# Sitzungsberichte

der

## mathematisch-physikalischen Classe

der

## k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.

1900. Heft I.

München.
Verlag der k. Akademie.
1900.

In Commission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).

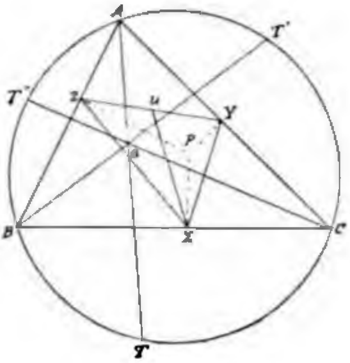
# Beziehungen zwischen Isogonalcentrik und Invariantentheorie.

Von **J. Schick.**

*(Eingelaufen 7. Juli.)*

§ 1. Bekanntlich lässt sich ein Doppel-Verhältniss von vier Punkten in der complexen Ebene auf einfache Weise geometrisch darstellen. Seien $A$, $B$, $C$, $P$ (Fig. 1) vier Punkte

Fig. 1.




mit den complexen Coordinaten $z_1, z_2, z_3, z_4$, so ist der absolute Wert des Doppel-Verhältnisses $(z_1\, z_2\, z_3\, z_4)$

$$\operatorname{abs}\left(\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_2} : \frac{z_1 - z_4}{z_3 - z_4}\right) = \frac{\overline{AB}}{\overline{CB}} : \frac{\overline{AP}}{\overline{CP}};$$

das Argument aber ist nach Wedekind gleich dem Winkel der Kreise $z_1\, z_2\, z_3$ und $z_1\, z_3\, z_4$, d. h. der Kreise, welche beziehungsweise durch die Punkte $A, B, C$ und $A, C, P$ hindurchgehen (bei richtiger Wahl des Sinnes).

Diese beiden Elemente, absoluter Wert und Argument, lassen sich nun leicht in einem Dreieck vereinigt zur Anschauung bringen, nemlich dem Fusspunktsdreieck von $P$ in Bezug auf das Dreieck $ABC$. Denn in diesem ist (vgl. Fig. 1), da $CXPY$ ein Kreisviereck,

$$XY = CP \cdot \sin ACB,$$

ebenso

$$ZY = AP \cdot \sin BAC,$$

also

$$\frac{XY}{ZY} = \frac{CP}{AP} \cdot \frac{\sin C}{\sin A} = \frac{CP}{AP} \cdot \frac{AB}{BC} = \frac{AB}{CB} : \frac{AP}{CP},$$

also gleich dem absoluten Wert des betrachteten Doppel-Verhältnisses $(z_1 z_2 z_3 z_4)$. Der Winkel aber, den diese beiden Seiten des Fusspunktsdreiecks einschliessen, nemlich $\sphericalangle XYZ$, ist

$$= \sphericalangle XYP + \sphericalangle ZYP = \sphericalangle XCP + \sphericalangle ZAP$$
$$= \sphericalangle APC - \sphericalangle B,$$

d. h. gleich der Differenz zwischen den Peripheriewinkeln der Kreise $APC$ und $ABC$, also gleich dem Winkel dieser beiden Kreise selbst, oder gleich dem Argument des gegebenen Doppel-Verhältnisses.

Bei linearer Transformation von der Form

$$\zeta = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$$

bleibt aber das Doppel-Verhältniss von vier Punkten ungeändert; folglich muss von Dreieck $XYZ$ bei der Transformation in die $\zeta$-Ebene sowohl $XY : ZY$, als auch der eingeschlossene Winkel $XYZ$ invariant bleiben; es bleibt also überhaupt die Form des Fusspunktsdreiecks $XYZ$ ungeändert.

Man erhält somit den bemerkenswerthen Satz:

Bei linearer Transformation von vier Punkten in der complexen Ebene behält das Fusspunktsdreieck je des vierten Punktes in Bezug auf das Dreieck der drei übrigen Punkte invariante Form.

Dies ist der Fall, trotzdem alle bei Construction des Fusspunktsdreiecks benutzten Linien nicht invarianten Charakter haben, sondern in Kreise übergehen, die für die Construction des neuen Fusspunktsdreiecks keine Bedeutung haben.

§ 2. Aus dem angeführten Satze wird unmittelbar erhellen, dass die Theorie der Fusspunktsfiguren — die „Isogonalcentrik" — von einiger Wichtigkeit für die Invariantentheorie zu werden verspricht. Vor Jahren habe ich solche Fusspunktsfiguren, insbesondere Dreiecke, einer genaueren Untersuchung unterzogen und namentlich die Frage behandelt, welche geometrischen Oerter das „Orthogonalcentrum" $P$ der Fusspunktsfigur (allgemeiner „Isogonalcentrum", wenn die Strahlen $PX$, $PY$, $PZ$ nicht „orthodrom", sondern „isoloxodrom", d. h. nicht gerade je unter einem rechten, sondern unter einem beliebigen gleichen Winkel $\xi$ gezogen werden) beschreiben muss, damit gewisse Elemente dieser Figur constant bleiben.

§ 3. Dabei zeigt sich z. B., dass die Seiten des Fusspunktsdreiecks $YZ$, $XZ$, $XY$ (bezeichnet mit $a_f$, $b_f$, $c_f$) constant sind, wenn das Isogonalcentrum $P$ sich auf Kreisen um die Dreiecksspitzen $A$, $B$, $C$ bewegt. Weiter ist, wie längst bekannt, der Inhalt $J_f$ des Fusspunktsdreiecks constant für Kreise, die concentrisch sind mit dem Umkreis des Originaldreiecks.

§ 4. Ferner ist die Transversale (Mittellinie) $t_f = XU$ constant für Kreise um einen Punkt $T$ (den „Transversalpol"), der, im Sinne der complexen Ebene, der vierte harmonische Punkt ist zu $A$, $B$, $C$. Bekanntlich liegt dieser Punkt auf dem Umkreis des Dreiecks $ABC$ so, dass das Verhältniss $BT : CT = BA : CA$ ist; auch leuchtet ein, dass man bei cyklischer Permutation zwei weitere Transversalpole $T'$ und $T''$ erhalten wird: diese liefern im Fusspunktsdreieck constante Transversalen $t_f'$ und $t_f''$ (vgl. meine Grundlagen einer Isogonalcentrik, Tübingen 1887, § 29), und das ganze Punkt-System $T$, $T'$ und $T''$ bildet die Covariante $Q$ der binären cubischen Form $(ABC)$.

§ 5. Auch wenn $YZ$ in $U$ nicht halbiert, sondern in beliebigem gegebenen Verhältniss $m : n$ geteilt sein soll, so gilt dieser Satz noch mutatis mutandis: man erhält dann für constantes $XU = t_f$ im Fusspunktsdreieck wiederum einen Kreis als geometrischen Ort; der Mittelpunkt liegt auch hier auf dem Umkreis (in einfach zu bestimmender Lage). Lässt man $m:n$ beliebig variieren, so umläuft das Centrum der Kreisscharen die Peripherie des Umkreises: letzterer ist also der Träger von Satellitenkreisen (oder der „deferierende" Kreis von Epicykelscharen), die die Oerter für constante „Barytome" $t_f$ bilden.

§ 6. Zieht man $AT$, $BT'$, $CT''$, so schneiden sich diese Linien in einem Punkte $Q$, der die Eigenschaft hat, dass Kreise um ihn die Träger von Isogonalcentren sind, die im Fusspunktsdreieck constante Summen der Seitenquadrate haben, so dass also

$$XY^2 + XZ^2 + YZ^2 = a_f^2 + b_f^2 + c_f^2 = \text{Const.}$$

Ich habe diesen Punkt früher selbständig untersucht und ihn den „Schwerpol" des Dreiecks genannt (vgl. Grundlagen, §§ 23, 34 ff.); später fand ich, dass derselbe auch von Grebe und dem um die Geometrie des Dreiecks hochverdienten Lemoine untersucht worden war und in neueren Werken bald nach dem einen, bald nach dem andern benannt wird. (Vgl. über diesen Punkt auch unten § 27.)

§ 7. Die Höhen eines Fusspunktsdreiecks, $h_f$, $h_f'$, $h_f''$ sind constant, wenn das Isogonalcentrum sich auf Konchoiden mit Kreis $ABC$ als Basis und den Ecken des Dreiecks $A$, resp. $B$ und $C$, als Doppelpunkten bewegt (Grundlagen, § 108); ähnliches gilt von den Projectionen einer Seite auf eine andere: in diesem Falle wird die circulare Basis der Konchoiden gebildet von Orthogonalkreisen an den Umkreis $ABC$, die zugleich je durch die Endpunkte einer Seite gehen.

§ 8. Sollen im Fusspunktsdreiecke die Verhältnisse von zwei Seiten, z. B. $b_f : c_f$, constant sein, so bekommt man als Oerter für das Isogonalcentrum apollonische Kreise zu $B$ und $C$ (also den Punkten, die selbst die Centren für Kreisscharen mit constanter Länge der betreffenden Seiten $b_f$ und $c_f$ im Fusspunktsdreieck sind).

Soll $b_f = c_f$ sein, so geht der gesuchte Kreis durch $A$ und den Transversalpol $T$; er ist dann ein „Aequilateralkreis" des Dreiecks. Soll in ähnlicher Weise etwa das Verhältniss der Transversalen $t'_f$ und $t''_f$ constant sein, so erhält man als Oerter für das Isogonalcentrum apollonische Kreise zu $T'$ und $T''$ u. s. w.

§ 9. Sollen endlich die Winkel des Fusspunktsdreiecks constant sein, so erhält man Kreisbogen über den Seiten $BC$, $AC$, $AB$ des Dreiecks als geometrische Oerter; für constante Winkel zwischen $a_f$ und $t_f$ Kreisbogen über $AT$, für constante Winkel zwischen $t'_f$ und $t''_f$ Kreisbogen über $T'\,T''$ u. s. w.

§ 10. Die ersten der obigen Sätze, die von Strecken und Flächen handeln (§§ 3—7), werden für die Invariantentheorie keine Bedeutung haben, wohl aber die letzteren, die sich auf Verhältnisse, und jedenfalls diejenigen, die sich auf Winkel beziehen (§§ 8 und 9). Insbesondere handelt es sich um die Lage des Isogonalcentrums, wenn die Winkel $X$, $Y$, $Z$ des Fusspunktsdreiecks bei gegebenem Urdreieck $ABC$ vorgeschriebene Grösse haben sollen, und verwandte Dinge. Diesen Teil der „Isogonalcentrik" hoffe ich demnächst in einem besonderen Kapitel, der „Isomorphopolcentrik", zu behandeln; die Sätze, die ich hieraus für den gegenwärtigen Zweck benötige, werde ich je an geeigneter Stelle anführen.

§ 11. Zunächst vermittelt nun die Kenntniss des elementaren Hauptsatzes der Isomorphopolcentrik eine schnelle und unmittelbare Einsicht in das Theorem von der Invarianz der Form von Fusspunktsdreiecken bei linearer Transformation. Der angezogene Satz — dessen Beweis in den Ausführungen des § 1 oben liegt — lautet: Ein Winkel $\alpha_f$ eines Fusspunktsdreiecks ist gleich dem Winkel des Umkreises $ABC$ mit dem Kreise durch $B$, $P$ und $C$. Nun bleibt letzterer Winkel als Kreiswinkel bei der Transformation constant, also auch $\alpha_f$, und natürlich in cyklischer Folge auch $\beta_f$ und $\gamma_f$. Q. e. d.

§ 12. Des weiteren lehrt die Isomorphopolcentrik, dass, wenn ein Punkt $P$ im Fusspunktsdreieck die Winkel $\lambda$, $\mu$, $\nu$ hat, auch der (in Bezug auf den Umkreis) zu ihm „reciproke"

Dreiecke $B\,D\,C$, $C\,E\,A$, $A\,F\,B$ mit den Winkeln $\lambda$, $\mu$, $\nu$. Es gehen dann bekanntlich die Geraden $A\,D$, $B\,E$, $C\,F$ durch einen Punkt $V$, von dem aus die Seiten des Dreiecks unter den Supplementarwinkeln zu $\lambda$, $\mu$, $\nu$ gesehen werden, so dass also $\sphericalangle B\,V\,C = 2\,R - \lambda$, $\sphericalangle A\,V\,C = 2\,R - \mu$, $\sphericalangle A\,V\,B = 2\,R - \nu$. Dieser Punkt $V$ ist dann der „Gegenpunkt" des $(\lambda\mu\nu)$-Isomorphopols.

§ 17. Für diesen Punkt ist auch die Summe

$$D_{\lambda\mu\nu} = \sin\lambda \cdot A\,V + \sin\mu \cdot B\,V + \sin\nu \cdot C\,V$$

ein Minimum (wo $V$ variabel bei constantem $A$, $B$, $C$ und $\lambda$, $\mu$, $\nu$). Ich nenne diesen Ausdruck deswegen die $(\lambda\;\mu\;\nu)$-Minimal-Distanz, und es gilt für sie die Formel:

$$D_{\lambda\mu\nu} = \sqrt{\sin\lambda\cdot\sin\mu\cdot\sin\nu\,\{a^2\cdot\operatorname{ctg}\lambda + b^2\cdot\operatorname{ctg}\mu + c^2\cdot\operatorname{ctg}\nu + 4\,J\}}.$$

§ 18. Einen Punkt $V'$ mit ähnlichen Eigenschaften erhält man, wenn man die Dreiecke über den Seiten von $A\,B\,C$ alle nach innen errichtet. Im Hinblick auf die angegebenen Eigenschaften kann man die Punkte $V$ und $V'$ die $(\lambda, \mu, \nu)$-„Visirpunkte" oder „(Minimal-)Distanzpunkte" des Dreiecks nennen.

Es sei noch bemerkt, dass Punkt $V'$ auf dem Kreise liegt, welcher durch die Spiegelpunkte $V_1$, $V_2$, $V_3$ von $V$ in Bezug auf die Dreiecksseiten geht (dessen Centrum der „Gegenpunkt" von $V$ ist, also nach obigem der $(\lambda, \mu, \nu)$-Isomorphopol).

§ 19. Für die Isogonalcentrik ist wegen seiner grossen Allgemeinheit der Satz von Wichtigkeit, dass die $(\lambda\;\mu\;\nu)$-Minimaldistanz in Bezug auf ein Fusspunktsdreieck $X\,Y\,Z$ constant ist, wenn das Orthogonalcentrum sich auf Kreisen um den $(\lambda\;\mu\;\nu)$-Isomorphopol bewegt.

§ 20. Im Anschluss an obige Ausführungen ergeben sich leicht (aus ähnlichen Dreiecken) die Formeln für die Abstände der $(\lambda, \mu, \nu)$-Isomorphole von den Ecken, nemlich:

$$A\,P = \frac{b\,c\cdot\sin\lambda}{D};\quad B\,P = \frac{a\,c\cdot\sin\mu}{D};\quad C\,P = \frac{a\,b\cdot\sin\nu}{D}$$

wo $D = \sqrt{\sin\lambda\cdot\sin\mu\cdot\sin\nu\,\{a^2\cdot\operatorname{ctg}\lambda + b^2\cdot\operatorname{ctg}\mu + c^2\cdot\operatorname{ctg}\nu + 4\,J\}}$.

Alsbald erkennt man, dass das Doppel-Verhältniss

$$\frac{BP}{CP} : \frac{BA}{CA} = \frac{c \cdot \sin\mu}{b \cdot \sin\nu} : \frac{c}{b} = \frac{\sin\mu}{\sin\nu}$$

nur von $\mu$ und $\nu$ abhängt, wie es nach § 1 sein muss. Auch sieht man leicht, dass in diesen Formeln eine geschlossene Lösung des Pothenot'schen Problems enthalten ist.

Weiter zeigt sich, dass man bei cyklischer Vertauschung für den ($\lambda$, $\nu$, $\mu$)-Isomorphol $P'$ die Formeln erhält:

$$A\,P' = \frac{b\,c \cdot \sin\lambda}{\sqrt{\sin\lambda \cdot \sin\mu \cdot \sin\nu \cdot \{a^2 \cdot \operatorname{ctg}\lambda + b^2 \cdot \operatorname{ctg}\nu + c^2 \cdot \operatorname{ctg}\mu + 4\,J\}}}$$

u. s. w., und für die Antiisomorphole (mit negativem Zeichen vor $4\,J$):

$$A\,Q = \frac{b\,c \cdot \sin\lambda}{\sqrt{\sin\lambda \cdot \sin\mu \cdot \sin\nu \cdot \{a^2 \cdot \operatorname{ctg}\lambda + b^2 \cdot \operatorname{ctg}\mu + c^2 \cdot \operatorname{ctg}\nu - 4\,J\}}}$$

u. s. w.

§ 21. Wir haben im obigen gesehen, dass jeder Punkt in der Ebene eines Dreiecks, betrachtet als ($\lambda$, $\mu$, $\nu$)-Isomorphopol, invariant ist. Es wird sich verlohnen, die wichtigsten der merkwürdigen Punkte eines Dreiecks unter diesem Gesichtspunkt Revue passiren zu lassen.

Sind zunächst alle drei Winkel $\lambda$, $\mu$ und $\nu$ einander gleich, also je $= \frac{\pi}{3}$, so wird das Fusspunktsdreieck $X\ Y\ Z$ gleichseitig. Leicht erkennt man, dass alsdann die zwölf Punkte sich auf zwei (reciproke) Punkte $J$ und $J'$ reduciren, die sogenannten äquianharmonischen Punkte (oder, da sie gleichseitige Fusspunktsdreiecke geben, die „Aequilateralpole"). Sie liegen harmonisch zum Schwerpol und Umkreiscentrum; Kreise um sie sind die Träger von Isogonalcentren, für welche die „Minimaldistanz" $d_f$, resp. $d'_f$, im Fusspunktsdreieck constant ist (vgl. Grundlagen, §§ 21, 73, 74, 135).

§ 22. Ebenso sieht man leicht, dass die drei Transversalpole $T$, $T'$ und $T''$ eines Dreiecks invariant sind. Dieselben liegen auf der Peripherie des Umkreises; ihre Fusspunkte liegen demnach auf einer geraden Linie („Wallace-Linie", früher fälschlich „Simson-Linie" genannt; vgl. Cantor, Geschichte der Mathematik III, 522 f.). Da ferner für Punkt $T$

$$BT : CT = AB : AC$$

ist, so ist offenbar $XY = XZ$. Das Dreieck $XYZ$ bekommt also in dieser Grenzform die Winkel 0, 0, 180°, und das Seitenverhältniss $1 : 1 : 2$; all dies bleibt invariant.

Die Transversalpole sind, wie schon in § 3 angedeutet, die vierten harmonischen Punkte zu den Ecken des Dreiecks, und müssen ja als solche natürlich invariante Eigenschaft haben.

§ 23. Es sei des weitern angedeutet, dass merkwürdige Dreieckspunkte invarianter Natur ferner bei den Figuren zum Vorschein kommen, welche sich aus der stereographischen Projection des Oktaëders und Ikosaëders ergeben (vgl. z. B. Möbius, Theorie der symmetrischen Figuren, Ges. Werke Band II, Klein, Vorlesungen über das Ikosaëder — die Figur am Ende —, oder Forsyth, Theory of Functions, p. 570 und 572). Man hat in beiden Figuren Kreisbogen und gerade Linien, die sich unter bekannten Winkeln $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{2\pi}{5}, \frac{\pi}{5} \text{ etc.}\right)$ schneiden. Nimmt man zu drei bestimmten Punkten einer solchen Figur einen vierten Punkt derselben Figur hinzu, so zeigt sich (bei geeigneter Lage), dass der vierte Punkt auf Kreisbogen über den Seiten des zum Ausgang genommenen Dreiecks liegt. Das Fusspunktsdreieck des 4. Punktes in Bezug auf die drei ersten wird alsdann bestimmte Winkel haben $\left(\text{z. B. } \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$, so dass also der vierte Punkt ein bestimmter Isomorphopol dreier anderer ist und so das ganze System invariant bleibt.

§ 24. In den vorhergehenden Beispielen haben wir stets Punkte gehabt, die in beiden Dreiecken, dem Dreieck $ABC$ der $z$-Ebene und dem Dreieck $A'B'C'$ der $\zeta$-Ebene, gleich definiert waren. So werden die „Aequilateralpole" des ersten

Dreiecks wieder „Aequilateralpole" des zweiten, die „Transversalpole" des ersten wieder „Transversalpole" des zweiten u. s. w. Man kann Punkte dieser Art, welche absolute, von den Elementen des Urdreiecks unabhängige Coordinaten $\lambda$, $\mu$, $\nu$ haben, Punkte primärer Invarianz nennen.

Anders steht es mit einer Gruppe anderer merkwürdiger Punkte des Dreiecks. So wird z. B. das Umkreiscentrum $O$ des Dreiecks $A\,B\,C$ keineswegs in das Umkreiscentrum des Dreiecks $A'\,B'\,C'$ transformirt, ist also in dieser Eigenschaft nicht invariant. Das Umkreiscentrum ist aber auch Orthogonalcentrum eines Fusspunktsdreiecks, dessen Winkel $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, d. h. die Winkel des Urdreiecks selbst sind. Nach § 21, resp. § 11, muss der Punkt $O$, als $(\alpha, \beta, \gamma)$-Isomorphopol von $A\,B\,C$ betrachtet, invariant sein, d. h. der entsprechende Punkt $O'$ muss in seinem Fusspunktsdreieck auf $A'\,B'\,C'$ auch die Winkel $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ des ersten Dreiecks haben.

Hier hängen also die Coordinaten der Punkte $O$ und $O'$ von den Elementen des Urdreiecks ab; das Umkreis-Centrum ist nicht als solches invariant, sondern nur in einer Eigenschaft von secundärer Bedeutung. Wir werden solche Punkte als Punkte secundärer Invarianz bezeichnen.

§ 25. Im Anschluss an die Betrachtungen des vorigen Paragraphen können wir nun auch leicht den unendlich fernen Punkt der $z$-Ebene in der $\zeta$-Ebene entsprechend darstellen. Als reciproker Punkt des Umkreiscentrums wird der unendlich ferne Punkt im Fusspunktsdreieck auch die Winkel $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ haben; in der $\zeta$-Ebene wird ihm also der reciproke Punkt zu $O'$ (der Antiisomorphopol von $O'$) entsprechen.

§ 26. Aehnliches wie vom Umkreis-Centrum und vom unendlich fernen Punkt gilt von den Brocard'schen Punkten des Dreiecks, oder den „Paraklinenpunkten", wie ich früher sie zu nennen versucht war (weil sie durch Kreise construiert werden, die sich an die Dreiecksseiten anlehnen). Die Fusspunktsdreiecke der zwei Brocard'schen Punkte (die bekanntlich „Gegenpunkte" sind), sind auch dem Urdreieck $A\,B\,C$

ähnlich, doch so, dass nun für den einen der zwei Punkte der Winkel $\beta$, für den andern der Winkel $\gamma$ an die erste Seite $B\,C$ des Urdreiecks zu liegen kommt (während im Fusspunktsdreieck von $O$ der erste Winkel an der ersten Seite liegt). Auch im transformierten Dreieck haben also die entsprechenden Punkte die Winkel $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ (in bestimmter Reihenfolge) im Fusspunktsdreieck; aber natürlich sind die neuen Punkte nun nicht auch die „Paraklinenpunkte" des neuen Dreiecks: dazu müssten die Fusspunktsdreiecke die Winkel $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$ des transformierten Dreiecks haben.

Es mag hier noch erwähnt werden, dass auch die höheren Fusspunktsdreiecke der Brocard'schen Punkte (wenn also von ihnen aus neue Senkrechte auf die Seiten des ersten Fusspunktsdreiecks, dann auf die Seiten des so entstandenen secundären, tertiären etc. Fusspunktsdreiecks gefällt werden) sammt und sonders in infinitum einander ähnlich sind und die Winkel des Urdreiecks $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ enthalten.

§ 27. Nur von secundärer Invarianz ist weiter ein anderer, höchst merkwürdiger Punkt des Dreiecks, der sog. Grebe'sche oder Lemoine'sche Punkt, $Q$ (vgl. oben § 6). Er ist der Gegenpunkt des Schwerpunkts, der Pol der Pascalschen Geraden des Dreiecks, das Centrum von Kreisscharen, die constante Summe der Seitenquadrate im Fusspunktsdreieck haben u. s. w.; sein eigenes Fusspunktsdreieck hat zu Winkeln die drei Transversalenwinkel des Urdreiecks $\tau_1$, $\tau_2$, $\tau_3$. Letztere Eigenschaft hat natürlich (neben den andern zehn Isomorphopolen) auch der reciproke Punkt zu $Q$, der nichts anderes ist als der Fusspunkt des vom Umkreiscentrum auf die Pascal'sche Gerade gefällten Perpendikels. Dieser Punkt ist also nur secundär invariant, nemlich als $(\tau_1, \tau_2, \tau_3)$-Isomorphopol des Dreiecks $A\,B\,C$.

---

§ 28. Wenn wir nun unsere Blicke auf das Viereck, oder auch auf höhere Polygone werfen, so lassen sich natürlich auf der Stelle gleich eine Menge invarianter Punkte angeben. Die

Kreise über den Partialdreiecken $ABC$, $ACD$, $ABD$, $BCD$ sind ja invariant, also auch Kreise, die diese halbieren, trisecieren, überhaupt mit ihnen gleiche Winkel bilden; solche Kreise werden sich dann auch wieder in invarianten Punkten schneiden. Oder man construiere beliebige entsprechende Punktternionen in der $z$- und $\zeta$-Ebene: die Kreise, die hierdurch bestimmt werden, schneiden sich in neuen invarianten Punkten u. s. w. Dadurch erhält man nun freilich nur Punkte, die zunächst keine weiteren interessanten Eigenschaften aufweisen, insbesondere sich nicht mit bereits bekannten und wichtigen merkwürdigen Punkten des Vierecks (oder Vierseits — die Scheidung ist für unsere Zwecke kaum von Wichtigkeit) decken. Die Theorie der letzteren ist freilich noch ziemlich vernachlässigt; doch dürften als einige der merkwürdigsten Punkte des Vierecks die in den folgenden Paragraphen zur Beschreibung kommenden bezeichnet werden.

§ 29. Die vier Seiten eines Vierseits bestimmen vier Dreiecke, deren Umkreise sich in einem Punkte schneiden; dieser ist der Brennpunkt der dem Vierseit eingeschriebenen Parabel. Ich nenne ihn deshalb die Eschara des Vierseits (altgriechisch ἐσχάρα 'Herd'; in neugriechischen mathematischen Schriften ist ἐσχάριον = focus, Brennpunkt).

Der Punkt ist für die Isogonalcentrik von grossem Interesse, da seine Fusspunkte in Bezug auf die vier Seiten in gerader Linie liegen, der Flächeninhalt seines Fusspunktsvierecks also gleich Null ist.

Vier Punkte bestimmen sechs Gerade, die in drei Doppelpaaren angeordnet werden können; jedes Doppelpaar hat seine eigene Eschara: wir bekommen also ein „Escharendreieck“, dessen Seiten sich sehr einfach aus gewissen Elementen des Vierecks bestimmen lassen.

§ 30. Um einen dieser Punkte $P$ auf die Eigenschaft der Invarianz zu prüfen, berechne man seine Abstände von den Ecken $A$, $B$, $C$ und $D$. Man findet, wenn $a, b, c, d$ die Seiten, $e$ und $f$ die Diagonalen bezeichnen (vgl. Fig. 3):

$$A\,P = \frac{a\,d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - e^2 - f^2}} = \frac{a\,d}{2\,t};$$

$$B\,P = \frac{ab}{2\,t};\quad C\,P = \frac{b\,c}{2\,t};\quad D\,P = \frac{c\,d}{2\,t}.$$

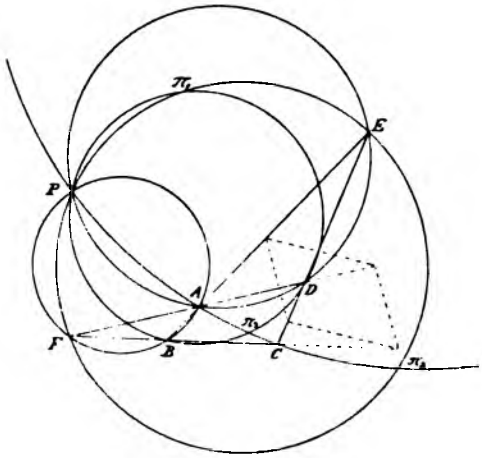
So ergibt sich für das Doppelverhältniss die Formel:

$$\frac{B\,P}{A\,P} : \frac{B\,C}{A\,C} = \frac{b}{d} : \frac{b}{e} = \frac{e}{d}.$$

Da nun offenbar $e:d$ nicht invariant ist, so ist es auch das genannte Doppelverhältniss nicht, womit die Eschara als nicht invarianter Punkt erwiesen ist.

§ 31. Nebst den Escharen verdient eine Gruppe weiterer merkwürdiger Punkte unser Interesse, die meines Wissens die Aufmerksamkeit der Geometer noch nicht auf sich gezogen haben. Man kann die Aufgabe stellen, bei gegebenem Viereck

Fig. 3.




einen Punkt zu suchen, so dass dessen Fusspunktsviereck ein Parallelogramm ist. Die Lösung ist folgende:

Construiere zu dem gegebenen Viereck $A\,B\,C\,D$ (Fig. 3) die Eschara $P$ (Schnitt der Kreise $A\,B\,F$, $A\,D\,E$, $C\,D\,F$, $B\,C\,E$);

dann beschreibe die Kreise $A\,C\,P$, $B\,D\,P$ und $E\,F\,P$; sie schneiden sich ausser in $P$ noch in drei Punkten $\Pi_1$, $\Pi_2$, $\Pi_3$, die die verlangte Eigenschaft haben (in Figur 3 ist das zu $\Pi_2$ gehörige Fusspunktsparallelogramm angedeutet). Diese Construction lässt sich noch zwei Mal cyklisch permutieren (indem man statt $A\,C$ und $B\,D$ nunmehr $A\,B$ und $C\,D$, resp. $A\,D$ und $B\,C$ als Diagonalen des Vierecks fasst), so dass man zusammen neun solcher Punkte erhält.

§ 32. Die Aufgabe, ein Fusspunktsparallelogramm zu construieren, ist nur ein specieller Fall einer allgemeineren. Euler ist es schon gewesen, der am Viereck die Verbindungslinie der Diagonalenmitten, $M\,N = t$, ins Auge gefasst hat. Bekanntlich hat er bewiesen, dass sie sich sehr einfach in den Seiten und Diagonalen des Vierecks ausdrücken lässt, nemlich:

$$t^2 = \tfrac{1}{4}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - e^2 - f^2).$$

Aehnliches gilt von den Verbindungslinien $t'$ und $t''$ der Mitten von $A\,B$ und $C\,D$, resp. $A\,D$ und $B\,C$. Man thut wohl am besten, den Namen Medianen, den besonders französische Geometer bevorzugen, für die bezeichneten Verbindungslinien anzunehmen.

Die Aufgabe ist nun, den geometrischen Ort des Isogonalcentrums $P$ anzugeben, wenn eine bestimmte Mediane im Fusspunktsdreieck constant sein soll. Es zeigt sich, dass Kreise um die Punkte $\Pi$ diese geometrischen Oerter darstellen, und so bezeichnen wir diese Punkte $\Pi$ am besten als Medianenpole.

§ 33. Für die Entfernung des Punktes $\Pi_3$ von $A$, $B$, $C$, $D$ gelten die Formeln:

$$A\,\Pi_3 = \frac{e \cdot \sin\gamma}{\sqrt{\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma + \sin^2\delta - \sin^2\varepsilon - \sin^2\zeta}} = \frac{e \cdot \sin\gamma}{\sigma};$$

$$B\,\Pi_3 = \frac{f \cdot \sin\delta}{\sigma}; \quad C\,\Pi_3 = \frac{e \cdot \sin\alpha}{\sigma}; \quad D\,\Pi_3 = \frac{f \cdot \sin\beta}{\sigma}.$$

Wenn man die entsprechenden Doppelverhältnisse bildet, wie in § 30, so findet man, dass auch die „Medianenpole“ nicht invariant sind.

§ 34. Man kann Punkt $\Pi_3$ auch noch durch Specialisierung eines hübschen Satzes vom Sechseck finden. Die fünf Escharen eines Pentagramms liegen bekanntlich nach einem Satz von Miquel auf einem Kreis, der „Pentaphorie", und die sechs Pentaphorieen eines Hexagramms schneiden sich in einem Punkt, der „Hexeschara". Der Medianenpol $\Pi_3$ ist nun die Hexeschara eines Hexagramms, das von den vier Seiten und zwei Diagonalen eines Tetragramms gebildet wird.

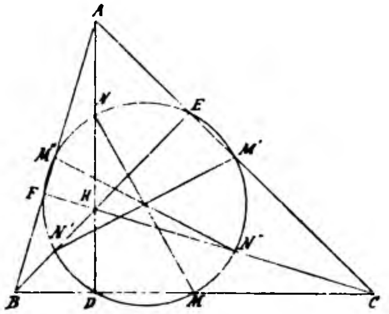
§ 35. Interessante Punkte entstehen ferner am vollständigen Vierseit, wenn man über den drei Diagonalen $A\,C$, $B\,D$, $E\,F$ als Durchmessern Kreise beschreibt. Diese schneiden sich bekanntlich in zwei Punkten, die auf der Steiner'schen Höhengeraden liegen, den sogenannten „cyklischen Punkten" $Z$ und $Z'$ des Vierecks.

§ 36. Invariant sind aber auch diese Punkte nicht. Denn Kreis $A\,Z\,C$ über der Diagonale $A\,C$ des Vierecks $A\,B\,C\,D$ schneidet diese Diagonale unter rechten Winkeln; die Diagonale $A\,C$ geht aber bei der Transformation nicht wieder in die Diagonale $A'\,C'$ über, sondern in einen beliebigen Kreis $A'\,Q\,C'$ durch $A'\,C'$; der Kreis über $A'\,C'$ als Durchmesser (auf dem die cyklischen Punkte des $\zeta$-Vierecks liegen) muss also verschieden sein von dem Orthogonalkreis zu $A'\,Q\,C'$, der dem Kreis $A\,Z\,C$ der $z$-Ebene entspricht.

§ 37. Ein weiteres Punktepaar mag noch erwähnt werden, das auch in der Isogonalcentrik eine Rolle spielt, die „Isomedianenpole" oder „Trisorthopole". Es ist nemlich möglich, dass in einem (vollständigen) Vierseit alle drei Medianen einander gleich sind: dies ist der Fall, wenn der vierte Punkt Höhenschnitt des Dreiecks der drei übrigen ist. Wenn (Fig. 4) $M$, $M'$, $M''$ die Mitten der Seiten $B\,C$, $A\,C$, $A\,B$ des Dreiecks $A\,B\,C$ und $N$, $N'$, $N''$ die Mitten der oberen Höhenabschnitte $A\,H$, $B\,H$, $C\,H$ sind, so ist bekanntlich $M\,N = M'\,N' = M''\,N''$; die Medianen schneiden sich im Centrum des Feuerbach'schen Kreises des Dreiecks; je zwei Diagonalen des Vierecks, $A\,H$ und $B\,C$, $B\,H$ und $A\,C$, $C\,H$ und $A\,B$, stehen senkrecht auf einander.

Wenn man nun verlangt, dass bei gegebenem Viereck ein Fusspunktsviereck gefunden werde, so dass die drei Medianen gleich seien (oder alle drei Diagonalenwinkel rechte seien), so sind die genannten Punkte die Orthogonalcentren. Sie sind die Schnittpunkte von Orthogonalkreisen, die je durch die Enden einer Diagonale zu den „Escharenkreisen" $APC$, $BPD$, $EPF$ gezogen werden können. Eine ähnliche Ueberlegung wie in § 36 ergibt, dass auch diese Punkte nicht invariant sind.

Fig. 4.




§ 38. Zur Auffindung wirklich invarianter Punkte am Viereck (und wohl auch an höheren Figuren) kann man sich aber des folgenden einfachen Princips mit Nutzen bedienen.

Wenn die Fusspunktsdreiecke $XYZ$ und $X_1 Y_1 Z_1$ eines Punktes $P$ in Bezug auf zwei beliebige Dreiecke, etwa $ABC$ und $A_1 B_1 C_1$, ähnlich sind, so heisst das in der complexen Ebene nach § 1, dass die Doppelverhältnisse $(P\,A\,B\,C)$ und $(P\,A_1\,B_1\,C_1)$ gleich sind. Offenbar ist dadurch Punkt $P$ bestimmt (endlich vieldeutig)[1], und zwar als primär invarianter Punkt.

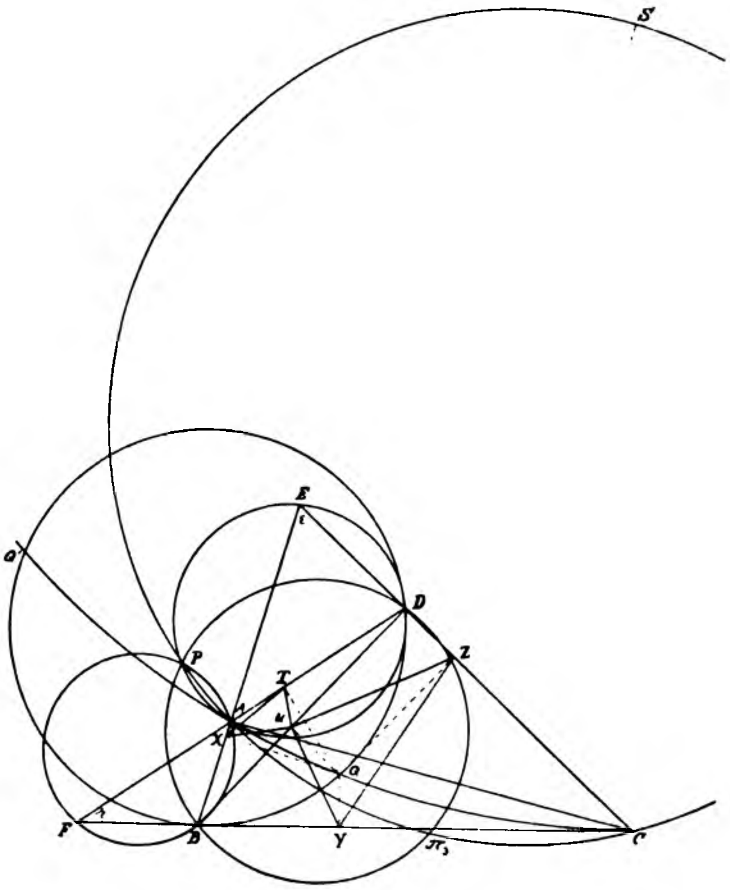
§ 39. Auf das Viereck lässt sich nun dieses Princip z. B. auf folgende Weise anwenden.

---

[1]) Die Bestimmung des Punktes führt auf interessante Curven, die nach den obigen Ausführungen für die Invariantentheorie von grosser Wichtigkeit sein müssen.

Fällt man von einem Punkte $Q$ (Fig. 5) die Senkrechten auf die vier Seiten und eine Diagonale des Vierecks, so wird

Fig. 5.




Punkt $Q$ invariant sein, wenn $\triangle\, X\,U\,T \sim Y\,U\,Z$, und es handelt sich nur darum, einen Punkt mit dieser Eigenschaft zu construieren. Es sei nun $\sphericalangle\, X\,U\,T = \sphericalangle\, Y\,U\,Z$, so folgt

$$A\,B\,Q + A\,D\,Q = B\,Q\,D - \gamma,$$

oder $\quad 4\,R - \alpha - B\,Q\,D = B\,Q\,D - \gamma,\quad$ also

(1) $$B\,Q\,D = 2\,R - \frac{\alpha - \gamma}{2} = 2\,R - \frac{\varepsilon + \zeta}{2}.$$

Es sei weiter $\sphericalangle X\,T\,U = \sphericalangle U\,Y\,Z$, also

$$A\,Q\,D - A\,B\,D = B\,Q\,C - B\,D\,C,$$
$$B\,Q\,C - A\,Q\,D = B\,D\,C - A\,B\,D = \varepsilon,$$

oder links $A\,Q\,B$ addiert und subtrahiert:

$$4\,R - A\,Q\,C - B\,Q\,D = \varepsilon;$$

aber $\quad B\,Q\,D = 2\,R - \frac{\alpha - \gamma}{2}$, also

(2) $$A\,Q\,C = 2\,R - \frac{\delta - \beta}{2} = 2\,R - \frac{\varepsilon - \zeta}{2}.$$

Die Schnittpunkte der beiden Kreise $A\,Q\,C$ und $B\,Q\,D$ müssen also nach obigem invariante Punkte sein.

§ 40. Es lässt sich nun zunächst leicht zeigen, dass der Kreis $A\,C\,Q$ den Winkel der Kreise $A\,B\,C$ und $A\,C\,D$, sowie der Kreis $B\,D\,Q$ den Winkel der Kreise $A\,B\,D$ und $B\,C\,D$ halbiert. Dies gibt eine sehr einfache Construction der gefundenen invarianten Punkte, die wir fortan $\Gamma$ und $\Gamma'$ nennen wollen. Auch sieht man hier unmittelbar, dass wir es mit invarianten Punkten zu thun haben; denn es kommt ja den Kreisen $A\,B\,C$ und $A\,C\,D$, sowie $A\,B\,D$ und $B\,C\,D$ die Eigenschaft der Invarianz zu, also auch den respectiven Halbierungskreisen und deren Schnittpunkten.

§ 41. Bekanntlich haben die Punkte $\Gamma$ und $\Gamma'$ die Eigenschaft, dass sie zu dem Punktepaar $A\,C$, sowie zu dem Paar $B\,D$ im Sinn der complexen Ebene harmonisch liegen ($\Gamma$ ist Transversalpol zu $A\,C\,\Gamma'$ und $B\,D\,\Gamma'$, $\Gamma'$ Transversalpol zu $A\,C\,\Gamma$ und $B\,D\,\Gamma$).

Man kann die Punkte deshalb die autoharmonischen, oder vielleicht auch schlechtweg die harmonischen Punkte des Vierecks nennen.

§ 42. Nach den Angaben der §§ 31 und 39 ist es auch leicht, die Lage der Punkte $\Gamma$ und $\Gamma'$ gegen die Eschara und den Medianenpol zu bestimmen. Der Winkel, den der Kreis $P\,A\,\Pi_3\,C$ (wo $P$ die Eschara, $\Pi_3$ Medianenpol) über $A\,C$ fasst, ist offenbar $= \varepsilon - \zeta$, respective $2\,R - (\varepsilon - \zeta)$; allein der Kreisbogen $A\,\Gamma\,C$ fasst nach § 39 den Winkel $2\,R - \frac{\varepsilon - \zeta}{2}$, folglich liegt sein Mittelpunkt $S$ im Zenith des Bogens $A\,C$ gegenüber $\Pi_3$, und der Kreis $A\,\Gamma\,C$ halbiert den Winkel der Geraden $A\,C$ und des Kreisbogens $A\,\Pi_3\,C$.

§ 43. Die Isogonalcentrik lehrt, dass für Kreise über den Diagonalen eines Vierecks die Diagonalenwinkel des Fusspunktsvierecks constant sind; so haben die Fusspunktsvierecke aller Punkte auf dem Kreise $A\,\Gamma\,C$ einen der Diagonalenwinkel constant $= \frac{1}{2}(\delta - \beta) = \frac{1}{2}(\varepsilon - \zeta)$; ähnlich auf Kreis $B\,\Gamma\,D$

$$\tfrac{1}{2}(\alpha - \gamma) = \tfrac{1}{2}(\varepsilon + \zeta).$$

Zwei der Diagonalenwinkel des Fusspunktsvierecks der autoharmonischen Punkte sind also bezüglich $= \frac{1}{2}(\varepsilon - \zeta)$ und $\frac{1}{2}(\varepsilon + \zeta)$. Es sei noch bemerkt, dass man selbstverständlich durch cyklische Permutation im ganzen sechs solche Punkte $\Gamma$ erhält. Diese sechs Punkte repräsentieren bekanntlich die Covariante $T$ (Functionaldeterminante der Grundform und ihrer Hesse'schen Covariante) der biquadratischen Form $(A\,B\,C\,D)$.

§ 44. Auch für das Fünfeck lassen sich nach dem angegebenen Princip bemerkenswerte invariante Punkte construieren. Es sei nemlich (Fig. 6) $A\,B\,C\,D\,E$ ein beliebiges Fünfeck, und es sei nun $P$ ein solcher Punkt, dass das Doppelverhältniss $(P\,A\,E\,D) = (P\,B\,E\,C)$ sei; diese Eigenschaft würde dem Punkt $P$ offenbar die Eigenschaft der Invarianz geben. Nach unseren Ausführungen müssen dann die Fusspunktsdreiecke des Punktes $P$ in Bezug auf die Dreiecke $A\,D\,E$ und $B\,E\,C$, nemlich $F_1\,F_2\,F_3$ und $G_1\,G_2\,G_3$, einander ähnlich sein. Wenn nun $\sphericalangle\, F_2\,F_1\,F_3 = G_2\,G_1\,G_3$ ist, so folgt nach den Sätzen der Angularcentrik:

$$A\,P\,E - A\,D\,E = B\,P\,E + B\,C\,E,$$

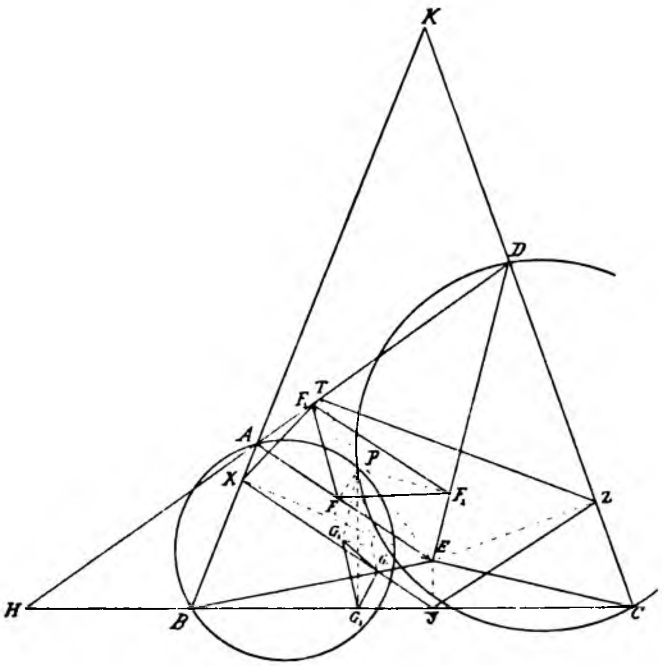
also $$A\,P\,E - B\,P\,E = A\,D\,E + B\,C\,E,$$

oder $$A\,P\,B = A\,D\,E + B\,C\,E = C\,E\,D - C\,H\,D,$$

also, wenn man das Fusspunktsviereck $X\,Y\,Z\,T$ des Punktes $E$ in Bezug auf $A\,B\,C\,D$ construiert,

(1) $$\sphericalangle\, A\,P\,B = \sphericalangle\, Y\,Z\,T.$$

Fig. 6.




Letzterer Winkel ist natürlich bei gegebener Lage der Punkte $A$, $B$, $C$, $D$, $E$ bekannt, und somit wird $P$ einmal auf einem leicht zu construierenden Kreisbogen über $A\,B$ liegen.

Wenn ferner $\sphericalangle\, F_1\,F_2\,F_3 = \sphericalangle\, G_1\,G_2\,G_3$ sein soll, so ist in ähnlicher Weise:

$$EPD - EAD = EPC + EBC,$$

also $$EPD - EPC = EAD + EBC, \quad \text{oder}$$

(2) $$CPD = AHB + AEB = YXT;$$

also liegt $P$ auch auf einem Kreisbogen über $CD$, der den bekannten Winkel $YXT$ fasst. Die Kreise $APB$ und $CPD$ werden sich natürlich noch in einem weitern Punkte $P'$ schneiden. Die Construction der Kreise $APB$, resp. $CPD$, geht wohl am leichtesten so vor sich, dass man durch $A$ eine Parallele mit $TZ$, durch $B$ mit $YZ$ zieht; der Schnittpunkt der beiden wird, neben $A$ und $B$, einen dritten Punkt des Kreises $APB$ bilden. Analog natürlich für Kreis $CPD$.

Diese Construction wird sich ferner ebensowohl auf das Seitenpaar $BC$ und $AD$ des Vierecks $ABCD$, wie für $AB$ und $CD$, anwenden lassen: so dass man also über $AD$ einen Kreis mit $\sphericalangle XYZ$, und über $BC$ einen Kreis mit $\sphericalangle XTZ$ zu beschreiben hat, um zwei weitere invariante Punkte $P''$ und $P'''$ zu erhalten, u. s. w.

Alle obigen Constructionen werden sich in cyklischer Folge fünfmal machen lassen, indem man statt $E$ der Reihe nach die andern Punkte $A$, $B$, $C$, $D$ vor den übrigen auszeichnet.

§ 45. Punkt $E$ hatte im vorigen Paragraphen eine beliebige Lage gegen die vier übrigen Punkte $A$, $B$, $C$, $D$ des Fünfecks. Man wird die Lage so specialisiren können, dass Punkt $E$ mit einem der invarianten Punkte $P, P', P'', P'''$ zusammenfalle. Offenbar ist dann ein solcher Punkt ein invarianter Punkt des Vierecks $ABCD$, und es erhebt sich die Frage, was für ein merkwürdiger Punkt des Vierecks $ABCD$ alsdann $E$ sein wird.

Es muss für den Zusammenfall von $E$ und $P$ natürlich

(1) $\sphericalangle APB = AEB$, und (2) $CPD = CED$ sein.

Aus der ersten Bedingung ergibt sich, da $APB = TZY$ sein soll, die Gleichung:

$$\sphericalangle AEB = TZY = CED - CHD = CED - \zeta;$$

aus der zweiten $CED = TXY = AEB + \zeta$, eine Gleichung, die mit der vorigen identisch ist. Die Aufgabe ist also unbestimmt, und man wird noch die Forderung hinzustellen können, dass etwa auch $P''$ mit $E$ zusammenfalle. Dann muss auch

$$AED = XYZ = BEC - BKC = BEC - \varepsilon;$$

verknüpft man dies mit obiger Gleichung

$$AEB = CED - \zeta,$$

so bekommt man

$$BED = 4R - BED - (\varepsilon + \zeta), \text{ also}$$

$$BED = 2R - \frac{\varepsilon + \zeta}{2}. \tag{1}$$

Weiter muss bei dem Zusammenfall von $E$ und $P''$ auch sein:

$$\sphericalangle BEC = XTZ = AED + \varepsilon;$$

dazu nehme man abermals die Gleichung:

$$AEB = CED - \zeta,$$

und man erhält durch Addition:

$$4R - AEC = AEC + \varepsilon - \zeta, \text{ oder}$$

$$AEC = 2R - \frac{\varepsilon - \zeta}{2}. \tag{2}$$

Wir gelangen also auf diesem Wege abermals zu den „autoharmonischen Punkten" als invarianten Punkten: $E$ ist dann ein Punkt der Covariante $T$, welche zu der biquadratischen Form $(ABCD)$ gehört (vgl. oben § 43).

Soll ein Punkt einer binären Form fünfter Ordnung zur Covariante $T$ der übrigen vier Punkte gehören, so muss nach Clebsch[1]) die schiefe Invariante $R$ der Form fünfter Ordnung verschwinden. Wenn umgekehrt $R = 0$ ist, so tritt entweder der genannte Fall ein, oder der Punkt $E$ gehört einem von drei Quadrupeln an, die aus einer gewissen cubischen Gleichung bestimmt werden.

[1]) Vgl. Clebsch a. a. O., p. 354 f.

Der aufmerksame Leser wird bereits gesehen haben, dass die vorangehenden Paragraphen auf Schritt und Tritt zu weiterer Ausgestaltung drängen und zu neuen Problemen führen. Für jetzt habe ich nur die Aufmerksamkeit der Mathematiker auf den Satz des § 1 lenken, und zugleich einige sich leicht ergebende Illustrationen und Anwendungen desselben geben wollen. Auf genauere Determinationen, auf analytische Untersuchungen u. s. w., musste ich gegenwärtig verzichten: ich möchte auch lieber zuerst gewisse hieher gehörige Teile der Isogonalcentrik — namentlich die Isomorphopolcentrik — in eigenen Artikeln ausführen und begründen.

Zum Schlusse dieser Ausführungen aber möchte ich noch ein wärmstes Wort des Dankes an einen hochverehrten Freund entrichten, und auf seinen massgebenden Einfluss auf ihr Zustandekommen hinweisen. Der Grundgedanke dieser Paragraphen ist aus den Vorlesungen von Herrn Prof. Dr. Lindemann über Invarianten- und Functionentheorie herausgewachsen; auch manches Detail geht auf diese Vorlesungen zurück.