Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Classe

der

k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.

1900. Heft I.

München.
Verlag der k. Akademie.
1900.
In Commission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).

Ueber den sogenannten zweiten Mittelwerthsatz für endliche Summen und Integrale.

Von **Alfred Pringsheim.**

(*Eingelaufen 13. Juni.*)

Der sogenannte zweite Mittelwerthsatz der Integral-Rechnung existirt in zwei verschiedenen Formen:

$$\left.\begin{array}{ll}(\mathrm{I}) & \int_a^b f(x)\cdot\varphi(x)\cdot dx = f(a)\int_a^\xi \varphi(x)\cdot dx \\ (\mathrm{II}) & \int_a^b f(x)\cdot\varphi(x)\cdot dx = f(a)\cdot\int_a^\xi \varphi(x)\cdot dx + f(b)\int_\xi^b \varphi(x)\cdot dx\end{array}\right\}(a \leqq \xi \leqq b),$$

die erste im wesentlichen von O. Bonnet,[1] die zweite von P. Du Bois-Reymond[2] herrührend. Dabei wird $f(x)$ in Gl. (I) für $a \leqq x \leqq b$ als positiv und niemals zunehmend, in (II) lediglich als monoton (niemals zu- oder niemals abnehmend) vorausgesetzt. Trotzdem nun der Satz (I) unter specielleren Voraussetzungen besteht, als der Satz (II), so ist er doch der allgemeinere von beiden. Denn während es,

---

[1]) Journal de Math. T. 14 (1849), p. 249. — Mémoires Acad. Belg. T. 23 (1850), p. 8. — B. giebt statt Gl. (I) die Ungleichungen:

$$A\cdot f(a) \leqq \int_a^b \varphi(x)\cdot dx \leqq B\cdot f(a),$$

wo A, B das Minimum und Maximum von $\int_a^\xi \varphi(x)\cdot dx$ für $a \leqq \xi \leqq b$ bedeuten.

[2]) Journ. f. Math. Bd. 69 (1868), p. 82.

ausser in dem besonderen Falle $f(b) = 0$, zunächst unmöglich ist, den Satz (I) aus (II) herzuleiten, so ergiebt sich, wenn auch $f(x)$ lediglich als monoton vorausgesetzt wird, allemal die Anwendbarkeit des Satzes (I) auf $\pm f(x) + C$ (bei passender Wahl des zweifelhaften Vorzeichens und Limitirung von C), sodass ein noch etwas allgemeinerer Satz, als (II) resultirt, der schliesslich durch Specialisirung von C auch Gl. (II) liefert. Mit anderen Worten: Satz (I) ist keineswegs ein specieller Fall von (II), vielmehr erscheint (II) als ein blosses Corollar zu (I). Und da die Gleichung (I) für mancherlei Anwendungen die bei weitem bequemere ist, so findet man auch in den meisten Lehrbüchern zunächst die Bonnet'sche Form (I) als den eigentlichen Hauptsatz bewiesen und die Du Bois-Reymond'sche Form (II) auf dem eben angegebenen Wege daraus abgeleitet.[1]) Sogar Herr C. Neumann, der in der Vorrede (p. IV) seines Buches über Kugel-Functionen (Leipzig 1881)[2]) den Bonnet'schen Satz sehr kurz als einen „speciellen Fall" des Du Bois-Reymond'schen abthut, um dann diesen letzteren über Gebühr zu preisen, beweist schliesslich (p. 29 ff.) doch vor allem den Bonnet'schen Satz (I) unter der falschen Bezeichnung des „Du Bois-Reymond'schen" Mittelwerthsatzes[3]) und gewinnt daraus den Satz (II) als „Allgemeinere Form des Du Bois'schen Satzes" — eine Bezeichnung, die ebenfalls nicht correct erscheint, da der Satz (II), wie bemerkt, den Satz (I) zunächst nicht in sich enthält.

Nun existirt aber in der That eine solche allgemeinere Form des Satzes (II), die mir freilich in keiner seiner zahl-

---

[1]) Dabei wird dann gewöhnlich in (II) statt $f(a)$, $f(b)$ noch speciell $f(a+0)$, $f(b-0)$ geschrieben.

[2]) Der vollständige Titel lautet: Ueber die nach Kreis-, Kugel- und Cylinder-Functionen fortschreitenden Entwickelungen, unter durchgängiger Anwendung des Du Bois-Reymond'schen Mittelwerthsatzes.

[3]) Ebenso wenig scheint es angemessen, wenn Herr C. Jordan in seinem Cours d'Analyse (T. II, 2ième éd., p. 220) den Satz (II) schlechthin als von Bonnet herrührend bezeichnet, ohne den Namen Du Bois-Reymond's überhaupt zu erwähnen.

reichen Darstellungen begegnet ist, die aber von Du Bois-Reymond zwar nicht bei jener oben erwähnten ersten Formulirung oder einer späteren Vervollständigung des betreffenden Beweises,[1]) sondern bei anderer Gelegenheit kurz angegeben worden ist. In einer Besprechung der Thomae'schen Schrift: „Einleitung in die Theorie der bestimmten Integrale" (Halle, 1875)[2]) bemerkt er nämlich ausdrücklich, dass man in (II) statt $f(a)$ bezw. $f(b)$ auch jede Zahl $\leqq f(a+0)$ bezw. $\geqq f(b-0)$ (scil., wenn $f(x)$ als niemals abnehmend vorausgesetzt wird) substituiren kann, ohne dass ξ das Intervall $a \leqq \xi \leqq b$ verlässt. Die dafür einzig gegebene Begründung: „das Integral links bleibt dabei unverändert" — scheint mir freilich unzulänglich; denn das Integral links bleibt ja auch unverändert, wenn man $f(a)$, $f(b)$ durch irgendwelche ganz beliebige Zahlen ersetzt. Es wäre daher zur genaueren Prüfung jener Bemerkung eine nochmalige Revision des betreffenden Beweises erforderlich,[3]) die dann in der That ihre Richtigkeit ergiebt. Man gewinnt auf diese Weise an Stelle des Satzes (II) den folgenden:

$$\text{(III)}\quad \begin{aligned} &\int_a^b f(x)\cdot\varphi(x)\cdot dx \\ &= A\int_a^\xi \varphi(x)\cdot dx + B\int_\xi^b \varphi(x)\cdot dx \begin{cases} \text{wo:} & A \leqq f(a+0) \leqq f(b-0) \leqq B, \\ \text{oder:} & A \geqq f(a+0) \geqq f(b-0) \geqq B, \end{cases} \end{aligned}$$

welcher dann in der That nicht nur diesen letzteren, sondern auch den Satz (I) als speciellen Fall enthält.[4]) Hierbei

---

[1]) Journ. f. Math. Bd. 79 (1875), p. 42, Fussnote.

[2]) Zeitschr. f. Math. Bd. 20 (1875), Hist.-lit. Abth., p. 126.

[3]) Man kann sich dabei mit Vortheil der gerade von Herrn Thomae (a. a. O. p. 18) benützten Methode bedienen, dass man setzt:

$$\int_a^b f(x)\cdot\varphi(x)\cdot dx = \int_{a'}^{b'} f(x)\cdot\varphi(x)\cdot dx,$$

wo: $a' < a < b < b'$ und $\varphi(x) = 0$ für $a' \leqq x \leqq a$ und $b \leqq x \leqq b'$, während $f(x)$ in den hinzugefügten Intervallen bis auf die Monotonie-Bedingung willkürlich bleibt.

[4]) Vgl. Du Bois-Reymond, Zur Geschichte der trigonometrischen Reihen (Tübingen, [1880]), p. 58.

frappirt nun zunächst die ausserordentlich grosse Willkürlichkeit der beiden mit A, B bezeichneten Zahlen, und es gewinnt wohl zunächst den Anschein, als ob dieselbe auf einer infinitesimalen Eigenschaft des bestimmten Integrals beruhe, nämlich auf dem Umstande, dass die zu integrirende Function für die Stellen einer beliebigen unausgedehnten Punktmenge ganz willkürlich gedacht bezw. abgeändert werden darf, ohne dass der Integralwerth selbst eine Veränderung erleidet. Es erschien mir nun nicht ohne Interesse, festzustellen, dass die Willkürlichkeit in der Auswahl jener Zahlen A, B in Wahrheit ganz elementaren arithmetischen Ursprunges ist, indem nämlich auch für gewöhnliche endliche Summen ein Mittelwerthsatz besteht, der genau die Bauart der Formel (III) besitzt und deren eigentliche Grundlage bildet. Dieser, aus einer einfachen und sehr naheliegenden Umformung der bekannten Abel'schen Transformationsformel (partiellen Summation) hervorgehende Mittelwerthsatz wird in § 1 der folgenden Mittheilung zunächst abgeleitet und des näheren discutirt. In § 2 gebe ich dann einen darauf beruhenden Beweis der Integral-Formel (III), der mir mehr als irgend einer der bisherigen Beweise die äusserst erreichbare Allgemeinheit mit genügender Einfachheit zu verbinden scheint. Zur näheren Begründung dieser Ansicht werden dann noch in § 3 einige historische und kritische Bemerkungen über jene früheren Beweise hinzugefügt.

---

§ 1. Die Abel'sche Transformation und die daraus resultirenden Mittelwerthsätze für endliche Summen.

1. Es seien u_ν, v_ν $(\nu = 1, 2, \dots n)$ beliebig vorgelegte Zahlen und

(1) $$S_n = \sum_1^n {}^\nu\, u_\nu\, v_\nu\,.$$

Setzt man sodann:

(2) $$v_1 + v_2 + \dots + v_\nu = V_\nu \quad (\nu = 1, 2, \dots n),$$

so ergiebt sich mit Hülfe der Substitution von

$$v_1 = V_1, \quad v_\nu = V_\nu - V_{\nu-1} \quad (\nu = 2, \dots n)$$

in Gl. (1) die bekannte Abel'sche Transformations-Gleichung:

$$(3) \qquad S_n = \sum_1^{n-1}{}^{\nu} (u_\nu - u_{\nu+1}) \cdot V_\nu + u_n V_n.$$

Um derselben eine etwas allgemeinere, für die weiteren Schlüsse zweckmässige Gestalt zu geben, bezeichne ich mit u_0, u_{n+1} zwei vollkommen willkürlich anzunehmende Zahlen, mit V_0 die Null. Alsdann besteht die Identität:

$$(4) \qquad 0 = (u_0 - u_1) \cdot V_0 - u_{n+1} V_n + u_{n+1} V_n$$

und es ergiebt sich, wenn man dieselbe zu Gleichung (3) addirt:

$$(\mathrm{A}) \qquad S_n = \sum_0^{n}{}^{\nu} (u_\nu - u_{\nu+1}) \cdot V_\nu + u_{n+1} V_n.$$

2. Es seien jetzt die Zahlen $u_1, u_2, \dots u_n$ reell und so gegeben, dass sie eine monotone (gleichgültig ob niemals zu- oder niemals abnehmende) Folge bilden; und es mögen sodann u_0, u_{n+1} im übrigen zwar willkürlich, jedoch so angenommen werden, dass sie sich dieser monotonen Folge anschliessen (welcher Bedingung u. a. stets genügt wird, wenn man speciell $u_0 = u_1$, $u_{n+1} = u_n$ setzt). Ferner werde allgemein durch die Symbole:

$$\operatorname*{Max}_{\nu=m}^{\nu=m+p} (a_\nu) \qquad \operatorname*{Min}_{\nu=m}^{\nu=m+p} (a_\nu) \qquad \operatorname*{\mathfrak{M}}_{\nu=m}^{\nu=m+p} (a_\nu)$$

das Maximum, das Minimum, ein Mittelwerth

aus irgendwelchen Zahlen $a_m, a_{m+1}, \dots a_{m+p}$ bezeichnet.

Alsdann ergeben sich im Falle $u_\nu - u_{\nu+1} \geqq 0$ aus Gl. (A) die Ungleichungen:

$$(\mathrm{B}) \qquad S_n \begin{Bmatrix} > (u_0 - u_{n+1}) \cdot \operatorname*{Min}_{\nu=0}^{\nu=n} (V_\nu) \\ < (u_0 - u_{n+1}) \cdot \operatorname*{Max}_{\nu=0}^{\nu=n} (V_\nu) \end{Bmatrix} + u_{n+1} V_n$$

und entsprechend im Falle $u_\nu - u_{\nu+1} \leqq 0$ die durch Vertauschung der Zeichen $\gtrless$ hieraus hervorgehenden. Man erhält daher in jedem dieser beiden Fälle, d. h. wenn die u_ν eine monotone Folge bilden, den folgenden Mittelwerthsatz:

$$\text{(C)} \qquad S_n = (u_0 - u_{n+1}) \cdot \mathfrak{M}_{\nu=0}^{\nu=n}(V_\nu) + u_{n+1} V_n$$
$$= u_0 \cdot \mathfrak{M}_{\nu=0}^{\nu=n}(V_\nu) + u_{n+1}\left(V_n - \mathfrak{M}_{\nu=0}^{\nu=n}(V_n)\right).$$

Da $\mathfrak{M}_{\nu=0}^{\nu=n}(V_\nu)$ einen mittleren Werth aus den Zahlen $V_0, V_1, \ldots V_n$ bedeutet, so muss es entweder mindestens ein bestimmtes $m < n$ geben,[1] sodass:

$$\text{(5)} \qquad \mathfrak{M}_{\nu=0}^{\nu=n}(V_\nu) = V_m;$$

oder es tritt in der Reihe $V_0, V_1, \ldots V_n$ mindestens bei einem bestimmten Index m (wo: $0 \leqq m < n$) der Fall ein:

$$\text{(6)} \qquad V_m < \mathfrak{M}_{\nu=0}^{\nu=n}(V_\nu) < V_{m+1}.$$

Man kann also beide Fälle dahin zusammenfassen, dass:

$$\text{(7)} \qquad \mathfrak{M}_{\nu=0}^{\nu=n}(V_\nu) = V_m + \vartheta(V_{m+1} - V_m), \quad \text{wo: } 0 \leqq \vartheta < 1,$$

d. h. mit Rücksicht auf die Beziehung: $V_{m+1} - V_m = v_{m+1}$:

$$\text{(8)} \qquad \mathfrak{M}_{\nu=0}^{\nu=n}(V_\nu) = \begin{cases} V_m + \vartheta\, v_{m+1} \\ V_{m+1} - (1-\vartheta)\cdot v_{m+1}. \end{cases}$$

Durch Einführung der Ausdrücke (6) in den Mittelwerthsatz (C) nimmt dann derselbe noch die folgende Form an:

---

[1]) Wäre $m = n$ d. h. n der erste Index, für welchen:

$$\mathfrak{M}_{\nu=0}^{\nu=n}(V_\nu) = V_n,$$

so müssen $V_0, V_1, \ldots V_{n-1}$ theils unterhalb, theils oberhalb $\mathfrak{M}_{\nu=0}^{\nu=n}(V_\nu)$ liegen, sodass also für ein $m < n-1$ eine Ungleichung von der Form (6) besteht.

$$\text{(D)}\quad S_n = u_0(V_m + \vartheta\cdot v_{m+1}) + u_{n+1}((1-\vartheta)\cdot v_{m+1} + (V_n - V_{m+1}))$$
$$= u_0\left(\sum_1^m{}' v_\nu + \vartheta\cdot v_{m+1}\right) + u_{n+1}\left((1-\vartheta)\, v_{m+1} + \sum_{m+2}^n{}' v_\nu\right),$$

wo also m eine bestimmte (möglicherweise auf mehrfache Art wählbare) Zahl aus der Reihe $0, 1, \ldots (n-1)$ bedeutet und $0 \leqq \vartheta < 1$. Dabei ist noch anzumerken, dass für die beiden äussersten Fälle $m = 0$ bezw. $m = n - 1$ die Beziehungen bestehen: $V_m \equiv V_0 = 0$ bezw. $V_n - V_{m+1} \equiv V_n - V_n = 0$, sodass man also den in diesen Fällen bei der zweiten Schreibweise auftretenden Symbolen: $\sum_1^0{}' v_\nu$ bezw. $\sum_{n+1}^n v_\nu$ die Bedeutung von 0 beizulegen hat.

3. Sind die u_ν nicht nur monoton, sondern auch gleichbezeichnet, in welchem Falle also auch die numerischen Werthe der u_ν eine monotone Folge bilden, so kann man, falls die letzteren niemals zunehmen, also: $|u_\nu| \geqq |u_{\nu+1}|$, über u_{n+1} so verfügen, dass man $u_{n+1} = 0$ setzt; während man $u_0 = 0$ annehmen kann, wenn die $|u_\nu|$ niemals abnehmen, also: $|u_\nu| \leqq |u_{\nu+1}|$. Der Mittelwerthsatz (C) liefert also in diesen beiden Fällen die folgenden Beziehungen:

$$\text{(E)}\quad \begin{cases} (1)\ S_n = u_0 \cdot \underset{\nu=0}{\overset{\nu=n}{\mathfrak{M}}}(V_\nu) & (|u_\nu| \geqq |u_{\nu+1}|), \\ (2)\ S_n = u_{n+1}\cdot (V_n - \underset{\nu=0}{\overset{\nu=n}{\mathfrak{M}}}(V_\nu)) & (|u_\nu| \leqq |u_{\nu+1}|), \end{cases}$$

die sich mit Hülfe von (D) auch in die folgende Form setzen lassen:

$$\text{(F)}\quad \begin{cases} (1)\ S_n = u_0\left(\sum_1^m{}' v_\nu + \vartheta\cdot v_{m+1}\right) & (|u_\nu| \geqq |u_{\nu+1}|), \\ (2)\ S_n = u_{n+1}\left((1-\vartheta)\, v_{m+1} + \sum_{m+2}^n{}' v_\nu\right) & (|u_\nu| < |u_{\nu+1}|). \end{cases}$$

Hierzu bemerke ich, dass man Gl. (E, 1), nicht aber Gl. (E, 2) auch unmittelbar, d. h. ohne den Weg über Gl. (C) zu nehmen, aus der Fundamental-Formel (A) herleiten kann: man hat dabei nur zu beachten, dass bei gleichbezeichneten u_ν und

$|u_\nu| \geqq |u_{\nu+1}|$ die Differenzen $u_\nu - u_{\nu+1}$ mit den u_ν, also speciell auch mit u_{n+1} gleiches Vorzeichen haben.

Andererseits ist aber hervorzuheben, dass Gl. (E, 1), trotzdem sie durch Einführung einer specielleren Voraussetzung über die u_ν und durch Specialisirung der willkürlichen Grösse u_{n+1} aus Gl. (C) hervorging, doch genau dieselbe Tragweite besitzt, wie die formal allgemeinere Gleichung (C), d. h. dass man auch umgekehrt Gl. (C) ohne weiteres aus Gl. (E, 1) herleiten kann. Denn angenommen, es stehe von den u_ν nur soviel fest, dass $u_\nu \geqq u_{\nu+1}$ $(\nu = 0, 1, \ldots (n-1))$, so wähle man $u_{n+1} \leqq u_n$, im übrigen beliebig. Alsdann bestehen die Beziehungen:

$$(9) \qquad u_\nu - u_{n+1} \geqq u_{\nu+1} - u_{n+1} \geqq 0 \quad (\nu = 0, 1, \ldots (n-1)),$$

sodass also auch:

$$|u_\nu - u_{n+1}| \geqq |u_{\nu+1} - u_{n+1}|.$$

Hat man dagegen: $u_\nu \leqq u_{\nu+1}$ $(\nu = 0, 1, \ldots (n-1))$ und wird sodann $u_{n+1} \geqq u_n$ angenommen, so ergiebt sich:

$$(10) \qquad u_\nu - u_{n+1} \leqq u_{\nu+1} - u_{n+1} \leqq 0,$$

und daher wiederum:

$$|u_\nu - u_{n+1}| \geqq |u_{\nu+1} - u_{n+1}|.$$

Die Terme $(u_\nu - u_{n+1})$ genügen somit, wenn nur die u_ν überhaupt monoton sind, allemal derselben Bedingung, wie die u_ν im Falle der Gleichung (E, 1). Wendet man also diese letztere auf die $(u_\nu - u_{n+1})$ an, so resultirt:

$$(11) \qquad \sum_1^n{}^\nu (u_\nu - u_{n+1}) \cdot v_\nu = (u_0 - u_{n+1}) \cdot \mathfrak{M}_{\nu=0}^{\nu=n}(V_\nu)$$

d. h.

$$\sum_1^n{}^\nu u_\nu v_\nu = u_0 \mathfrak{M}_{\nu=0}^{\nu=n}(V_\nu) + u_{n+1}\left(V_n - \mathfrak{M}_{\nu=0}^{\nu=n}(V_\nu)\right)$$

in Uebereinstimmung mit Gl. (C).

4. Diese Beziehungen erleiden eine merkliche Verschiebung, wenn man statt von der verallgemeinerten Abel-schen Transformations-Formel (A) von deren ursprünglicher

Form (3) ausgeht. An die Stelle des Mittelwerthsatzes (C) tritt dann offenbar der folgende:

$$(\text{C}') \qquad S_n = u_1 \overset{\nu=n-1}{\underset{\nu=1}{\mathfrak{M}}} (V_\nu) + u_n \left(V_n - \overset{\nu=n-1}{\underset{\nu=1}{\mathfrak{M}}} (V_\nu) \right),$$

dem man (durch Anwendung einer der Relation (8) analogen Transformation auf $\overset{\nu=n-1}{\underset{\nu=1}{\mathfrak{M}}} (V_\nu)\Big)$ auch die folgende Form geben kann:

$$(\text{D}') \quad S_n = u_1 \left(\sum_1^m {}' v_\nu + \vartheta \cdot v_{m+1} \right) + u_n \left((1-\vartheta)\, v_{m+1} + \sum_{m+2}^n {}' v_\nu \right),$$

wo jetzt m eine gewisse Zahl aus der Reihe $1, 2, \ldots (n-2)$ bedeutet.[1])

Werden jetzt wiederum die u_ν noch dahin eingeschränkt, dass ausser der Monotonie der u_ν noch die Beziehung $|u_\nu| \geqq |u_{\nu+1}|$ vorausgesetzt wird, so gelangt man von der Gl. (3) zu dem bekannten Abel'schen Lemma:

$$(\text{E}') \qquad S_n = u_1 \cdot \overset{\nu=n}{\underset{\nu=1}{\mathfrak{M}}} (V_\nu),$$

während es andererseits schlechterdings unmöglich erscheint, diese Relation direkt[2]) aus der unter allgemeineren Voraussetzungen bestehenden Formel (C′) zu erschliessen. Dagegen kann man umgekehrt durch Anwendung der Formel (E′) auf

---

[1]) Es ist das, beiläufig bemerkt, diejenige Formel, welche Du Bois-Reymond (Freiburger Antrittsprogramm, p. 2) sonderbarer Weise als Folgerung aus dem entsprechenden Integralsatze herleitet, während sie doch unmittelbar aus der Abel'schen Transformation resultirt und gerade die Grundlage jenes Integralsatzes bildet.

[2]) D. h. ohne die Formel (C′) durch Hinzufügung eines weiteren Summanden u_{n+1}, v_{n+1}, (wo $v_{n+1} = 0$, u_{n+1} nur der Monotonie-Bedingung zu genügen hat) ähnlich wie in Nr. 1 und 2 in die folgende überzuführen:

$$S_n = u_1 \overset{\nu=n}{\underset{\nu=1}{\mathfrak{M}}} (V_\nu) + u_{n+1} \left(V_n - \overset{\nu=n}{\underset{\nu=1}{\mathfrak{M}}} (V_\nu) \right),$$

und sodann analog, wie beim Uebergange von Formel (C) zu (E) zu verfahren.

die Terme $(u_\nu - u_n)$, welche wiederum stets der Bedingung $|u_\nu - u_n| \geqq |u_{\nu+1} - u_n|$ genügen, auch wenn von den u_ν lediglich die Monotonie vorausgesetzt wird, ohne weiteres die mit Gl. (C′) im wesentlichen gleichwerthige Beziehung erhalten:

$$S_n = u_0 \mathop{\mathfrak{M}}_{\nu=1}^{\nu=n}(V_\nu) + u_n\left(V_n - \mathop{\mathfrak{M}}_{\nu=1}^{\nu=n}(V_\nu)\right).$$

Es besitzt also hier die unter specielleren Voraussetzungen bestehende Gleichung (E′) in Wahrheit einen weiteren Wirkungskreis, als die unter allgemeineren Bedingungen geltende Formel (C′), d. h. es besteht zwischen den Formeln (E′) und (C′) genau dasselbe Verhältniss, wie zwischen dem Bonnet'schen und dem Du Bois-Reymond'schen Satze (I) und (II).

---

§ 2. Der zweite Mittelwerthsatz für bestimmte Integrale.

1. Lehrsatz. Ist im Intervalle $x_0 \leqq x \leqq X$ die Function $f(x)$ *endlich* und *monoton*, $\varphi(x)$ und $f(x)\cdot\varphi(x)$ *integrabel*,[1]) so hat man:

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\cdot\varphi(x)\cdot dx = y_0\cdot\int_{x_0}^{\xi}\varphi(x)\cdot dx + Y\int_{\xi}^{X}\varphi(x)\cdot dx,$$

wo ξ einen gewissen, der Bedingung $x_0 < \xi \leqq X$ genügenden Werth besitzt, während y_0, Y zwei der *monotonen* Folge der $f(x)$-Werthe bei $x = x_0$ und $x = X$ sich anschliessende, im übrigen willkürliche Zahlen bedeuten, sodass also entweder:

$$y_0 \geqq f(x_0+0) > f(X-0) \geqq Y,$$

oder:

$$y_0 \leqq f(x_0+0) < f(X-0) \leqq Y.$$

---

[1]) Ich nenne $\varphi(x)$ im Intervalle $x_0 < x \leqq X$ integrabel, wenn nicht nur $\int_{x_0}^{X}\varphi(x)\,dx$, sondern auch $\int_{x_0}^{\xi}\varphi(x)\,dx$ für $x_0 < \xi \leqq X$ existirt.

Bezüglich der in die Voraussetzung aufgenommenen Integrabilitäts-Eigenschaften von $\varphi(x)$ und $f(x) \cdot \varphi(x)$ bemerke ich folgendes. Die Function $f(x)$ ist auf Grund der vorausgesetzten Endlichkeit und Monotonie allemal integrabel, auch wenn sie im übrigen beliebig viele Unstetigkeiten besitzt.[1]) Ist dann $\varphi(x)$ endlich und integrabel oder besitzt $\varphi(x)$ nur solche Unendlichkeitsstellen,[2]) dass nicht nur $\varphi(x)$, sondern auch $|\varphi(x)|$ integrabel ausfällt, so ist jedesmal $f(x) \cdot \varphi(x)$ eo ipso integrabel.[3]) Dies gilt sogar auch dann noch, wenn die als integrabel vorausgesetzte Function $\varphi(x)$ eine endliche Anzahl von Unendlichkeitsstellen besitzt, in deren Umgebung die absolute Integrabilität nicht vorhanden ist.[4]) Nur wenn Punkte der letztgenannten Art in unbegrenzter Anzahl auftreten, muss ausser der Integrabilität von $\varphi(x)$ noch diejenige von $f(x) \cdot \varphi(x)$ ausdrücklich in die Voraussetzung aufgenommen werden. Schliesslich sei noch hervorgehoben, dass die Aussage, eine Function $\varphi(x)$, die in irgend einem Intervalle unendlich viele Unendlichkeits-Stellen besitzt, sei daselbst integrabel, allemal die Voraussetzung involvirt, dass jene Stellen eine unausgedehnte Menge bilden: hiermit ist nämlich, meines Wissens, die äusserste Grenze bezeichnet, bis zu welcher der Integral-Begriff überhaupt noch definirbar erscheint.[5])

---

1) S. z. B. Dini-Lüroth, p. 338, § 187, 6.

2) Also z. B., wie $\frac{1}{x^{1-\varepsilon}}$, $\frac{1}{x^{1-\varepsilon}} \cdot \sin\frac{1}{x}$ bei $x = 0$.

3) Dini-Lüroth, p. 346, § 190, 5; — p. 419, § 226.

4) Ebendas. p. 422, § 227.

5) Herr Dini (a. a. O. p. 406, § 217) beschränkt die Definition auf den Fall, dass die Unendlichkeitsstellen eine Menge erster Gattung bilden (welche dann eo ipso auch unausgedehnt ist — s. z. B. Dini-Lüroth, p. 25, § 14) und beweist auch die Gültigkeit des Mittelwerthsatzes für diesen Fall: Serie di Fourier etc. (Pisa, 1880), p. 22. — Harnack (Math. Ann. Bd. 21 [1883], p. 325; ausführlicher Bd. 24 (1884), p. 220) definirt das Integral für den Fall, dass die Unendlichkeitsstellen eine beliebige unausgedehnte (von ihm als „discret" bezeichnete) Menge ausmachen und beweist (an der zuerst citirten Stelle) ebenfalls

2. Beweis des Lehrsatzes. Man theile das Intervall (x_0, X) durch Einschaltung der Punkte $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$ in n Theil-Intervalle, sodass also:

$$(1)\quad J = \int_{x_0}^{X} f(x)\cdot\varphi(x)\cdot dx = \sum_1^n{}^{\nu} \int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} f(x)\cdot\varphi(x)\cdot dx \quad (\text{wo: } x_n = X)$$

gesestzt werden kann. Auf jedes dieser Theil-Integrale wende man die identische Umformung an:

$$(2)\quad \int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} f(x)\cdot\varphi(x)\cdot dx = f_\nu(x)\cdot\int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} f(x)\cdot\varphi(x)\cdot dx + \int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} \{f(x) - f(x_\nu)\}\cdot\varphi(x)\cdot dx,$$

und zwar mag hier, falls etwa $f(x)$ an der Stelle x_ν unstetig sein sollte, unter $f_\nu(x)$ der (allemal eindeutig bestimmte) Werth $f(x_\nu - 0)$ verstanden werden: die Zahlen $f(x_\nu)$ bilden dann für $\nu = 1, 2, \ldots n$, wegen der Monotonie von $f(x)$, stets eine monotone Folge.

Durch Einführung der Umformung (2) in die rechte Seite von Gl. (1) ergiebt sich:

$$(3)\quad J = J_n + R_n$$

wo:

---

den Mittelwerthsatz in dem entsprechenden Umfange. Doch reichen die Erörterungen Harnack's nicht aus, um die Existenz des Integrals in dem Sinne zu gewährleisten, dass gleichzeitig mit $\int_{x_0}^{X} \varphi(x)\cdot dx$ auch das Integral über jedes Theil-Intervall existirt (vgl. Stolz, Wiener Sitz.-Ber. Bd. 107[2] [1898], p. 3; Grundzüge der Diff.- und Integr.-Rechnung, Bd. III, p. 277). Dies ist, wenn die Unendlichkeits-Stellen eine Menge zweiter Gattung bilden, dann und nur dann der Fall, wenn ausser $\varphi(x)$ auch $|\varphi(x)|$ im Harnack'schen Sinne integrabel ist (vgl. Stolz, a. a. O. und Wiener Sitz.-Ber. Bd. 28[2] [1899], p. 1235). Für nicht absolut integrable $\varphi(x)$ muss es daher wohl bei der Dini'schen Voraussetzung sein Bewenden haben, dass die Unendlichkeitsstellen höchstens eine Menge erster Gattung bilden (so auch bei De La Vallée-Poussin, Journ. de Math. (4), T. 8 [1892], p. 453).

$$(4) \qquad J_n = \sum_1^n {}^\nu f(x_\nu) \cdot \int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} \varphi(x) \cdot dx$$

$$(5) \qquad R_n = \sum_1^n {}^\nu \int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} \{f(x) - f(x_\nu)\} \cdot \varphi(x) \cdot dx.$$

Der ganze Beweis des fraglichen Satzes besteht nun in der Anwendung der Abel'schen Transformation bezw. der daraus resultirenden Mittelwerth-Relation auf J_n und sodann in dem Nachweise, dass R_n bei hinlänglicher Vergrösserung von n beliebig klein wird.

Setzt man, mit Bezugnahme auf die in § 1 benützten Bezeichnungen, für $\nu = 1, 2, \ldots n$:

$$u_\nu = f_\nu(x), \quad v_\nu = \int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} \varphi(x) \cdot dx, \quad \text{also:} \quad V_\nu = \sum_1^\nu {}^\nu \int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} \varphi(x) \cdot dx = \int_{x_0}^{x_\nu} \varphi(x) \cdot dx$$

und ausserdem: $u_0 = y_0$, $u_{n+1} = Y$, so nehmen die Ungleichungen (B), welche noch die Voraussetzung $f(x_\nu) > f(x_{\nu+1})$, also $f(x_0) > f(X)$ erheischen, die folgende Form an:

$$(6) \qquad J_n \begin{cases} > (y_0 - Y) \cdot \underset{\nu=0}{\overset{\nu=n}{\mathrm{Min}}} \int_{x_0}^{x_\nu} \varphi(x) \cdot dx \\ < (y_0 - Y) \cdot \underset{\nu=0}{\overset{\nu=n}{\mathrm{Max}}} \int_{x_0}^{x_\nu} \varphi(x) \cdot dx \end{cases} + Y \cdot \int_{x_0}^{X} \varphi(x) \cdot dx.$$

Dabei hätte man $Y \leq f(x_n - 0) = f(X - 0)$ und zunächst nur $y_0 \geq f(x_1 - 0)$ anzunehmen: dieser letzteren Bedingung wird aber (unabhängig von der Wahl des x_1) a fortiori genügt, wenn man $y_0 \geq f(x_0 + 0)$ festsetzt.

Zieht man jetzt statt der n Integrale $\int_{x_0}^{x_\nu} \varphi(x) \cdot dx \, (\nu = 1, 2, \ldots n)$ alle möglichen Werthe des Integrals $\int_{x_0}^{x'} \varphi(x) \cdot dx$ für $x_0 \leq x' \leq X$ in Betracht, so bestehen offenbar die Beziehungen:

$$(7)\quad \underset{x'=x_0}{\overset{x'=X}{\mathrm{Min}}} \int_{x_0}^{x'} \varphi(x)\cdot dx \leqq \underset{\nu=0}{\overset{\nu=n}{\mathrm{Min}}} \int_{x_0}^{x_\nu} \varphi(x)\cdot dx, \quad \underset{x'=x_0}{\overset{x'=X}{\mathrm{Max}}} \int_{x_0}^{x'} \varphi(x)\cdot dx \geqq \underset{\nu=0}{\overset{\nu=n}{\mathrm{Max}}} \int_{x_0}^{x_\nu} \varphi(x)\cdot dx,$$

sodass aus den Ungleichungen (6) a fortiori die folgenden sich ergeben:

$$(8)\qquad J_n \begin{Bmatrix} > (y_0 - Y)\cdot \underset{x'=x_0}{\overset{x'=X}{\mathrm{Min}}} \int_{x_0}^{x'} \varphi(x)\cdot dx \\ < (y_0 - Y)\cdot \underset{x'=x_0}{\overset{x'=X}{\mathrm{Max}}} \int_{x_0}^{x'} \varphi(x)\cdot dx \end{Bmatrix} + Y\cdot \int_{x_0}^{X} \varphi(x)\cdot dx,$$

bei denen jetzt der Einfluss von n auf der rechten Seite vollständig eliminirt erscheint. Angenommen nun, man könne durch passende Vergrösserung von n bei jedem $\varepsilon > 0$ erzielen, dass:

$$(9)\qquad |R_n| < \varepsilon, \text{ also } R_n \begin{cases} > -\varepsilon \\ < +\varepsilon, \end{cases}$$

so ergiebt sich durch Addition der beiden letzten Ungleichungen zu den entsprechenden Ungleichungen (8):

$$(10)\qquad J \begin{Bmatrix} > (y_0 - Y)\cdot \underset{x'=x_0}{\overset{x'=X}{\mathrm{Min}}} \int_{x_0}^{x'} \varphi(x)\cdot dx - \varepsilon \\ < (y_0 - Y)\cdot \underset{x'=x_0}{\overset{x'=X}{\mathrm{Max}}} \int_{x_0}^{x'} \varphi(x)\cdot dx + \varepsilon \end{Bmatrix} + Y\cdot \int_{x_0}^{X} \varphi(x)\cdot dx$$

und somit, da ε die untere Grenze Null besitzen sollte:

$$(11)\qquad J \begin{Bmatrix} \geqq (y_0 - Y)\cdot \underset{x'=x_0}{\overset{x'=X}{\mathrm{Min}}} \int_{x_0}^{x'} \varphi(x)\cdot dx \\ \leqq (y_0 - Y)\cdot \underset{x'=x_0}{\overset{x'=X}{\mathrm{Max}}} \int_{x_0}^{x'} \varphi(x)\cdot dx \end{Bmatrix} + Y\cdot \int_{x_0}^{X} \varphi(x)\cdot dx.$$

Die entsprechenden Beziehungen mit Vertauschung der Zeichen $\gtreqless$ ergeben sich im Falle $f(x_0) > f(X)$. Man hat also, sofern nur $f(x)$ für $x_0 < x < X$ monoton ist,

$$(12)\qquad J = (y_0 - Y)\cdot \underset{x'=x_0}{\overset{x'=X}{\mathfrak{M}}} \left(\int_{x_0}^{x'} \varphi(x)\, dx\right) + Y\cdot \int_{x_0}^{X} \varphi(x)\cdot dx$$

und da man dem betreffenden Mittelwerthe wegen der Stetigkeit von $\int_{x_0}^{x'} \varphi(x) \cdot dx$ die Form: $\int_{x_0}^{\xi} \varphi(x) \cdot dx$, wo: $x_0 \leqq \xi < X$ geben kann, schliesslich, wie behauptet:

$$(13) \qquad J = (y_0 - Y) \cdot \int_{x_0}^{\xi} \varphi(x) \cdot dx + Y \cdot \int_{x_0}^{X} \varphi(x) \cdot dx$$
$$= y_0 \cdot \int_{x_0}^{\xi} \varphi(x) \cdot dx + Y \cdot \int_{\xi}^{X} \varphi(x) \cdot dx.$$

Es handelt sich somit einzig und allein noch um den Nachweis der Beziehung (9). Hierbei werde zunächst vorausgesetzt, dass nicht nur $\varphi(x)$, sondern auch $|\varphi(x)|$ in dem fraglichen Intervalle integrabel sei.[1]) Aus Gl. (5) folgt zunächst:

$$(14) \qquad |R_n| \leqq \sum_1^n {}^{\nu} \int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} |f(x) - f(x_\nu)| \cdot |\varphi(x)| \cdot dx.$$

Da nun, wegen der Monotonie von $f(x)$, für jedes einzelne Integrations-Intervall $x_{\nu-1} \leqq x \leqq x_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots n)$ die Beziehung besteht:

$$(15) \quad |f(x) - f(x_\nu)| \equiv |f(x) - f(x_\nu - 0)| \leqq |f(x_{\nu-1} + 0) - f(x_\nu - 0)|.$$

so ergiebt sich weiter:

$$(16) \quad |R_n| \leqq \sum_1^n {}^{\nu} |f(x_{\nu-1} + 0) - f(x_\nu - 0)| \cdot \int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} |\varphi(x)| \cdot dx.$$

Wird jetzt $\varepsilon' > 0$ beliebig klein vorgeschrieben, so kann man die Theil-Intervalle $(x_{\nu-1}, x_\nu)$ so weit verkleinern,[2]) dass:

---

[1]) Diese Bedingung ist an sich schon erfüllt, wenn die als integrabel vorausgesetzte Function endlich bleibt. Im übrigen beschränkt sie lediglich den Charakter, nicht aber die Anzahl der etwa zulässigen Unendlichkeitsstellen.

[2]) Dies ist ohne weiteres klar, wenn $\varphi(x)$ durchweg endlich bleibt, folgt aber auch für den Fall eines absolut integrablen, unendlichwerdenden $\varphi(x)$ unmittelbar aus der entsprechenden Definition eines Integrales von der Form $\int_a^b |\varphi(x)| \cdot dx$.

(17) $$\int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} |\varphi(x)| \cdot dx < \varepsilon' \quad (\nu = 1, 2, \dots n).$$

Alsdann wird aber:

$$|R_n| < \varepsilon' \cdot \sum_1^n {}_\nu |f(x_{\nu-1}+0) - f(x_\nu - 0)|,$$

und da die Differenzen $f(x_{\nu-1}+0) - f(x_\nu - 0)$ wegen der vorausgesetzten Monotonie von $f(x)$ sämmtlich gleichbezeichnet (eventuell auch Null) sind, also:

$$\sum_1^n {}_\nu |f(x_{\nu-1}+0) - f(x_\nu - 0)| = \left|\sum_1^n {}_\nu \{f(x_{\nu-1}+0) - f(x_\nu - 0)\}\right|$$
$$\leq |f(x_0+0) - f(X-0)|,$$

schliesslich:

(18) $$|R_n| < \varepsilon' \cdot |f(x_0+0) - f(X-0)|,$$

sodass also in der That $|R_n|$ — unter Voraussetzung eines absolut integrablen $\varphi(x)$ — durch passende Vergrösserung von n beliebig klein gemacht werden kann.[1])

Es möge nun zweitens $\varphi(x)$ auch solche Unendlichkeitsstellen a besitzen, dass zwar nicht mehr $|\varphi(x)|$, wohl aber $\varphi(x)$ und $f(x) \cdot \varphi(x)$ durchweg integrabel bleiben. Da die a im äussersten Falle eine unausgedehnte[2]) Menge bilden, so besagt die obige Integrabilitäts-Voraussetzung folgendes: Wird $\varepsilon'' > 0$ beliebig klein vorgeschrieben, so lassen sich die Stellen

---

[1]) Man kann dieses Resultat auch noch in anderer Weise erschliessen. Da $f(x)$ monoton ist und endlich bleibt, so kann es nur eine endliche Anzahl von Stellen x' geben, in deren Umgebung die Schwankung von $f(x)$ eine (beliebig klein vorzuschreibende) positive Zahl ε' erreicht oder übersteigt. Bei hinlänglicher Verkleinerung der Theil-Intervalle wird die Gesammtlänge der Intervalle, welche jene Punkte x' enthalten eine beliebig kleine Zahl δ, und zugleich in allen übrigen Intervallen:

$$|f(x_{\nu-1}+0) - f(x_\nu - 0)| < \varepsilon'.$$

Man findet daher aus Ungl. (16):

$$|R_n| < \varepsilon' \cdot \int_{x_0}^{X} |\varphi(x)| \cdot dx + \delta \cdot |f(x_0+0) - f(X-0)|.$$

[2]) Vgl. übrigens p. 220, Fussnote.

a in eine endliche Anzahl von Intervallen: $\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_p$, wo etwa:

(19) $$\delta_\varkappa = x_{m_\varkappa} - x_{m_\varkappa - 1} \quad (\varkappa = 1, 2, \ldots p),$$

einschliessen, so dass:

(20) $$(a) \quad \left|\sum_1^\lambda{}^\varkappa \int_{x_{m_\varkappa - 1}}^{x_{m_\varkappa}} \varphi(x) \cdot dx\right| < \varepsilon'', \quad (b) \quad \left|\sum_1^\lambda{}^\varkappa \int_{x_{m_\varkappa - 1}}^{x_{m_\varkappa}} f(x) \cdot \varphi(x) \cdot dx\right| < \varepsilon''$$
$$(\lambda = 1, 2, \ldots p).$$

Bezeichnet man sodann mit $\varphi_1(x)$ eine Function, die ausserhalb der Intervalle $\delta_\varkappa$ mit $\varphi(x)$ übereinstimmt, dagegen für $x_{m_\varkappa - 1} \leq x \leq x_{m_\varkappa}$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots p)$ verschwindet, so lässt sich R_n in die Form setzen:

(21) $$R_n = \sum_1^n{}^\nu \int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} \{f(x) - f(x_\nu)\} \cdot \varphi_1(x) \cdot dx + \sum_1^p{}^\varkappa \int_{x_{m_\varkappa - 1}}^{x_{m_\varkappa}} \{f(x) - f(x_{m_\varkappa})\} \cdot \varphi(x) dx.$$
$$= R_n' + S_p.$$

Da $\varphi_1(x)$ endlich bleibt, so gilt für R_n' das zuvor in Bezug auf R_n gefundene Ergebniss Ungl. (18), d. h. man erhält bei passender Vergrösserung von n:

(22) $$|R_n'| < \varepsilon' \cdot |f(x_0 + 0) - f(X - 0)|.$$

Ferner hat man:

(23) $$S_p = \sum_1^p{}^\varkappa \int_{x_{m_\varkappa - 1}}^{x_{m_\varkappa}} f(x) \cdot \varphi(x) \cdot dx + \sum_1^p{}^\varkappa f(x_{m_\varkappa}) \cdot \int_{x_{m_\varkappa - 1}}^{x_{m_\varkappa}} \varphi(x) \cdot dx.$$

Die erste dieser Summen liegt nach Ungl. (20^b) numerisch unter ε''. Auf die zweite kann man, wegen der Monotonie von $f(x_{m_\varkappa})$ für $\varkappa = 1, 2, \ldots p$, den Mittelwerthsatz (C) des vorigen Paragraphen (p. 214) anwenden. Beachtet man, dass jede der in Betracht kommenden Summen und folglich auch jeder aus ihnen gezogene Mittelwerth nach Ungl. (20^a) numerisch unter ε'' liegt, so ergiebt sich:

(24) $$\left|\sum_1^p{}^\varkappa f(x_{m_\varkappa}) \cdot \int_{x_{m_\varkappa - 1}}^{x_{m_\varkappa}} \varphi(x) \cdot dx\right| < |f(x_0 + 0) - f(X - 0)| \cdot \varepsilon'' + |f(X - 0)| \cdot \varepsilon'',$$

und daher schliesslich:

$$(25)\quad |R_n| < (\varepsilon' + \varepsilon'') \cdot |f(x_0 + 0) - f(X - 0)| + \varepsilon''(1 + |f(X - 0)|).$$

Damit ist aber der ausgesprochene Satz jetzt vollständig bewiesen.

3. Setzt man speciell: $y_0 = f(x_0 + 0)$, $Y = f(X - 0)$, so erhält man die zumeist übliche Form des fraglichen Satzes:

$$(26)\quad \int_{x_0}^{X} f(x) \cdot \varphi(x) \cdot dx = f(x_0 + 0) \cdot \int_{x_0}^{\xi} \varphi(x) \cdot dx + f(X - 0) \cdot \int_{\xi}^{X} \varphi(x) \cdot dx.$$

Und wenn sodann die $f(x)$-Werthe nicht nur monoton, sondern auch gleichbezeichnet sind, sodass man setzen kann: $Y = 0$, falls $|f(x_0 + 0)| > |f(X - 0)|$, dagegen $y_0 = 0$, falls $|f(x_0 + 0)| < |f(X - 0)|$, so folgt:

$$(27)\quad \int_{x_0}^{X} f(x) \cdot \varphi(x) \cdot dx = f(x_0 + 0) \cdot \int_{x_0}^{\xi} \varphi(x) \cdot dx \quad (|f(x_0 + 0)| > |f(X - 0)|).$$

$$(28)\quad \int_{x_0}^{X} f(x) \cdot \varphi(x) \cdot dx = f(X - 0) \cdot \int_{\xi}^{X} \varphi(x) \cdot dx \quad (|f(x_0 + 0)| < |f(X - 0)|).$$

Will man lediglich — etwa im Rahmen einer Elementar-Vorlesung — die für die Anwendungen wichtigsten Formeln (26) (27) beweisen, so wird man am einfachsten im Anschlusse an das gewöhnliche Abel'sche Lemma[1]) und unter Einhaltung des (natürlich sich entsprechend vereinfachenden) Beweisverfahrens von Nr. 2 zunächst Gl. (27) und hieraus nach der in

[1]) In der bekannten, aus Gl. (3) des vorigen Paragraphen unmittelbar hervorgehenden Form:

$$u_1 \cdot \underset{\nu=1}{\overset{\nu=n}{\mathrm{Min}}} (V_\nu) < S_n < u_1 \cdot \underset{\nu=1}{\overset{\nu=n}{\mathrm{Max}}} (V_\nu).$$

Kehrt man die Reihenfolge der Glieder um, so ergiebt sich entsprechend:

$$u_n \underset{\nu=1}{\overset{\nu=n}{\mathrm{Min}}} (V_{\nu,n}) < S_n < u_n \underset{\nu=1}{\overset{\nu=n}{\mathrm{Max}}} (V_{\nu,n})$$

$$(\text{wo: } V_{\nu,n} = v_\nu + v_{\nu+1} + \ldots + v_n),$$

eine Beziehung, aus der dann analog Gl. (28) resultiren würde.

der Einleitung angedeuteten Methode Gl. (26) ableiten.[1] Man gewinnt dabei gegenüber den sonst üblichen Beweisen immer noch den Vortheil, dass das Auftreten von Unendlichkeits-Stellen, welche die absolute Integrabilität von $\varphi(x)$ bestehen lassen, sowie dasjenige unendlich vieler Zeichenwechsel bei $\varphi(x)$ den Haupttheil des Beweises in keiner Weise complicirt.

---

§ 3. Ueber die bisherigen Beweise des zweiten Mittelwerthsatzes der Integralrechnung.

1. Bonnet bezeichnet seinen Integralsatz (Fussn. 1, p. 209) als eine unmittelbare Folge des Abel'schen Lemma's, ohne in eine genauere Discussion der erforderlichen Grenzübergänge einzutreten. Das entsprechende gilt von dem sogenannten Hankel'schen Beweise des Satzes in der gewöhnlichen Du Bois-Reymond'schen Form (p. 209, Gl. II).[2] Hankel beweist in Wahrheit nur nochmals die Abel'sche Transformation für $\sum_{n}^{0}{}^{\nu} u_\nu v_\nu$ und leitet daraus diejenige Summen-Relation ab, welche der Mittelwerth-Formel (C') des § 1 bei Umkehrung der Gliederfolge entspricht. Im übrigen begnügt er sich mit dem Hinweise, dass daraus durch einen passenden Grenzübergang die fragliche Integralformel hervorgehe.

Immerhin lehren diese Beweis-Andeutungen so viel, dass der eigentliche Kern des fraglichen Satzes in der Abel'schen Transformation liegt, und zwar gleichgültig, ob man auf den Beweis der Bonnet'schen (I), der gewöhnlichen (II) oder der verallgemeinerten (III) Du Bois-Reymond'schen Form ausgeht: gelingt es nur, die Abel'sche Transformation in an-

---

[1] Die directe Ableitung von Gl. (26) scheint mir aus dem Grunde unvortheilhaft, weil man alsdann die zur Abschätzung von Integralen mit der oberen Grenze ∞ besonders nützliche Formel (27) überhaupt nicht erhält. (So z. B. bei Thomae, a. a. O. p. 18; Stolz, Grundzüge der Diff.- und Int.-R., Bd. I, p. 420).

[2] Zeitschr. f. Math. Bd. 14 (1869), p. 436.

gemessener Weise auf das Integral $\int_{x_0}^{X} f(x)\cdot\varphi(x)\cdot dx$ anzuwenden, so hängt die besondere Form des Endresultates lediglich davon ab, ob man (je nachdem $f(x)$ als monoton und gleichbezeichnet oder nur als monoton vorausgesetzt wird) für den Endschluss das gewöhnliche Abel'sche Lemma (E'), die Mittelwerth-Relation (C') oder deren verallgemeinerte Form (C) des § 1 (bezw. die diesen Gleichungen zu Grunde liegenden Ungleichungen) benützt. Was nun aber die Möglichkeit betrifft, jenes Integral mit Hülfe der Abel'schen Transformation umzugestalten, so ergeben sich hier zwei verschiedene Wege.

2. Am nächsten liegt es offenbar, die Umgestaltung des Integrals in eine Summe von der Form $\sum_{1}^{n}{}^{\nu}\, u_\nu\, v_\nu$ dadurch zu ermöglichen, dass man auf dessen Definition als Grenzwerth einer solchen Summe zurückgeht:

$$(1)\qquad J=\int_{x_0}^{X} f(x)\cdot\varphi(x)\cdot dx=\lim_{n=\infty}\sum_{1}^{n}{}^{\nu} f(x_\nu)\cdot(\varphi(x_\nu)\cdot\delta_\nu).$$

Der erste Beweis dieser Art — und zwar für die Satzform (II) — ist wohl derjenige des Herrn Thomae (1875),[1] etwas übersichtlicher (Satzform (I)) der des Herrn Dini (1878).[2] Unvollständig scheint mir ein ebenfalls hierher gehöriger Beweis von Kronecker (1885),[3] der auch in die von Herrn Netto herausgegebenen Vorlesungen über die Theorie der Integrale übergegangen ist,[4] während andererseits der von Kron-

[1]) A. a. O. p. 18.

[2]) Dini-Lüroth, p. 387, § 204.

[3]) Mathesis, T. 5, p. 100. Es fehlt die Erörterung der Beziehung zwischen den dort mit m, M und m_0, M_0 bezeichneten Zahlen.

[4]) A. a. O. p. 59. Die in der vorigen Fussnote mit m, M und m_0, M_0 bezeichneten Zahlenpaare sind hier beide mit M_0, M bezeichnet. Dabei bedeuten M_0, M einmal eine untere und obere Schranke für

$$\sum_{1}^{\varkappa}{}^{\nu} \varphi(x_\nu)\cdot\delta_\nu \quad (\varkappa=1,2,\ldots n),$$

ecker bei dieser Gelegenheit ausgesprochene Zweifel, ob das Integral allemal eine stetige Function seiner oberen Grenze sei, schwerlich von vielen Mathematikern getheilt werden dürfte. Die bei dem Kronecker'schen Beweise nach meinem Dafürhalten bestehende Lücke ist wohl am zweckmässigsten in dem von Herrn Hölder[1]) gegebenen Beweise ausgefüllt, weniger scharf bei C. Jordan.[2])

Im übrigen scheint mir diese ganze Beweis-Methode bei vollkommen strenger Durchführung eine gewisse Schwerfälligkeit und Unübersichtlichkeit mit sich zu bringen, die gerade aus dem Zurückgreifen auf die Summen-Definition entspringt. Auch bezieht sie sich ausschliesslich auf den Fall eines endlich bleibenden $\varphi(x)$: das Auftreten eines einzigen Unendlichkeitspunktes einfachster Art erfordert wieder eine besondere Betrachtung.

3. Aus diesen Gründen halte ich die zweite Methode, die sich zur Ausführung der fraglichen Transformation des Integrals darbietet, für vortheilhafter. Sie besteht darin, das Integral in eine Summe von Theil-Integralen:

$$\sum_1^n{}^{\nu} \int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} f(x) \cdot \varphi(x) \cdot dx$$

zu zerlegen, diese letzteren auf die Form zu bringen:

$$u_\nu \cdot \int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} \varphi(x)\, dx,$$

oder zum mindesten auf die folgende:

$$u_\nu \int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} \varphi(x) \cdot dx + r_\nu \text{ (wo: } \sum_1^n{}^{\nu}\, r_\nu \text{ mit } \frac{1}{n} \text{ gegen Null convergirt),}$$

---

das andere Mal Minimum und Maximum von

$$\int_{x_0}^{x'} \varphi(x) \cdot dx \text{ für } x_0 < x' \leqq X.$$

1) Gött. Anzeigen, 1894, p. 520.
2) Cours d'Analyse, T. II, p. 222.

und sodann auf $\sum_1^n{}^\nu u_\nu \cdot \int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} \varphi(x) \cdot dx$ wiederum die Abel'sche Transformation anzuwenden.

Diese Methode liegt in Wahrheit dem sehr unübersichtlichen[1]) Beweise von Du Bois-Reymond[2]) zu Grunde: nur erscheint sie, da die betreffende Umformung nicht mit Hülfe einer allgemeinen Formel, sondern schrittweise vollzogen wird, und in Folge einer ganz besonders unglücklich gewählten Bezeichnungsweise bis zur Unkenntlichkeit verdunkelt.

In ihrer einfachsten Gestalt findet man sie bei dem Beweise des Herrn G. F. Meyer. Auf Grund der dort eingeführten beschränkenden Voraussetzung, dass $\varphi(x)$ nur an einer endlichen Anzahl von Stellen $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$ das Vorzeichen wechseln solle, ergiebt sich durch Anwendung des ersten Mittelwerthsatzes auf $\int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} f(x) \cdot \varphi(x) \cdot dx$ $(\nu = 1, 2, \ldots n;\ x_n = X)$:

$$J = \sum_1^n{}^\nu u_\nu \cdot \int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} \varphi(x) \cdot dx, \tag{2}$$

wo u_ν einen (unbekannten) Mittelwerth von $f(x)$ für $x_{\nu-1} \leqq x \leqq x_\nu$ bezeichnet. Da die u_ν $(\nu = 1, 2, \ldots n)$ gleichzeitig mit $f(x)$ monoton sind, so folgt dann alles weitere unmittelbar durch Anwendung der Abel'schen Transformation.

Der Beweis des Herrn Neumann[3]) beruht auf einer Zerlegung von folgender Form:

$$\begin{aligned} J &= \sum_1^n{}^\nu u_\nu \cdot \int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} \varphi(x) \cdot dx + \sum_1^n{}^\nu \int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} (f(x) - u_\nu) \cdot \varphi(x) \cdot dx \\ &= J_n + R_n, \end{aligned} \tag{3}$$

---

1) „Mühsam, aber lehrreich" sagt Kronecker: Vorl. über Integr. p. 60.

2) S. p. 209, Fussn. 2.

3) Math. Ann. Bd. 6 (1873), p. 315.

wo u_ν das arithmetische Mittel von $f(x)$ für $x_{\nu-1} \leq x \leq x_\nu$ bedeutet. Auf J_n wird dann wieder die Abel'sche Transformation angewendet, andererseits aber, um aus der Beziehung:

$$(4) \qquad | R_n | \leq \sum_{1}^{n} {}^{\nu} \int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} | f(x) - u_\nu | \cdot | \varphi(x) | \cdot dx$$

das Verschwinden von $\lim_{n=\infty} R_n$ zu erschliessen, die beschränkende Voraussetzung der abtheilungsweisen Stetigkeit von $f(x)$ eingeführt. In Folge dieser letzteren Bedingung ergiebt sich offenbar bei passender Wahl der x_ν und hinlänglicher Verkleinerung von $x_\nu - x_{\nu-1}$:

$$(5) \qquad | R_n | < \varepsilon \cdot \sum_{1}^{n} {}^{\nu} \int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} | \varphi(x) | \cdot dx = \varepsilon \cdot \int_{x_0}^{X} | \varphi(x) | \cdot dx.$$

Die beim Meyer'schen Beweise angeführte Beschränkung bezüglich der Zeichenwechsel von $\varphi(x)$ kann durch ein von Du Bois-Reymond[1]) angegebenes Verfahren nachträglich wieder beseitigt werden. Auch der Neumann'sche Beweis lässt sich dahin ergänzen, dass die in Bezug auf $f(x)$ eingeführte Stetigkeits-Bedingung unnöthig erscheint.[2])

Da der im vorigen Paragraphen von mir angegebene Beweis, der ja ebenfalls dem hier charakterisirten Typus angehört,[3]) ohne irgendwelche nachträgliche Correctur zu erfordern, den fraglichen Satz sofort in der allgemeinsten Form und unter den denkbar allgemeinsten Voraussetzungen liefert, so dürfte er vielleicht immerhin einige Beachtung verdienen.

---

[1]) Journ. f. Math. Bd. 79 (1875), p. 42, Fussnote. Weniger allgemein bei Stolz, Grundzüge I, p. 422.

[2]) Vgl. Fussnote 1, p. 224.

[3]) Um Missverständnisse zu vermeiden, bemerke ich, dass die Form, unter welcher ich hier den Meyer'schen und Neumann'schen Beweis dargestellt habe und welche ja mit derjenigen meines Beweises ausserordentliche Aehnlichkeit besitzt, keineswegs deren Originalform ist, vielmehr von mir nur gewählt wurde, um den eigentlichen Kern und das gemeinsame aller dieser Beweise möglichst scharf hervortreten zu lassen.

4. Von Beweisen des fraglichen Satzes, die nicht auf der Abel'schen Transformation beruhen, sind mir nur zwei bekannt geworden: der von Weierstrass in seinen Vorlesungen schon vor der Du Bois-Reymond'schen Publication gegebene und ein anderer, der von Herrn Netto herrührt. Der erstere[1]) basirt auf der partiellen Integration und erfordert demgemäss die Existenz einer integrablen Derivirten $f'(x)$, besitzt also erheblich geringere Tragweite, als irgend einer der bisher betrachteten Beweise und macht insbesondere die allgemeine Anwendbarkeit des Satzes auf den Convergenz-Beweis der Fourier'schen Reihe illusorisch. Im übrigen beruht dieser Beweis im Grunde genommen auf einem Umwege, durch dessen Benützung er gerade seine Allgemeinheit verliert. Denn die partielle Integration in ihrer Anwendung auf bestimmte Integrale ist schliesslich auch nur eine, gewisse specielle Voraussetzungen erheischende Folgerung aus der partiellen Summation.[2]) Es wird also der Mittelwerthsatz bei dem fraglichen Beweise statt aus der Abel'schen Transformation selbst, aus einer unter speciellen Bedingungen bestehenden Folgerung derselben hergeleitet.

Der Netto'sche Beweis[3]) sucht die Bonnet'sche Form des Satzes durch vollständige Induction zu begründen. Bedeuten wiederum $x_1, x_2, x_3, \ldots$ die einzigen Stellen, bei welchen $\varphi(x)$ einen Zeichenwechsel erleidet, so gilt der Satz zunächst, wie unmittelbar zu sehen, für das Intervall $x_0 \leq x < x_1$. Sodann wird gezeigt, dass seine Gültigkeit stets über eine Stelle x' hinausreicht, sofern sie nur bis x' feststeht. Dabei wird aber offenbar stillschweigend vorausgesetzt, dass überhaupt eine Stelle x_1, d. h. eine erste Stelle existire, bei welcher ein Zeichenwechsel stattfindet. Mit anderen Worten, der Beweis wird hinfällig, wenn $\varphi(x)$ in der Nachbarschaft

---

[1]) Man findet ihn auch bei Du Bois-Reymond, Journ. f. Math. Bd. 69, p. 82; desgl. Kronecker, Vorlesungen p. 57.

[2]) Vgl. Helm, Zeitschr. f. Math. 22 (1877), p. 401.

[3]) Zeitschr. f. Math. 40 (1895), p. 180.

von $x_0 + 0$ unendlich viele Zeichenwechsel besitzt. Ferner: angenommen es erstrecke sich die Gültigkeit des Satzes, die ursprünglich bis x' festgestanden haben mag, nunmehr bis x'', von da bis x''' u. s. f., so ist es sehr wohl denkbar, dass die Folge $x', x'', \ldots x^{(\nu)} \ldots$ gegen einen Grenzwerth $X' < X$ convergire. Und, wenn auch diese Complication überwunden ist, so gilt schliesslich, im Gegensatz zu der von Herrn Netto am Schlusse gemachten Behauptung, dass über die Anzahl der Stellen x_ν keine beschränkende Voraussetzung erforderlich sei, der betreffende Beweis überhaupt nur, wenn die x_ν eine monoton zunehmende Folge mit einer einzigen Grenzstelle bilden. Für diesen Fall kommt man aber so sehr viel einfacher mit dem Meyer'schen Beweise zum Ziele, dass die Vorzüge der äusserst mühsamen Netto'schen Schlussweise nicht recht einleuchtend erscheinen.

Druckfehler-Berichtigung.

In dem Aufsatze: „Ueber die Convergenz unendlicher Kettenbrüche", Sitz.-Ber. Bd. 28 (1898) muss es

p. 312, Zeile 3, Formel (34)
„ Fussnote, Zeile 4
p. 317, Zeile 1, Formel (54)
„ „ 4 „ (55)

durchweg heissen:

$$|b_\nu| - |a_\nu| \text{ statt: } |a_\nu| - |b_\nu|.$$

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der Bayerischen Akademie der Wissenschaften München

Jahr/Year: 1900

Band/Volume: 1900

Autor(en)/Author(s): Pringsheim Alfred

Artikel/Article: Ueber den sogenannte zweite Mittelwerthsatz für endliche Summen und Integrale 209-233