \frac{1}{c_i^2}$$

endlich bleibt.

Die Eigenschaften der Function $S_{\xi\eta}$ ergeben sich durch folgende Betrachtung. Es ist identisch

$$\begin{aligned} & f_i(z) - f_k(\xi) \\ &= \frac{[(a_i c_k - c_i a_k)\xi + (a_i d_k - c_i b_k)] z + (b_i c_k - d_i a_k)\xi + (b_i d_k - d_i b_k)}{(c_i z + d_i)(c_k \xi + d_k)} \\ &= [z - f_i^{-1}(f_k(\xi))]\, c_i \left[\frac{a_i}{c_i} - f_k(\xi)\right] (c_i z + d_i)^{-1}, \end{aligned}$$

also unmittelbar:

$$(24) \quad \log \frac{f_i(z) - f_k(\xi)}{f_i(z) - f_k(\eta)} = \log \frac{z - f_i^{-1}(f_k(\xi))}{z - f_i^{-1}(f_k(\eta))} + \log \frac{\frac{a_i}{c_i} - f_k(\xi)}{\frac{a_i}{c_i} - f_k(\eta)}.$$

Da die Gesammtheit der Functionen $f_i^{-1}(f_k(\xi))$ identisch ist mit der Gesammtheit der Functionen $f_i(\xi)$, so führt die Anwendung dieser Relation auf die rechte Seite von (23) zu dem Resultate

$$(25) \qquad S_{\xi\eta}(f_i(z)) = S_{\xi\eta}(z) + S_{\xi\eta}\left(\frac{a_i}{c_i}\right).$$

Die Grössen $S_{\xi\eta}\left(\frac{a_i}{c_i}\right)$, welche hier als Periodicitätsmoduln des Integrals dritter Gattung auftreten, sind Functionen von ξ und η, welche für alle Werthe dieser Grössen endlich bleiben, denn die Punkte $\frac{a_i}{c_i}$ liegen stets ausserhalb des Hauptkreises. Die Anzahl der Periodicitätsmoduln ergibt sich zunächst gleich n, wenn $2n$ die Zahl der Seiten des Fundamentalpolygons angibt, wird aber durch die Betrachtungen der folgenden Paragraphen wesentlich reducirt. Setzen wir

$$(26) \qquad H(z) = \prod_k \frac{z - f_k(\xi)}{z - f_k(\eta)},$$

so genügt die Function $H(z)$, welche nur in dem einen Punkte ξ gleich Null und nur in dem einen Punkte η gleich Unendlich wird, der Functionalgleichung:

$$(27) \qquad H(f_i(z)) = H(z) \cdot e^{S_{\xi\eta}\left(\frac{a_i}{c_i}\right)}.$$

Die durch (26) definirte Function hängt auf's Engste mit den von Klein eingeführten Primformen zusammen. Die letzteren (welche durch einen Grenzprocess aus Integralen dritter Gattung abgeleitet sind) werden nur an einer Stelle der Riemann'schen Fläche, also auch nur an einer Stelle des gegebenen Polygons gleich Null und an keiner Stelle unendlich gross, während unser Product an je einer Stelle unendlich klein bez. unendlich gross erster Ordnung wird. Wäre es erlaubt, Zähler und Nenner des Productes $H(z)$ von einander zu trennen, ohne die Convergenz zu stören, so würde jeder für sich die wesentlichen Eigenschaften einer „Primform“ haben. Klein[1]) weist selbst auf diesen Zusammenhang hin unter Bezugnahme auf einen entsprechenden von Schottky[2]) aufgestellten Product-Ausdruck, der sich bei dessen schon erwähnten Untersuchungen über den besonderen Fall ergab, wo das gegebene Polygon durch mehrere sich nicht schneidende Kreise begrenzt wird, und wo in Folge dessen die gegebene Transformations-Gruppe zu den von Poincaré[3]) als Klein'sche Gruppen bezeichneten linearen Transformations-Gruppen gehört.

Die von v. Mangoldt[4]) und H. Stahl[5]) gegebenen Productdarstellungen automorpher Functionen sind wesentlich complicirterer Natur, da dort den einzelnen Factoren der unendlichen Producte Exponentialfactoren beigefügt werden müssen, um die Convergenz zu erzielen.

§ 4. Die Vertauschung von Parameter und Argument.

Es war der Definition nach

$$S_{\xi\eta}(\beta) - S_{\xi\eta}(\alpha) = \int_\alpha^\beta d\,S_{\xi\eta} = \sum_k \log\left(\frac{\beta - f_k(\xi)}{\beta - f_k(\eta)} \cdot \frac{\alpha - f_k(\eta)}{\alpha - f_k(\xi)}\right);$$

ferner ist identisch

---

1) Zur Theorie der Abel'schen Functionen, Mathematische Annalen Bd. 36 (1889), p. 12 ff.

2) Ueber eine specielle Function, welche bei einer bestimmten linearen Transformation ihres Arguments unverändert bleibt; Crelle's Journal Bd. 101, p. 227 ff. (1886). Auch die am Schlusse dieser Abhandlung aufgestellte Differentialgleichung, welche den Zusammenhang mit den ϑ-Functionen vermittelt, wird sich analog für die im Texte behandelten Fälle ableiten lassen.

3) Mémoire sur les groupes kleinéens, Acta mathematica Bd. 3, p. 49 ff.

4) Ueber eine Darstellung elliptischer Modulfunctionen durch unendliche Producte, Göttinger Nachrichten 1885, p. 313 und 1886, p. 1 (hier mit Ausdehnung auf allgemeine Functionen).

5) Ueber die Darstellung der eindeutigen Functionen, die sich durch lineare Substitutionen reproduciren, durch unendliche Producte, Math. Annalen Bd. 33, p. 291 ff. (1888).

$$\beta - f_k(\xi) = \frac{(c_k \xi + d_k)\,\beta - (a_k \xi + b_k)}{c_k \xi + d_k},$$

$$= \frac{c_k \beta - a_k}{c_k \xi + d_k} (\xi - f_k^{-1}(\beta)),$$

$$\beta - f_k(\eta) = \frac{c_k \beta - a_k}{c_k \eta + d_k} (\eta - f_k^{-1}(\beta)).$$

Hieraus folgt:

$$\int_\alpha^\beta d\,S_{\xi\eta} = \sum_k \log \left(\frac{\xi - f_k^{-1}(\beta)}{\eta - f_k^{-1}(\beta)} \cdot \frac{\eta - f_k^{-1}(\alpha)}{\xi - f_k^{-1}(\alpha)} \right), \tag{28}$$

und da die Gesammtheit der Transformationen f_k^{-1} identisch ist mit der Gesammtheit der Transformationen f_k, so ergibt sich weiter

$$\int_\alpha^\beta d\,S_{\xi\eta} = \int_\xi^\eta d\,S_{\alpha\beta}. \tag{29}$$

Dem Integrale $S_{\xi\eta}$ kommt also diejenige Eigenschaft zu, welche bei den Normalintegralen dritter Gattung in der Theorie der Abel'schen Functionen als Satz der Vertauschung von Parameter und Argument bekannt ist. Dieser Satz wird dort am einfachsten durch Untersuchung des Integrals

$$\int S_{\xi\eta}\, d\,S_{\alpha\beta}$$

abgeleitet, indem man die Integration über den Rand der betreffenden Riemann'schen Fläche ausdehnt, nachdem letztere durch Querschnitte in eine einfach zusammenhängende verwandelt ist, und nachdem man die singulären Punkte ξ, η, α, β durch Schleifen mit diesem Rande verbunden hat. An Stelle der Integration über die Ufer der Querschnitte tritt hier die Integration über den Rand des Kreisbogenpolygons, auf welches die Riemann'sche Fläche nach der Poincaré'schen Methode abgebildet ist. Seien A_i, B_i die Ecken einer Seite dieses Polygons und C_i, D_i diejenigen der zugeordneten Seite, so ergibt sich

$$\sum_{i=1}^{i=n} \left[\int_{A_i}^{B_i} S_{\xi\eta}\, d\,S_{\alpha\beta} - \int_{C_i}^{D_i} S_{\xi\eta}\, d\,S_{\alpha\beta} \right] + 2\pi i \left[\int_\xi^\eta d\,S_{\alpha\beta} - \int_\alpha^\beta d\,S_{\xi\eta} \right] = 0.$$

Die erste Summe der linken Seite ist gleich

$$\sum_i \int_{A_i}^{B_i} [S_{\xi\eta}(z) - S_{\xi\eta}(f_i(z))]\, d\, S_{\alpha\beta} = -\sum_i S_{\xi\eta}\left(\frac{a_i}{c_i}\right) \int_{A_i}^{B_i} d\, S_{\alpha\beta};$$

und die Vergleichung mit der Relation (29) lehrt, dass der Ausdruck der rechten Seite gleich Null ist. Die Integrale $\int_{A_i}^{B_i} d\, S_{\alpha\beta}$ sind Periodicitätsmoduln des Integrals $S_{\alpha\beta}$, lassen sich also durch die Grössen $S_{\alpha\beta}\left(\frac{a_i}{c_i}\right)$ linear (mit ganzzahligen Coëfficienten) ausdrücken. Setzen wir zur Abkürzung

$$(30)\qquad \begin{aligned} P_i &= S_{\xi\eta}\left(\frac{a_i}{c_i}\right), & \Pi_i &= \int_{A_i}^{B_i} d\, S_{\xi\eta}, \\ P_i' &= S_{\alpha\beta}\left(\frac{a_i}{c_i}\right), & \Pi_i' &= \int_{A_i}^{B_i} d\, S_{\alpha\beta}, \end{aligned}$$

so bestehen demnach Relationen der Form

$$(31)\qquad \Pi_i = \sum_{k=1}^{n} \gamma_{ik} P_k, \quad \Pi_i' = \sum_{k=1}^{n} \gamma_{ik} P_k',$$

wo die Coëfficienten γ_{ik} ganze Zahlen bedeuten. Die Gleichung (29) führt jetzt zu der Relation:

$$(32)\qquad \sum_i P_i \sum_k \gamma_{ik} P_k' = 0,$$

welche für alle Werthe von α und β erfüllt sein muss.

Nehmen wir nun an, dass die Grössen P_i von einander unabhängig seien, d. h. dass zwischen ihnen keine lineare Beziehung mit constanten Coëfficienten erfüllt sei, so müssten die n Gleichungen

$$(33)\qquad \sum_k \gamma_{ik} P_k' = 0$$

erfüllt sein, und zwar für alle Werthe von α und β, also auch für $\alpha = \xi$, $\beta = \eta$, d. h. es müssten auch zwischen den P_i die gleichen n Beziehungen bestehen, was der gemachten Annahme widersprechen würde.

Wenn r von einander unabhängige Relationen der Form

$$\sum_k \delta_{ik} P_k = 0 \quad \text{für } i = 1, 2, \ldots . r \tag{34}$$

als erfüllt vorausgesetzt werden, so kann man r der n Grössen P_i mittelst derselben aus der Gleichung (32) herausschaffen, und es folgen für die P'_k dann $n - r$ Relationen von der Form (33). Letztere müssen auch für $\alpha = \xi$, $\beta = \eta$ Geltung haben, also auch für die Grössen P_k ebenso erfüllt sein, wie für die P'_k. Die Gleichungen (34) müssen also mit den Gleichungen (33) identisch sein, und es muss $n = 2r$, also n eine gerade Zahl sein. Zwischen den n Periodicitätsmoduln

$$P_i = S_{\xi\eta}\left(\frac{a_i}{c_i}\right)$$

eines Integrals dritter Gattung bestehen daher mindestens $\frac{n}{2}$ lineare Relationen mit ganzzahligen Coëfficienten. In besonderen Fällen kann die Anzahl der Relationen eine grössere sein, wie im folgenden Paragraphen erörtert werden soll, wobei sich auch der Fall einer ungeraden Zahl n erledigen wird.

Der Satz über die Vertauschung von Parameter und Argument lässt sich auch leicht für Integrale zweiter Gattung aussprechen, und zwar ganz so, wie es in der Theorie der Abel'schen Integrale geschieht.[1])

Es war

$$\int_\alpha^\beta d\,S_{\xi\eta} = \int_\eta^\xi d\,\xi \int_\alpha^\beta d\,\Omega_\xi .$$

Also folgt nach (29):

$$\frac{\partial \int_\alpha^\beta d\,\Omega_\xi}{\partial \beta} = \frac{\partial^2 \int_\alpha^\beta d\,S_{\xi\eta}}{\partial \beta\, \partial \xi} = \frac{\partial^2 \int_\xi^\eta d\,S_{\alpha\beta}}{\partial \beta\, \partial \xi};$$

[1]) Vgl. Clebsch und Gordan, Abel'sche Functionen, p. 122.

und hieraus die betreffende Gleichung für Integrale zweiter Gattung:

$$\left(\frac{\partial\,\Omega_\xi}{\partial\,z}\right)_{z=\beta} = \left(\frac{\partial\,\Omega_\beta}{\partial\,z}\right)_{z=\xi}.$$

Durch Differentiation erhält man für die Periodicitätsmoduln der Integrale zweiter Gattung analoge Relationen, wie für diejenigen der Integrale dritter Gattung.

§ 5. Einige Beispiele.

Hier mögen zunächst einige Beispiele betrachtet werden.[1]) Es sei ein Achteck mit den Ecken A, B, C, D, E, F, G, H gegeben; und diese Ecken mögen bei positivem Umgange in der angegebenen Reihenfolge angetroffen werden. Einander entsprechende Seiten seien

AB	und	FE	durch	die	Transformation	$f_1(z)$,
BC	„	GF	„	„	„	$f_2(z)$,
CD	„	HG	„	„	„	$f_3(z)$,
DE	„	AH	„	„	„	$f_4(z)$.

Dann ist

$$\begin{aligned}
S_{\xi\eta}(F) &= S_{\xi\eta}(f_1(A)) &&= S_{\xi\eta}(f_2(C)) \\
&= S_{\xi\eta}(A) + P_1 &&= S_{\xi\eta}(C) + P_2, \\
S_{\xi\eta}(G) &= S_{\xi\eta}(f_2(B)) &&= S_{\xi\eta}(f_3(D)) \\
&= S_{\xi\eta}(B) + P_2 &&= S_{\xi\eta}(D) + P_3, \\
S_{\xi\eta}(H) &= S_{\xi\eta}(f_3(C)) &&= S_{\xi\eta}(f_4(E)) \\
&= S_{\xi\eta}(C) + P_3 &&= S_{\xi\eta}(E) + P_4.
\end{aligned}$$

Wir setzen nun

$$\begin{aligned}
\Pi_1 &= S_{\xi\eta}(B) - S_{\xi\eta}(A), & \Pi_2 &= S_{\xi\eta}(C) - S_{\xi\eta}(B), \\
\Pi_3 &= S_{\xi\eta}(D) - S_{\xi\eta}(C), & \Pi_4 &= S_{\xi\eta}(E) - S_{\xi\eta}(D).
\end{aligned}$$

---

[1]) Dieselben beiden Beispiele wählt Poincaré a. a. O. zur Erläuterung des Begriffes der Cyklen.

Die Gleichungen (31) nehmen hier die Gestalt an

$$
(35)\qquad
\begin{aligned}
\Pi_1 &= \quad * - P_2 + P_3 - P_4,\\
\Pi_2 &= \quad P_1 + * - P_3 + P_4,\\
\Pi_3 &= - P_1 + P_2 + * - P_4,\\
\Pi_4 &= \quad P_1 - P_2 + P_3 + * \,;
\end{aligned}
$$

und dieselben Relationen gelten für die Grössen P'_i und Π'_i. Diese Beziehungen sind identisch mit denjenigen, welche im Raume zwischen den Punkten P und Ebenen Π bei der Verwandtschaft des linearen Complexes bestehen. Die Bedingung (32) wird

$$
(36)\qquad P_1\Pi'_1 + P_2\Pi'_2 + P_3\Pi'_3 + P_4\Pi'_4 = 0.
$$

Besteht zwischen den P_i die Relation

$$
(37)\qquad \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \alpha_3 P_3 + \alpha_4 P_4 = 0,
$$

so ergibt sich durch Elimination von P_1 (wobei α_1 nicht gleich Null sein darf):

$$
(38)\quad P_2(\alpha_1\Pi'_2-\alpha_2\Pi'_1)+P_3(\alpha_1\Pi'_3-\alpha_3\Pi'_1)+P_4(\alpha_1\Pi'_4-\alpha_3\Pi'_1)=0.
$$

Ist ausserdem

$$
(39)\qquad \beta_1 P_1 + \beta_2 P_2 + \beta_3 P_3 + \beta_4 P_4 = 0,
$$

so folgt:

$$
(40)\quad P_2(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)+P_3(\alpha_1\beta_3-\alpha_3\beta_1)+P_4(\alpha_1\beta_4-\alpha_4\beta_1)=0.
$$

und durch Elimination von P_2 aus (38) erhalten wir eine im P_2 und P_3 lineare und homogene Gleichung, deren Coëfficienten verschwinden müssen; die letzteren sind linear im $\Pi'_1, \Pi'_2, \Pi'_3, \Pi'_4$ und führen zu den Relationen:

$$
(41)\quad
\begin{aligned}
(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)(\alpha_1\Pi'_3-\alpha_3\Pi'_1)-(\alpha_1\beta_3-\alpha_3\beta_1)(\alpha_1\Pi'_2-\alpha_2\Pi'_1)=0,\\
(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)(\alpha_1\Pi'_4-\alpha_4\Pi'_1)-(\alpha_1\beta_4-\alpha_4\beta_1)(\alpha_1\Pi'_2-\alpha_2\Pi'_1)=0.
\end{aligned}
$$

Dieselben Gleichungen müssen erfüllt sein, wenn man α, β bez. durch ξ, η, d. h. Π'_i durch Π_i ersetzt, und müssen dann mit den Gleichungen (37) und (39) gleichbedeutend werden. Aus (35) folgt:

$$\begin{aligned}
a_1 \Pi_2 - a_2 \Pi_1 &= \quad a_1 P_1 + a_2 P_2 - (a_1 + a_2)(P_3 - P_4), \\
a_1 \Pi_3 - a_3 \Pi_1 &= - a_1 P_1 + (a_1 + a_3) P_2 - a_3 P_3 - (a_1 - a_3) P_4, \\
a_1 \Pi_4 - a_4 \Pi_1 &= \quad a_1 P_1 - (a_1 + a_4) P_2 + (a_1 - a_4) P_3 + a_4 P_4.
\end{aligned}$$

Sei zur Abkürzung $(a\beta)_{ik} = a_i \beta_k - a_k \beta_i$, so gehen folglich die Gleichungen (40) über in

$$\begin{aligned}
&- a_1 P_1 [(a\beta)_{12} + (a\beta)_{13}] + a_1 P_2 (a\beta)_{32} + a_1 P_3 (a\beta)_{23} \\
&+ P_4 [(a\beta)_{13}(a_1 + a_2) - (a\beta)_{12}(a_2 - a_1) - a_1 (a\beta)_{14}] = 0.
\end{aligned}$$

Formen wir dies Resultat mit Hülfe von (39) und den analogen Gleichungen

$$\begin{aligned}
P_1 (a\beta)_{12} + P_3 (a\beta)_{32} + P_4 (a\beta)_{42} &= 0, \\
P_1 (a\beta)_{13} + P_2 (a\beta)_{23} + P_4 (a\beta)_{43} &= 0
\end{aligned}$$

um, so ergibt sich nach Weglassung des Factors P_4 eine Beziehung zwischen den a_i und β_i, nemlich

$$a_1[(a\beta)_{13} - (a\beta)_{14} - (a\beta)_{12} - (a\beta)_{24} - (a\beta)_{34}] = a_2[(a\beta)_{12} - (a\beta)_{13}].$$

Analoge Gleichungen wird man durch Vertauschung der Indices erhalten.

Von anderem Gesichtspunkte aus lässt sich dies Beispiel in folgender Weise behandeln. Die beiden Relationen, welche sich für die Π_i' ergeben, sollen (falls man Π_i für Π_i' schreibt) mittelst der Transformation (35) auf die ursprünglichen Gleichungen (37) und (39) zurückgeführt werden. Umgekehrt müssen so aus diesen Gleichungen diejenigen für die Π_i (oder Π_i') gewonnen werden können; es ergibt sich

$$\begin{aligned}
a_1 \Pi_1' + a_2 \Pi_2' + a_3 \Pi_3' + a_4 \Pi_4' &= 0, \\
b_1 \Pi_1' + b_2 \Pi_2' + b_3 \Pi_3' + b_4 \Pi_4' &= 0,
\end{aligned}$$

wo

$$\begin{aligned}
a_1 &= \quad * \; - a_2 + a_3 - a_4, \\
a_2 &= \quad a_1 + \; * \; - a_3 + a_4, \\
a_3 &= - a_1 + a_2 + \; * \; - a_4, \\
a_4 &= \quad a_1 - a_2 + a_3 + \; * \;,
\end{aligned} \tag{42}$$

und wo dieselben Gleichungen zwischen den b_i und β_i bestehen. Mit Hülfe von (36) eliminiren wir Π_1' und Π_2' und finden:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \Pi_3' + a_4 \Pi_4' \\ b_1 & b_2 & b_3 \Pi_3' + b_4 \Pi_4' \\ P_1 & P_2 & P_3 \Pi_3' + P_4 \Pi_4' \end{vmatrix} = 0,$$

und hieraus die beiden Gleichungen:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ P_1 & P_2 & P_3 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_4 \\ P_1 & P_2 & P_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Diese letzteren müssen bez. identisch sein mit den Relationen:

$$(43) \qquad \begin{aligned} P_1 (\alpha\beta)_{14} + P_2 (\alpha\beta)_{24} + P_3 (\alpha\beta)_{34} = 0, \\ P_1 (\alpha\beta)_{13} + P_2 (\alpha\beta)_{23} + P_4 (\alpha\beta)_{43} = 0; \end{aligned}$$

und daraus ergeben sich die folgenden Bedingungsgleichungen:

$$(44) \qquad \begin{aligned} \varrho\, (\alpha\beta)_{14} &= (a\,b)_{23}, & \varrho'\, (\alpha\beta)_{13} &= (a\,b)_{42}, \\ \varrho\, (\alpha\beta)_{24} &= (a\,b)_{31}, & \varrho'\, (\alpha\beta)_{23} &= (a\,b)_{14}, \\ \varrho\, (\alpha\beta)_{34} &= (a\,b)_{12}, & \varrho'\, (\alpha\beta)_{43} &= (a\,b)_{21}. \end{aligned}$$

Wegen des doppelten Werthes von $(a\,b)_{12} = -(a\,b)_{21}$ muss $\varrho' = \varrho = 1$ sein; berechnet man ferner die Grössen $(a\,b)_{ik}$ durch $(\alpha\beta)_{ik}$ gemäss (42), so reduciren sich die Bedingungen (44) auf die Forderung:

$$(45) \qquad (\alpha\beta)_{34} = (\alpha\beta)_{24} = (\alpha\beta)_{14} = (\alpha\beta)_{31} = (\alpha\beta)_{23}.$$

Die Gleichungen (43) werden demnach:

$$\begin{aligned} P_1 + P_2 + P_3 = 0, \\ P_1 - P_2 + P_4 = 0. \end{aligned}$$

Mit diesen Gleichungen müssen die ursprünglichen Relationen (37) und (39) äquivalent sein; auch die oben (p. 441) vorläufig aufgestellte Bedingung ist durch sie identisch erfüllt.

Die Elimination setzt voraus, dass nicht gleichzeitig a_3 und a_4 verschwinden; denn in dem Falle würden die linken

Seiten der beiden Gleichungen (43) einander proportional werden. Das Resultat wäre im Wesentlichen dasselbe, als wenn wir in den vorliegenden Formeln α_1 und α_2 verschwinden lassen. Aus (45) folgt dann

$$\beta_1 = 0, \ \beta_2 = 0, \ \alpha_3 \beta_4 - \beta_3 \alpha_4 = 0;$$

die angenommenen Bedingungen wären also einfach

$$P_3 = 0 \text{ und } P_4 = 0.$$

Das erhaltene Resultat ist aber nicht anwendbar, wenn sowohl α_1 und α_2, als auch β_3 und β_4 gleich Null sind. In diesem Falle ergibt sich

$$(\alpha_3 - \alpha_4)(\Pi_1' - \Pi_2') - \alpha_4 \Pi_3' + \alpha_3 \Pi_4' = 0,$$
$$\beta_2 \Pi_1' - \beta_1 \Pi_2' + (\beta_1 - \beta_2)(\Pi_3' - \Pi_4') = 0.$$

Die Anwendung von (36) führt durch Elimination von Π_1' und Π_2' zu der Relation:

$$\begin{vmatrix} \alpha_3 - \alpha_4 & \alpha_4 - \alpha_3 & -\alpha_4 \Pi_3' + \alpha_3 \Pi_4' \\ \beta_2 & -\beta_1 & (\beta_1 - \beta_2)(\Pi_3' - \Pi_4') \\ P_1 & P_2 & P_3 \Pi_3' + P_4 \Pi_4' \end{vmatrix} = 0;$$

und hieraus, da die Coëfficienten von Π_3' und Π_4' einzeln verschwinden müssen:

$$(P_1 + P_2 + P_3)(\beta_1 - \beta_2)(\alpha_3 - \alpha_4) + \beta_1 \alpha_4 P_1 + \beta_2 \alpha_4 P_2 = 0,$$
$$(P_1 + P_2 + P_4)(\beta_1 - \beta_2)(\alpha_3 - \alpha_4) + \beta_1 \alpha_3 P_1 + \beta_2 \alpha_3 P_2 = 0.$$

Wir haben also folgende Möglichkeiten:

1) $\alpha_3 = \alpha_4$, $\beta_1 P_1 + \beta_2 P_2 = 0$, es folgt $P_3 + P_4 = 0$;
2) $\beta_1 = \beta_2$, $P_1 + P_2 = 0$, „ „ $\alpha_3 P_3 + \alpha_4 P_4 = 0$;
3) $\beta_1 P_1 + \beta_2 P_2 = 0$, $(\alpha_3 - \alpha_4)(P_1 + P_2) + \alpha_3 P_3 - \alpha_4 P_4 = 0$.

Im letztern Falle müsste auch

$$(\alpha_3 - \alpha_4)(\beta_1 - \beta_2) P_2 + 2 \alpha_3 \beta_1 P_3 = 0$$

sein; es würde folgen $\beta_1 = \beta_2$ und $\alpha_3 = 0$, so dass die ursprünglichen Relationen lauteten

$$P_1 + P_2 = 0, \quad P_4 = 0.$$

Im Falle 1) geht die Gleichung (36) über in

$$P_1(\beta_2 \Pi_1' - \beta_1 \Pi_2') + \beta_2 P_3 (\Pi_3' - \Pi_4') = 0$$

also:

$$\beta_2 \Pi_1' - \beta_1 \Pi_2' = (P_3 - P_4)(\beta_1 + \beta_2) - (\beta_1 P_1 + \beta_2 P_2) = 0,$$
$$\Pi_3' - \Pi_4' \quad = -(P_3 + P_4) + 2(P_2 - P_1) = 0.$$

Es ist also nothwendig $\beta_1 + \beta_2 = 0$ und $P_3 + P_4 = 0$, wo dann die ursprünglichen Gleichungen (37) und (39) in der Form

$$P_1 - P_2 = 0, \quad P_3 + P_4 = 0$$

erscheinen.

Ein anderes Beispiel gibt dasselbe Achteck, wenn die Seiten auf einander nach folgendem Schema bezogen werden:

AB	auf	DC	durch die Transformation	f_1,
BC	„	ED	„ „ „	f_2,
EF	„	HG	„ „ „	f_3,
FG	„	AH	„ „ „	f_4.

Haben die Grössen P_i und Π_i die frühere Bedeutung, so wird hier

$$P_1 = S_{\xi\eta}(D) - S_{\xi\eta}(A) = S_{\xi\eta}(C) - S_{\xi\eta}(D),$$
$$P_2 = S_{\xi\eta}(E) - S_{\xi\eta}(B) = S_{\xi\eta}(D) - S_{\xi\eta}(C),$$
$$P_3 = S_{\xi\eta}(G) - S_{\xi\eta}(F) = S_{\xi\eta}(H) - S_{\xi\eta}(E),$$
$$P_4 = S_{\xi\eta}(F) - S_{\xi\eta}(A) = S_{\xi\eta}(H) - S_{\xi\eta}(G).$$

An Stelle der Gleichungen (35) treten die folgenden

$$\Pi_1 = S_{\xi\eta}(B) - S_{\xi\eta}(A) = -P_2,$$
$$\Pi_2 = S_{\xi\eta}(C) - S_{\xi\eta}(B) = \quad P_1,$$
$$\Pi_3 = S_{\xi\eta}(D) - S_{\xi\eta}(C) = -P_4,$$
$$\Pi_4 = S_{\xi\eta}(G) - S_{\xi\eta}(F) = \quad P_3.$$

Wir gehen wieder von den Relationen (37) und (39) aus.

$$-\alpha_2 \Pi_1' + \alpha_1 \Pi_2' - \alpha_4 \Pi_3' + \alpha_3 \Pi_4' = 0,$$
$$-\beta_2 \Pi_1' + \beta_1 \Pi_2' - \beta_4 \Pi_3' + \beta_3 \Pi_4' = 0,$$

und die Anwendung von (36) führt zu dem Resultate

$$\begin{vmatrix} -\alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_3 \Pi'_4 - \alpha_4 \Pi'_3 \\ -\beta_2 & \beta_1 & \beta_3 \Pi'_4 - \beta_4 \Pi'_3 \\ P_1 & P_2 & P_4 \Pi'_4 + P_3 \Pi'_3 \end{vmatrix} = 0;$$

also bestehen die beiden Gleichungen

$$P_1 (\alpha\beta)_{13} + P_2 (\alpha\beta)_{23} + P_4 (\alpha\beta)_{12} = 0,$$
$$P_1 (\alpha\beta)_{14} + P_2 (\alpha\beta)_{24} - P_3 (\alpha\beta)_{12} = 0.$$

Die Vergleichung mit (43) ergibt:

$$(\alpha\beta)_{12} + (\alpha\beta)_{34} = 0$$

als einzige Bedingung. Dieselbe ist insbesondere erfüllt für

$$\alpha_1 = 0, \ \alpha_2 = 0, \ \beta_3 = 0, \ \beta_4 = 0,$$

in welchem Falle die Relationen

$$\alpha_3 P_3 + \alpha_4 P_4 = 0, \quad \beta_1 P_1 + \beta_2 P_2 = 0,$$
$$\alpha_3 \Pi'_4 - \alpha_4 \Pi'_3 = 0, \quad \beta_1 \Pi'_2 - \beta_2 \Pi'_1 = 0$$

bestehen. Ist gleichzeitig $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 0$, $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = 0$, $\beta_4 = 0$, so haben wir $P_3 = 0$ und $P_4 = 0$, d. h. P_1 und P_2 sind die normalen Periodicitätsmoduln des Normalintegrals $S_{\xi\eta}$.

§ 6. Die Integrale erster Gattung.

In der Theorie der Abel'schen Integrale erscheinen als Periodicitätsmoduln der Normalintegrale dritter Gattung an den Querschnitten der Riemann'schen Fläche bekanntlich die Normalintegrale erster Gattung; und die Grenzen der letzteren sind die Unstetigkeitspunkte der Integrale dritter Gattung.

Fassen wir jetzt die Grössen $S_{\xi\eta}\left(\frac{a_i}{c_i}\right)$ als Functionen von ξ und η auf, und setzen dem entsprechend nach (24) und (25)

$$S_{\xi\eta}\left(\frac{a_i}{c_i}\right) = \sum_k \log \frac{\frac{a_i}{c_i} - f_k(\xi)}{\frac{a_i}{c_i} - f_k(\eta)}, \tag{46}$$

oder abgekürzt

$$S_{\xi\eta}\left(\frac{a_i}{c_i}\right) = \int_\eta^\xi du_i = u_i(\xi) - u_i(\eta),$$

so zeigt sich, dass die rechte Seite für keinen Punkt ξ im Innern des Hauptkreises unendlich gross wird, ihr also in der That die Eigenschaft eines Integrals erster Gattung zukommt; denn die Punkte $\frac{a_i}{c_i}$, welche durch die Substitution $f_i^{-1}(z)$ aus dem Punkte $z = \infty$ hervorgehen, liegen sämmtlich ausserhalb des Hauptkreises.

Die Anzahl der von einander linear unabhängigen Integrale erster Gattung ist gleich der Anzahl der von einander linear unabhängigen Functionen $S_{\xi\eta}\left(\frac{a_i}{c_i}\right)$, welche in § 4 vorläufig bestimmt wurde. Diese Bestimmung bedarf aber noch einer wesentlichen Modification in dem Falle, dass die Ecken des Fundamentalpolygons (im Sinne Poincaré's) in mehrere Cyclen zerfallen.

Der Punkt $z = \infty$, welcher bei Bildung der Ausdrücke $S_{\xi\eta}\left(\frac{a_i}{c_i}\right) = S_{\xi\eta}(f_i(\infty))$ wesentlich zu sein scheint, muss thatsächlich durch einen beliebigen, ausserhalb des Hauptkreises gelegenen Punkt ersetzt werden können, denn durch eine lineare Hülfstransformation kann er an die Stelle eines beliebigen Punktes dieser Art gebracht werden. Um einen solchen willkürlichen Punkt ζ in die Rechnung einzuführen, beachten wir, dass nach (24) die Formel

$$\begin{aligned} S_{\xi\eta}(f_i(z)) - S_{\xi\eta}(z) &= S_{\xi\eta}\left(\frac{a_i}{c_i}\right) - S_{\xi\eta}(\infty) \\ &= S_{\xi\eta}(f_i(\zeta)) - S_{\xi\eta}(\zeta) \end{aligned}$$

für jeden Werth von z oder ζ gilt. Es ist also auch

$$\begin{aligned} u_i(\xi) - u_i(\eta) &= S_{\xi\eta}(f_i(\zeta)) - S_{\xi\eta}(\zeta) \\ &= \sum_k \log\left(\frac{f_i(\zeta) - f_k(\xi)}{f_i(\zeta) - f_k(\eta)} \cdot \frac{\zeta - f_k(\eta)}{\zeta - f_k(\xi)}\right) \end{aligned}$$

eine von ζ unabhängige Constante, falls ζ ausserhalb des Hauptkreises liegt.

Gehören nun einem Cyclus ν Ecken A_i an, so können durch gewisse $\nu - 1$ Transformationen diese Ecken mit einer von ihnen zur Deckung gebracht werden; dasselbe gilt für die zu diesen Ecken conjugirten Punkte A_i' ausserhalb des Hauptkreises. Umgekehrt kann einer der letzteren Punkte, den wir jetzt ζ nennen, durch gewisse Transformationen successive mit den anderen Ecken zusammengebracht werden; die letzte Transformation $f_j(\zeta)$ aber führt ihn an die alte Stelle zurück. Ist nur ein Cyclus vorhanden, so setzt sich diese letzte Substitution aus den früheren zusammen; sind aber mehrere Cyclen vorhanden, so ist dies nicht der Fall, und doch ist für diese Transformation $f_j(\zeta) = \zeta$, also auch der entsprechende Periodicitätsmodul

$$S_{\xi\eta}(f_j(\zeta)) - S_{\xi\eta}(\zeta),$$

welcher eine lineare Function der $S_{\xi\eta}\left(\frac{a_i}{c_i}\right)$ ist, gleich Null. Bei einem Cyclus haben wir also n, bei zwei Cyclen $n-1$ Grössen $S_{\xi\eta}\left(\frac{a_i}{c_i}\right) = P_i$ zu berücksichtigen; bei ϱ Cyclen bleiben $n - \varrho + 1$ Grössen P_i zu untersuchen.

Auf diese $n - \varrho + 1$ Grössen sind die Ueberlegungen von § 4 anzuwenden. Die Zahl p der von einander unabhängigen Integrale erster Gattung ist daher im Allgemeinen gleich

$$p = \frac{n + 1 - \varrho}{2}.$$

Es ist dieses dieselbe Zahl, welche Poincaré durch andere Betrachtungen (über den „Zusammenhang" des Polygons) für das Geschlecht der zugehörigen Riemann'schen Fläche abgeleitet hat. Ist n eine ungerade Zahl, so muss hiernach ϱ eine gerade Zahl sein.

Wir haben noch die Periodicitäts-Moduln der Integrale erster Gattung zu untersuchen. Die Aenderung, welche u_i erleidet, wenn ξ durch $f_m(\xi)$ ersetzt wird, ist gleich

$$(46)\quad u_i(f_m(\xi)) - u_i(\xi) = \sum_k \log\left(\frac{f_i(\zeta)-f_k(f_m(\xi))}{f_i(\zeta)-f_k(\xi)} \cdot \frac{\zeta - f_k(\xi)}{\zeta - f_k(f_m(\xi))}\right),$$

wo die rechte Seite unabhängig von ζ ist, indem z. B. $\zeta = x$ genommen werden kann. Wir haben nachzuweisen, dass die rechte Seite auch unabhängig von ξ ist.

Der Beweis wird unmittelbar durch den Satz über die Vertauschung von Parameter und Argument gegeben. In der That ergibt sich unmittelbar aus den Formeln, welche in § 4 auf die Gleichung (28) führten, das Resultat:

$$u_i(f_m(\xi)) - u_i(\xi) = \sum_k \log\left(\frac{f_k^{-1}(f_i(\zeta)) - f_m(\xi)}{f_k^{-1}(f_i(\zeta)) - \xi} \cdot \frac{f_k^{-1}(\zeta) - \xi}{f_k^{-1}(\zeta) - f_m(\xi)}\right)$$
$$= \sum_k \log\left(\frac{f_m(\xi) - f_k^{-1}(f_i(\zeta))}{f_m(\xi) - f_k^{-1}(\zeta)} \cdot \frac{\xi - f_k^{-1}(\zeta)}{\xi - f_k^{-1}(f_i(\zeta))}\right).$$

Die rechte Seite geht aber aus der rechten Seite von (46) hervor, wenn man ξ, ζ, f_i, f_m, f_k bez. durch ζ, ξ, f_m, f_i, f_k^{-1} ersetzt. Da nun die Gesammtheit der Transformationen f_k identisch ist mit der Gesammtheit der Transformationen f_k^{-1}, so folgt

$$(47)\quad u_i(f_m(\xi)) - u_i(\xi) = u_m(f_i(\zeta)) - u_m(\zeta)$$
$$= u_m(f_i(\infty)) - u_m(\infty).$$

Die rechte Seite ist bereits als unabhängig von ζ nachgewiesen (indem z. B. $\zeta = \infty$ genommen werden konnte); folglich ist auch die linke Seite (die nach demselben Gesetze gebildet ist) unabhängig von ξ. Setzen wir

$$a_{im} = u_i(f_m(\xi)) - u_i(\xi) = u_m(f_i(\xi)) - u_m(\xi),$$

so folgt noch die Relation

$$(48)\quad a_{im} = a_{mi}.$$

Die Gleichung (46) löst die Aufgabe, alle Periodicitätsmoduln der Integrale erster Gattung als Functionen von $6p-6$ Parametern darzustellen,[1]) denn so gross ist nach Poincaré

---

[1]) Entsprechende Formeln gibt Schottky a. a. O. für den von ihm

die Anzahl der reellen Parameter, von welchen die gegebene Transformationsgruppe abhängt, und ebenso gross ist bekanntlich die Anzahl der Moduln, von denen die zu einer Curve gehörigen Abel'schen Integrale abhängen.

Die bekannten bilinearen Relationen für die Periodicitätsmoduln zweier Integrale erster Gattung werden durch Betrachtung des Integrals $\int u_i \, du_m$ ebenso gewonnen, wie für zwei Integrale dritter Gattung mittelst des Integrals $\int S_{\alpha\beta} \, dS_{\xi\eta}$ in § 4 geschah, und wie es Poincaré an einem Beispiele gezeigt hat.[1])

Die Anzahl der Relationen (48) ist gleich $n(2n-1)$, da die Indices i, n alle von einander verschiedenen Werthe von 1 bis $2n$ annehmen können. Es sind nur p der $2n$ Integrale u_i von einander unabhängig; indem man die übrigen Integrale durch die p ersten ausdrückt, erhält man aus (48) für $i > p$ lineare Relationen, welche die Periodicitätsmoduln dieser übrigen Integrale auf diejenigen der p ersten zurückführen. Für das auf p. 442 behandelte Beispiel findet man leicht, dass P_1 und P_2 Normalintegrale sind, und zwar

P_1 mit den Periodicitätsmoduln $a_{11}, a_{12}, a_{13} = -a_{12} - a_{11}, a_{14} = a_{12} - a_{11}$,
P_2 „ „ „ $a_{21}, a_{22}, a_{23} = -a_{12} - a_{22}, a_{24}\ a_{22} - a_{12}$,

wozu noch je $2\pi i$ wegen des Logarithmus hinzutritt. Auch im Falle 1) p. 443 f. werden P_1 und P_3 leicht als Normalintegrale erkannt, bez. mit den Periodicitätsmoduln

$$a_{11} = a_{12},\ a_{13} = -a_{14} \text{ und } a_{31} = a_{32},\ a_{33} = -a_{34}.$$

In analoger Weise bleiben überhaupt p^2 Periodicitätsmoduln (von Normalintegralen) übrig, zwischen denen noch $\frac{1}{2}p(p-1)$ Relationen der Form (48) bestehen.

Die vorstehenden Betrachtungen müssen etwas modificirt werden, wenn die Begrenzung des ursprünglichen Kreisbogen-Polygons streckenweise von dem Hauptkreise selbst gebildet

---

behandelten besonderen Fall; die dabei eingeführten Integralfunctionen erster Gattung haben von selbst die Eigenschaften der Normalintegrale.

[1]) Vgl. Acta mathematica Bd. 1, p. 259 ff.

wird, d. h. wenn in der Begrenzung sogenannte Seiten zweiter Art vorkommen und wenn in Folge dessen das ursprüngliche Polygon R_0 zusammen mit seinem „Spiegelbilde (R_0') in Bezug auf den Hauptkreis" ein einziges in sich zusammenhängendes Polygon bildet, das der weiteren Betrachtung zu Grunde zu legen ist. Wenn das ursprüngliche Polygon R_0 $2n$ Seiten erster Art mit q Cyclen besitzt, so bildet R_0 mit R_0' zusammen ein Polygon mit $4n$ Seiten erster Art und $2q$ Cyclen. Die Anzahl der zu betrachtenden Functionen $P_i = S_{\xi\eta}\left(\frac{a_i}{c_i}\right)$ wäre also zunächst gleich $2n - 2q$. In diesem Falle aber liegen die Punkte $\frac{a_i}{c_i}$ zwar auch alle ausserhalb des Hauptkreises, aber einer liegt im Innern von R_0', und in ihm wird jede der Grössen

$$P_i = S_{\xi\eta}\left(\frac{a_i}{c_i}\right) = \sum_k \log \frac{a_i - c_i f_k(\xi)}{a_i - c_i f_k(\eta)}$$

unendlich gross, denn unter den singulären Punkten

$$\xi = f_k^{-1}\left(\frac{a_i}{c_i}\right)$$

dieser Function kommen alle Punkte $\frac{a_r}{c_r}$ vor, wenn man von einem $\left(\frac{a_i}{c_i}\right)$ ausgeht. Als überall endliche Integrale können daher nur die Differenzen $P_i - P_h$ in Betracht kommen, d. h. $2n - 2q - 1$ Functionen; und die Anzahl der zwischen ihnen bestehenden Relationen muss gleich der Hälfte der um eine Einheit vermehrten Zahl sein (wie oben); das Geschlecht, d. i. die Anzahl der von einander unabhängigen Integrale erster Gattung, wird demnach

$$p = n - q,$$

wie es Poincaré seinerseits findet.

Hat man es mit sogenannten Klein'schen Gruppen zu thun, so können weitere Vereinfachungen eintreten, indem man als singuläre Punkte der Integrale erster Gattung die Grenzpunkte benutzt, um welche sich die Polygon-Seiten unendlich verdichten, und die selbst in keinem Polygon liegen, wie es Schottky in dem von ihm behandelten Falle thut.

§ 7. Die Fuchs'schen Zetafunctionen.

Ist eine lineare Differentialgleichung μ^{ter} Ordnung in der Form

$$\frac{d^\mu v}{d x^\mu} + \sum_{i=0}^{i=\mu-1} \varphi_i(x, y) \frac{d^i v}{d x^i} = 0 \tag{49}$$

gegeben, wo die Coëfficienten $\varphi_i(x, y)$ rationale Functionen der Argumente x und y bezeichnen, und zwischen letzteren selbst eine algebraische Gleichung

$$f(x, y) = 0 \tag{50}$$

erfüllt ist, so kann man nach den Arbeiten von Klein, Poincaré und Schottky diese Coëfficienten $\varphi_i(x, y)$ als eindeutige automorphe Functionen einer Variabeln z darstellen, welche gleich $\frac{w_1}{w_2}$ zu setzen ist, wenn w_1 und w_2 particuläre Integrale einer Differentialgleichung zweiter Ordnung von der Form

$$\frac{d^2 w}{d x^2} = \psi(x, y) \cdot w \tag{51}$$

sind, vorausgesetzt, dass die rationale Function $\psi(x, y)$ passend gewählt wird, nemlich so, dass x und y eindeutige automorphe Functionen von w werden.

Auch die Integrale der Gleichung (49) lassen sich dann als Functionen von z auffassen; und unter gewissen Voraussetzungen über die singulären Stellen der Differentialgleichung (49) sind ihre Integrale durch Potenzreihen nach Potenzen von z darstellbar, welche alle im Einheitskreise convergiren, falls man es so eingerichtet hat, dass der Einheitskreis als Hauptkreis für die durch (51) einzuführenden automorphen Functionen auftritt, wo dann nur Punkte z im Innern des Einheitskreises in Betracht kommen.

Wenn nun z eine lineare Transformation der zu (51) gehörigen Gruppe erleidet, d. h. z durch $f_i(z)$ ersetzt wird, so erleiden die Integrale von (49), die wir Z_i nennen, ebenfalls eine lineare isomorphe Substitution, indem

$$(52) \qquad Z_k(f_i(z)) = a_{k1}^{(i)} Z_1(z) + a_{k2}^{(i)} Z_2(z) + \ldots + a_{k\mu}^{(i)} Z_\mu(z),$$
$$k = 1, 2, \ldots . \mu; \quad i = 1, 2, \ldots n.$$

Solche Functionen Z bezeichnet Poincaré[1]) als „fonctions zétafuchsiennes" und stellt sie durch Reihen ξ_j dar, die in folgender Weise definirt sind:

$$(53) \qquad \xi_j(z) = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{d f_i(z)}{d z}\right)^m \sum_{k=1}^{k=\mu} A_{jk}^{(i)} H_k(f_i(z)).$$

Hierin bedeutet $f_i(z)$ eine lineare Substitution (wie oben in § 1 ff.); $A_{jk}^{(i)}$ sind die bei Auflösung der Gleichungen (52) auftretenden Coëfficienten; und

$$H_1(z),\ H_2(z) \ldots .\ H_\mu(z)$$

sind μ rationale Functionen von z; der Index j kann die Werthe $1, 2, \ldots . \mu$ annehmen. Die ganze Zahl m muss so gewählt sein, dass die Reihe (53) convergirt. Die Convergenz wird durch Vergleichung mit der Reihe $\sum (f_i')^m$ beurtheilt. Bezeichnet M den grössten absoluten Betrag aller in der Substitutionsgruppe (52) vorkommenden Coëfficienten $a_{kl}^{(i)}$, so muss nach Poincaré

$$2m - 4 > a \log (M\mu)$$

sein, wo a eine gewisse Constante bedeutet, ausserdem $m > 1$, damit die zum Vergleiche benutzte Reihe sicher convergirt.

Da wir nun in § 1 die Convergenz der letzteren Reihe auch für $m = 1$ nachgewiesen haben, so kann die Bedingung (56) durch die günstigere

$$2m - 2 > a \log (M\mu)$$

ersetzt werden, wobei ausserdem $m \geq 1$ sein muss. Insbesondere

[1]) Mémoire sur les fonctions zétafuchsiennes, Acta mathematica, Bd. 5, 1884.

kann auch $m = 1$ sein, wenn $M\mu < 1$ ist. Diese Voraussetzung soll im Folgenden gemacht werden.

Die Function ξ_j genügt identisch der Bedingung

$$\xi_j(f_r(z)) = (f_r'(z))^{-m} \sum_{k=1}^{\mu} a_{jk}^{(r)} \xi_k(z). \tag{54}$$

Die Anwendung der linearen Transformation $f_r(z)$ auf die Variable z als Argument der Function $\xi_j(z)$ bewirkt also, dass sich letztere linear durch die anderen Functionen $\xi_k(z)$, versehen mit dem Factor $f_r'(z)^{-m}$, ausdrückt. Es ist dies derselbe Factor, welcher zu der in (2) gegebenen Poincaré'schen Θ-Function bei der gleichen Transformation hinzutritt, so dass die μ-Functionen

$$\frac{\xi_1}{\Theta}, \frac{\xi_2}{\Theta}, \ldots\ldots \frac{\xi_\mu}{\Theta} \tag{55}$$

ein System von Functionen Z_k bilden, wie es den Gleichungen (52) genügt; und sie genügen einer Differentialgleichung von der Form (49).

Im Folgenden soll nicht weiter auf den Zusammenhang mit den Differentialgleichungen eingegangen werden; es soll nur gezeigt werden, wie man eine besonders einfache Klasse von Functionen benutzen kann zur Bildung eines Systems von Fuchs'schen Zeta-Functionen.

Wir bilden die Reihe

$$\eta_j(z) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\mu} A_{kj}^{(i)} \frac{f_k'(\zeta_k)}{z - f_i(\zeta_k)}; \tag{56}$$

dann ist nach der Umformung, welche zu Gleichung (19) führte:

$$\eta_j(f_r(z)) = \sum_i \sum_k A_{kj}^{(i)} \frac{1}{z - f_r^{-1}(f_j(\zeta_k))} \frac{d f_r^{-1}(f_j(\zeta_k))}{d\zeta_k} + \Omega_{jr}$$

wo Ω_{jr} eine von z unabhängige Constante bedeutet, nemlich

$$\Omega_{jr} = \sum_i \sum_k A_{kj}^{(i)} \frac{c_r}{a_r - c_r f_i(\zeta_k)}.$$

Andererseits ist identisch

$$\eta_j(z) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\mu} a_{jl}^{(r)} \sum_{k=1}^{\mu} A_{kl}^{(i)} \frac{1}{z - f_r^{-1}(f_i(\zeta_k))} \frac{d f_r^{-1}(f_i(\zeta_k))}{d \zeta_k},$$

denn die rechte Seite dieser Formel unterscheidet sich von der rechten Seite der Gleichung (56) nur dadurch, dass vor der Summation auf die i^{te} Transformation die aufgelöste r^{te} angewandt wurde, was das Resultat nicht beeinflussen kann, da in der Summe alle Transformationen der Gruppe vorkommen. Also folgt:

$$\eta_j(z) = \sum_{l=1}^{\mu} a_{jl}^{(r)} \eta_l(f_r(z)) - \sum_{l=1}^{\mu} a_{jl}^{(r)} \Omega_{jr}$$

oder durch Auflösung

$$\eta_l(f_r(z)) = \sum_{j=1}^{\mu} A_{jl}^{(r)} \eta_j(z) + A^{(r)} \Omega_{jr},$$

wo $A^{(r)}$ die Determinante der r^{ten} Substitution (52) bedeutet. Hieraus folgt unmittelbar:

Die Differentialquotienten der η-Functionen, welche durch (56) definirt werden, haben die wesentliche Eigenschaft der Poincaré'schen Functionen ξ_j, indem sie den Gleichungen (54) genügen, nemlich:

$$\eta_j'(f_r(z)) = [f_r'(z)]^{-1} \sum_{l=1}^{\mu} A_{lj}^{(r)} \eta_l'(z).$$

Den Functionen η kommen hiernach analoge Eigenschaften zu, wie den Integralfunctionen zweiter Gattung, zu deren Aufstellung die Betrachtung der automorphen Functionen in § 2 Veranlassung gab. Durch Integration nach dem Parameter ζ würden Functionen entstehen, welche den Abel'schen Integralen dritter Gattung analog sind, und deren Periodicitätsmoduln den Integralen erster Gattung entsprechen.

Die Functionen η_j' können an Stelle der ξ_j zur Bildung der Fuchs'schen Z-Functionen (55) benutzt werden, wenn auch Θ passend gewählt wird.