Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Classe

der

k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.

1900. Heft I.

München.
Verlag der k. Akademie.
1900.

In Commission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).

Ueber einen Fundamentalsatz aus der Theorie der periodischen Functionen.

Von Alfred Pringsheim.

(Eingelaufen 27. Dezember.)

Im folgenden soll unter $f(u)$ ein für allemal eine Function verstanden werden, welche keine „unendlich kleine" Periode d. h. in jedem endlichen Bereiche nur eine endliche Zahl von Perioden besitzt: eine Eigenschaft, welche bekanntlich jeder nicht constanten eindeutigen oder endlich-vieldeutigen analytischen Function eo ipso (aber nicht dieser Functions-Classe ausschliesslich[1])) zukommt. Für Functionen dieser Kategorie gilt dann bekanntlich der von Jacobi[2]) aufgestellte und bewiesene Satz, dass sie höchstens doppelperiodisch sein können. Jacobi's Beweis gründet sich auf die folgenden drei Theilsätze:

I. $f(u)$ kann niemals zwei Perioden ω_1, ω_2 mit reellem irrationalen Quotienten besitzen. Ist hingegen $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ reell und rational, so lassen sich ω_1, ω_2 als ganzzahlige Multipla einer einzigen Periode ω darstellen. (A. a. O. § 1.)

---

1) So können auch unendlich-vieldeutige analytische Functionen die fragliche Eigenschaft besitzen (z. B. $\lg f(u)$), brauchen sie aber nicht zu besitzen (wie z. B. die Umkehrungsfunction eines Integrals u mit mehr als zwei Periodicitäts-Moduln). Vgl. im übrigen: Casorati, Acta math. T. 8 (1886), p. 344.

2) Journ. f. Math. Bd. 13 (1835), p. 55—61 (= Ges. Werke, II, p. 25—32).

II. Sind ω_1, ω_2, ω_3 Perioden, welche paarweise kein reelles Verhältniss besitzen, so muss zwischen ihnen eine homogene lineare Gleichung mit ganzzahligen Coefficienten bestehen. (A. a. O. § 3.)[1])

III. Besteht zwischen irgend drei Perioden ω_1, ω_2, ω_3 mit paarweise nicht reellem Verhältniss eine homogene lineare Relation mit ganzzahligen Coefficienten, so lassen sich zwei Perioden ω, ω' angeben, derart dass: $\omega_\varkappa = m_\varkappa \omega + n_\varkappa \omega'$ ($\varkappa = 1, 2, 3$; $m_\varkappa$, $n_\varkappa$ ganze Zahlen bezw. Null). (A. a. O. § 2.)

Hieraus kann nun in der That gefolgert werden, dass jede endliche Anzahl von Perioden sich schliesslich immer auf eine bezw. zwei reduciren lässt. Aber, obschon das hierzu dienliche Verfahren unbegrenzt fortsetzbar erscheint, so ist doch nicht genügend ersichtlich, dass sich wirklich auch die Gesammtheit aller möglichen Perioden, welche ja unter allen Umständen aus einer unendlichen Zahlenmenge besteht, durch eine bezw. zwei specielle, eindeutig charakterisirte Perioden darstellen lässt. Mit anderen Worten, durch die Jacobi'sche Deduction wird die jeweilige Existenz primitiver Perioden noch keineswegs vollständig in Evidenz gesetzt, vielmehr ist hierzu wiederum noch eine besondere Betrachtung erforderlich.

Darnach erscheint es aber weit zweckmässiger, von vornherein die Existenz bestimmter primitiver Perioden festzustellen: die obigen Jacobi'schen Sätze resultiren sodann als ganz unmittelbare Folgerungen. Ein Verfahren dieser Art wurde von Weierstrass für den allgemeinen Fall von Functionen beliebig vieler Variabeln angegeben[2]) und von O. Bier-

---

[1]) Der sehr sinnreiche, aber etwas mühsame Algorithmus, den Jacobi zum Beweise dieses, den eigentlichen Schwerpunkt der ganzen Deduction bildenden Satzes anwendet, lässt sich auch durch eine wesentlich einfachere Grenz-Betrachtung ersetzen: s. z. B. Rausenberger, Theorie der periodischen Functionen (1884), p. 303, Nr. 7. — Thomae, Abriss einer Theorie der Functionen einer compl. Veränderlichen und der Thetafunctionen, 3. Aufl. (1890), p. 39, § 35.

[2]) Berl. Monatsber. 1876, p. 680 (= Math. Werke, II, p. 70).

mann auf den Fall einer einzigen unabhängigen Variabeln übertragen.[1])

Die folgende, auf einer anderen, principiell etwas einfacheren Auswahl[2]) der primitiven Perioden beruhende Darstellung dürfte den Vorzug grösserer Anschaulichkeit besitzen und gestattet überdies auch einen genauen Ueberblick über die verschiedenen, bezüglich der Anzahl und der Grössenverhältnisse jener besonderen Primitiv-Perioden vorhandenen Möglichkeiten. Der Vollständigkeit halber und, um die vollkommene Analogie in der Behandlung der einfachen und doppelten Periodicität deutlich hervortreten zu lassen, schicke ich auch die Betrachtung desjenigen Falles voraus, welcher den Jacobi'schen Satz I involvirt.

Lehrsatz I. Alle einer Function vom Charakter $f(u)$ zukommenden Perioden Ω, welche gegenseitig in *reellem* Verhältnisse stehen, lassen sich als ganzzahlige Multipla einer einzigen Periode ω_1 darstellen.

Beweis. Bedeutet Ω irgend eine beliebige Periode, so giebt es in Folge der über $f(u)$ gemachten Voraussetzung nur eine endliche Anzahl von Perioden mit einem absoluten Betrag $\leqq |\Omega|$ und somit auch eine endliche Anzahl von Perioden $\omega_\varkappa$, deren absoluter Betrag $|\omega_\varkappa|$ einen bestimmten, von Null verschiedenen Minimalwerth besitzt. Wird eine dieser letzteren willkürlich ausgewählt und mit ω_1 bezeichnet, so hat man für alle möglichen $\omega_\varkappa$ die Beziehung: $\left|\frac{\omega_\varkappa}{\omega_1}\right| = 1$; da aber andererseits $\frac{\omega_\varkappa}{\omega_1}$ nach Voraussetzung reell ist, so folgt:

$$\frac{\omega_\varkappa}{\omega_1} = \pm 1, \quad \text{d. h.} \quad \omega_\varkappa = \pm \omega_1.$$

---

[1]) Theorie der analytischen Functionen (1887), p. 368.

[2]) Noch anders (in wesentlich geometrischer Darstellung) bei Tannery et Molk, Éléments de la théorie des fonctions elliptiques, T. I (1893), p. 143, Nr. 83.

Ist sodann Ω wieder eine ganz beliebige der zu ω_1 in reellem Verhältnisse stehenden Perioden, so lässt sich $\frac{\Omega}{\omega_1}$ stets und nur auf eine einzige Weise in die Form setzen:

$$\frac{\Omega}{\omega_1} = m + \varrho,$$

wo m eine ganze Zahl und $0 \leqq \varrho < 1$. Darnach wäre aber:

$$\varrho\,\omega_1 = \Omega - m\,\omega_1 \quad \text{und zugleich} \quad |\varrho\,\omega_1| < |\omega_1|,$$

d. h. $\varrho\,\omega_1$ eine Periode mit kleinerem absoluten Betrage als ω_1, was unmöglich ist, solange $\varrho > 0$. Somit muss $\varrho = 0$ sein, worauf dann $\Omega = m\,\omega_1$ sich ergiebt.

Folgerungen. 1) Unter den Perioden von $f(u)$ können niemals zwei solche vorkommen, welche ein reelles irrationales Verhältniss besitzen.[1])

[1]) Will man dies noch ausdrücklich bestätigen, so kann man sich statt der von Jacobi benützten Kettenbruch-Entwickelung von $\frac{\omega'}{\omega}$ auch der noch elementareren Darstellung von $\frac{\omega'}{\omega}$ durch einen unendlichen Decimalbruch oder sonstigen systematischen Bruch bedienen. Angenommen man habe:

$$\frac{\omega'}{\omega} = \lim_{\nu=\infty} \frac{a_\nu}{b^\nu} \text{ irrational},$$

(wo b eine natürliche Zahl $\geqq 2$, a_ν eine Folge ganzer Zahlen, die man ohne Beschränkung der Allgemeinheit als positiv voraussetzen kann), so wird für $\nu = 1, 2, 3, \ldots$:

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{a_\nu + \varrho_\nu}{b^\nu}, \text{ wo: } 0 < \varrho_\nu < 1$$

also:

$$\varrho_\nu\,\omega = b^\nu\,\omega' - a_\nu\,\omega.$$

Die ϱ_ν sind sämmtlich von einander verschieden, da aus $\varrho_m = \varrho_n$ folgen würde:

$$b^m\,\omega' - a_m\,\omega = b^n\,\omega' - a_n\,\omega$$

d. h.

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{a_m - a_n}{b^m - b^n}, \text{ d. h. rational.}$$

Es gäbe also in dem endlichen Bereiche $u = \varrho\,\omega$ $(0 < \varrho < 1)$ unendlich viele Perioden $\varrho_\nu\,\omega$, was der Voraussetzung widerspricht.

2) Besitzt $f(u)$ nur Perioden Ω mit reellem Verhältniss so ist $f(u)$ einfach periodisch, und die „primitive" Periode von $f(u)$ ist eine der beiden nach Willkür zu wählenden Zahlen $\pm\omega_1$, für welche $|\omega_1|$ ein Minimum wird.

3) Da umgekehrt für jedes einfach periodische $f(u)$ alle Perioden-Quotienten reell (und rational) ausfallen müssen, so folgt weiter: Finden sich unter den Perioden von $f(u)$ irgend zwei: $\omega = \xi + \eta i$, $\omega' = \xi' + \eta' i$ mit nicht-reellem Verhältniss:

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{\xi\xi' + \eta\eta'}{\xi^2 + \eta^2} + \frac{\xi\eta' - \xi'\eta}{\xi^2 + \eta^2}\cdot i, \quad \text{wo also: } |\xi\eta' - \xi'\eta| > 0,$$

so kann $f(u)$ nicht einfach periodisch sein. Um festzustellen, dass alsdann $f(u)$ genau doppelperiodisch sein muss, beweisen wir zunächst den folgenden

Hülfssatz. Sind ω, ω' Perioden von $f(u)$ mit *nicht-reellem* Verhältniss und ausserdem von der Beschaffenheit, dass ausser $h = \omega$ und $h = \omega'$ *keine* Zahl von der Form:

$$h = \varepsilon\omega + \varepsilon'\omega', \quad \text{wo: } \left.\begin{matrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{matrix}\right\} \geqq 0, \quad \varepsilon + \varepsilon' \leqq 1$$

eine *Periode* von $f(u)$ bildet[1]), so lässt sich *jede* Periode Ω in der Form darstellen:

$$\Omega = m\omega + n\omega'$$

wo m, n ganze Zahlen (einschliesslich der Null) bedeuten; ω, ω' heissen alsdann *primitive* Perioden.

Beweis. Zunächst lässt sich jedenfalls Ω (wie für jede beliebige Zahl durch Auflösung der betreffenden 2 Lineargleichungen folgt) stets und nur auf eine einzige Weise in der Form darstellen:

$$\Omega = a\omega + b\omega' \quad (a, b \text{ reell bezw. Null}),$$

[1]) Diese Bedingung besagt geometrisch, dass im Innern und auf den Seiten des Dreiecks mit den Eckpunkten $0, \omega, \omega'$ keine Perioden ausser ω, ω' liegen sollen.

anders geschrieben:

$$\Omega = m\,\omega + n\,\omega' + k,$$

wo m, n ganze Zahlen (eventuell Null) und:

$$k = \vartheta\,\omega + \vartheta'\omega', \quad 0 < \begin{Bmatrix} \vartheta \\ \vartheta' \end{Bmatrix} < 1.$$

Da sodann $k = \Omega - m\,\omega - n\,\omega'$ eine Periode von $f(u)$ sein muss, so folgt aus der Voraussetzung, das keinesfalls

$$\vartheta + \vartheta' \leqq 1$$

sein kann, ausser wenn:

$$\vartheta = \vartheta' = 0.$$

Wäre nun aber:

$$\vartheta + \vartheta' > 0 \quad (\text{andererseits: } \vartheta + \vartheta' < 2),$$

so hätte man:

$$\begin{aligned}(\omega + \omega') - k &= (1 - \vartheta) \cdot \omega + (1 - \vartheta') \cdot \omega' \\ &= \varepsilon\,\omega + \varepsilon'\,\omega',\end{aligned}$$

wo jetzt:

$$\varepsilon + \varepsilon' = 2 - (\vartheta + \vartheta') \begin{cases} > 0 \\ < 1, \end{cases}$$

d. h. $(\omega + \omega') - k$ wäre eine Periode von der Art, deren Existenz auf Grund der Voraussetzung ausgeschlossen erscheint.

Hiernach kann also in der That nur $\vartheta = \vartheta' = 0$, also:

$$\Omega = m\,\omega + n\,\omega'$$

sein, womit der ausgesprochene Satz bewiesen ist. —

Lehrsatz II. Finden sich unter den Perioden Ω von $f(u)$ solche mit nicht-reellem Verhältniss und bezeichnet man mit ω_1 irgend ein Ω, für welches $|\omega_1|$ unter allen möglichen $|\Omega|$ ein *Minimum* ist; sodann mit ω_2 ein anderes Ω, für welches $|\omega_2|$ unter allen nach Ausscheidung von $\Omega = \nu\,\omega_1$ ($\nu = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$) übrig bleibenden $|\Omega|$ gleichfalls ein *Minimum* ist (wobei also $|\omega_2| \geqq |\omega_1|$): so sind ω_1, ω_2 *primitive* Perioden.

Beweis. Es werde unter der (jedenfalls endlichen) Anzahl von Perioden Ω, deren absoluter Betrag einen gewissen von Null verschiedenen Minimalwerth r_1 besitzt, irgend eine beliebig ausgewählt und mit ω_1 bezeichnet. Alsdann ist zunächst auch $-\omega_1$ eine Periode mit dem absoluten Betrage r_1. Im übrigen sind dann nur folgende zwei Fälle möglich:

Erster Fall. Es existiren ausser $\pm\omega_1$ noch andere Perioden mit dem absoluten Betrage r_1. Bezeichnet man eine derselben mit ω_2, so folgt leicht aus dem eben bewiesenen Hülfssatze, dass ω_1, ω_2 primitive Perioden. Betrachtet man nämlich alle Zahlen h von der Form:

$$(1)\qquad h = \vartheta_1\,\omega_1 + \vartheta_2\,\omega_2, \quad \text{wo:}\ \left.\begin{matrix}\vartheta_1\\ \vartheta_2\end{matrix}\right\}\geqq 0,\quad \vartheta_1+\vartheta_2\leqq 1,$$

so folgt zunächst für $\vartheta_2 = 0$, bezw. $\vartheta_1 = 0$, dass:

$$h = \vartheta_1\,\omega_1 \quad \text{bezw.} \quad h = \vartheta_2\,\omega_2$$

wird, sodass unter diesen speciellen h nur die beiden folgenden:

$$h = \omega_1 \qquad h = \omega_2$$

Perioden sind. Ist dagegen $\vartheta_1 > 0$, $\vartheta_2 > 0$, so hat man:

$$\begin{aligned}|h| &= |\omega_1|\cdot\left|\vartheta_1+\vartheta_2\cdot\frac{\omega_2}{\omega_1}\right|\\ &< |\omega_1|\cdot(\vartheta_1+\vartheta_2)\end{aligned}$$

mit Ausschluss der Gleichheit, da $\left|\dfrac{\omega_2}{\omega_1}\right| = 1$, aber $\dfrac{\omega_2}{\omega_1}$ von $+1$ verschieden; also schliesslich:

$$|h| < |\omega_1| = |\omega_2| \text{ [1]},$$

sodass in Folge der Auswahl von ω_1 keine dieser Zahlen h eine Periode liefern kann: nach dem obigen Hülfssatze müssen also ω_1, ω_2 primitive Perioden sein.

Zweiter Fall. Es seien $\pm\omega_1$ die einzigen Perioden mit dem absoluten Betrage r_1. Man scheide dann aus der

---

[1] Dies ist übrigens geometrisch unmittelbar ersichtlich.

Gesammtheit der Ω alle diejenigen von der Form $\Omega = \nu\,\omega_1$ ($\nu = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$) aus: es sind dies nach Lehrsatz I alle möglichen, die überhaupt zu ω_1 ein reelles Verhältniss haben. Für die übrigbleibenden, die dann also zu ω_1 ein nicht-reelles Verhältniss haben (sodass auf Grund der Voraussetzung auch wirklich solche vorhanden sind) existirt dann wiederum ein gewisses Minimum r_2 des absoluten Betrages (wo also $r_2 > r_1$) und eine endliche Anzahl von Ω, für welche $|\Omega| = r_2$ ist. Wird dann irgend eine von diesen mit ω_2 bezeichnet, so sind ω_1, ω_2 primitive Perioden. Betrachtet man nämlich wiederum alle Zahlen h von der Form (1), so folgt zunächst für $\vartheta_1 = 0$:

$$h = \vartheta_2\,\omega_2,$$

sodass also unter diesen h nur $h = \omega_2$ eine Periode ist (denn $\pm\,\omega_1$ besitzt ja zu ω_2 kein reelles Verhältniss, ist also nicht von der Form $\vartheta_2\,\omega_2$). Ist aber $\vartheta_1 > 0$, so hat man:

$$\begin{aligned} |h| &= |\omega_2| \cdot \left|\vartheta_1 \frac{\omega_1}{\omega_2} + \vartheta_2\right| \\ &< |\omega_2| \cdot (\vartheta_1 + \vartheta_2) \qquad \left(\text{wegen: } \left|\frac{\omega_1}{\omega_2}\right| < 1\right) \\ &< |\omega_2|. \end{aligned}$$

Da es aber ausser $h = \omega_1$ keine Periode h giebt, welche den Bedingungen $\vartheta_1 > 0$, $|h| < |\omega_2|$ genügt, so folgt wieder aus dem obigen Hülfssatze, dass ω_1, ω_2 primitive Perioden sind. —

Folgerungen. 1) Finden sich unter den Perioden von $f(u)$ solche mit nicht-reellem Verhältniss, so ist $f(u)$ genau doppelperiodisch: es giebt also keine drei- und mehrfach periodischen $f(u)$.

2) Zwischen irgend drei der Function $f(u)$ zukommenden Perioden mit paarweise nicht-reellem Verhältniss findet eine homogene lineare Gleichung mit ganzzahligen Coefficienten statt.

Zwei specielle primitive Perioden, wie die oben näher charakterisirten und mit ω_1, ω_2 bezeichneten, mögen Minimal-Perioden genannt werden. Aus den bisherigen Betrachtungen geht dann nur soviel hervor, dass es jedenfalls nur eine endliche Zahl solcher Minimal-Perioden geben kann. Um deren mögliche Anzahl genauer festzustellen, stützen wir uns auf den folgenden bekannten Satz:

Sind ω, ω' primitive Perioden, so sind

$$\tilde{\omega} = \alpha\,\omega + \beta\,\omega', \quad \tilde{\omega}' = \gamma\,\omega + \delta\,\omega'$$

dann und nur dann gleichfalls primitive Perioden, wenn $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ganze Zahlen (einschliesslich der Null) bedeuten, welche der Beziehung genügen:

$$\alpha\,\delta - \beta\,\gamma = \pm 1.$$

Hieraus folgt speciell, wenn man einmal $\alpha = 1$, $\beta = 0$, also $\delta = \pm 1$, γ beliebig, das andere Mal $\gamma = 0$, $\delta = 1$, also $\alpha = \pm 1$, β beliebig annimmt:

Bilden (ω, ω') ein primitives Periodenpaar, so sind alle primitiven Paare, bei welchen eine der Perioden ω bezw. ω' beibehalten wird, in der Form enthalten:

(1) $(\omega, \gamma\,\omega \pm \omega')$ bezw. $(\pm\,\omega + \beta\,\omega', \omega')$ $\left(\begin{matrix}\beta\\ \gamma\end{matrix}\right\} = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\Big)$.

Umgekehrt ist jedes solche Periodenpaar ein primitives.

Mit Hülfe dieses letzteren Resultates können wir jetzt den Lehrsatz II, nach welchem — abgesehen von dem noch beliebig bleibenden Vorzeichen — mindestens zwei Minimal-Perioden existiren, in folgender Weise ergänzen.

Lehrsatz III. Es giebt, abgesehen von dem noch willkürlich bleibenden Vorzeichen, *höchstens drei* Minimal-Perioden, d. h. drei paarweise in nicht-reellem Verhältnisse zu einander stehende, noch nach Willkür mit beliebigem Vorzeichen zu versehende Perioden ω_1, ω_2, ω_3, die der Bedingung genügen:

$$|\,\omega_1\,| \leq |\,\omega_2\,| = |\,\omega_3\,|,$$

während ausser $\pm\omega_1$, $\pm\omega_2$, $\pm\omega_3$ *keine* Periode Ω existirt, für welche:

$$|\Omega| < |\omega_2|.$$

Zugleich bildet dann, ausser (ω_1, ω_2) und (ω_1, ω_3), auch (ω_2, ω_3) ein *primitives* Perioden-Paar.[1])

Beweis. Wir beweisen zunächst die Richtigkeit der zuletzt ausgesprochenen Behauptung. Im Falle $|\omega_2| = |\omega_1|$ folgt dieselbe unmittelbar aus Lehrsatz II, da man in diesem Fall für ω_1, ω_2 ohne weiteres auch ω_2, ω_3 substituiren kann.

Sei nun $|\omega_2| > |\omega_1|$. Da ω_3 eine Periode und (ω_1, ω_2) ein primitives Periodenpaar, so hat man jedenfalls:

$$\omega_3 = m\,\omega_1 + n\,\omega_2, \tag{2}$$

wo m, n ganze Zahlen und beide von Null verschieden. Dabei kann man ω_3 aus den beiden, nur durch das Vorzeichen verschiedenen, zur Verfügung stehenden Zahlen so auswählen, dass $m > 0$. Zugleich mag dann auch unter ω_2 gerade diejenige der beiden in Betracht kommenden, nur durch das Vorzeichen verschiedenen Zahlen verstanden werden, für welche $n > 0$. Sind jetzt ω_3, ω_2 in dieser Weise normirt, so lässt sich wiederum zeigen, dass ausser ω_2, ω_3 keine Periode h von der Form existirt:

$$h = \vartheta_2\,\omega_2 + \vartheta_3\,\omega_3, \quad \text{wo: } \left.\begin{matrix}\vartheta_2\\ \vartheta_3\end{matrix}\right\} \geqq 0, \quad \vartheta_2 + \vartheta_3 \leqq 1. \tag{3}$$

Man hat zunächst wieder für $\vartheta_3 = 0$, bezw. $\vartheta_2 = 0$:

$$h = \vartheta_2\,\omega_2, \quad \text{bezw.} \quad h = \vartheta_3\,\omega_3,$$

sodass unter diesen besonderen h sich thatsächlich nur die beiden Perioden

$$h = \omega_2, \quad h = \omega_3$$

vorfinden. Ist sodann $\vartheta_2 > 0$, $\vartheta_3 > 0$, so wird:

[1]) Für (ω_1, ω_2) und (ω_1, ω_3) folgt dies aus Lehrsatz II.

$$|h| = |\omega_2| \cdot \left|\vartheta_2 + \vartheta_3 \cdot \frac{\omega_3}{\omega_2}\right|$$

$$< |\omega_2| \cdot (\vartheta_2 + \vartheta_3) \qquad \text{(mit Ausschluss der Gleichheit)}$$

$$< |\omega_2|.$$

Die e i n z i g e n Perioden, deren absoluter Betrag $< |\omega_2|$ ist, sind aber $\pm\omega_1$. Und da aus Gl. (2) folgt:

$$\omega_1 = -\frac{n}{m}\omega_2 + \frac{1}{m}\omega_3, \quad -\omega_1 = \frac{n}{m}\omega_2 - \frac{1}{m}\cdot\omega_3$$

(wo $m > 0$, $n > 0$), so kommen $\pm\omega_1$ unter den Zahlen h n i c h t vor. Somit giebt es ausser $h = \omega_2$, $h = \omega_3$ k e i n e Periode h von der Form (3), und (ω_2, ω_3) bilden daher nach dem bewiesenen Hülfssatze ein p r i m i t i v e s Periodenpaar.

Da nun ausser (ω_3, ω_2) auch (ω_1, ω_2) ein p r i m i t i v e s Periodenpaar bilden, so hat man nach (1):

$$\omega_3 = \pm\omega_1 + \beta\,\omega_2,$$

also mit Rücksicht auf Gl. (2):

$$\omega_3 = \omega_1 + n\,\omega_2 \quad (n \geq 1). \tag{4}$$

Andererseits bilden aber auch (ω_1, ω_3) und (ω_1, ω_2) je ein p r i m i t i v e s Periodenpaar, und man hat daher nach (1):

$$\omega_3 = \gamma\,\omega_1 \pm \omega_2,$$

also wiederum mit Rücksicht auf Gl. (2):

$$\omega_3 = m\,\omega_1 + \omega_2 \quad (m \geq 1). \tag{5}$$

Die Vergleichung von (4) und (5) zeigt dann, dass:

$$m = 1, \quad n = 1$$

sein muss, d. h. man findet schliesslich:

$$\omega_3 = \omega_1 + \omega_2 \tag{6}$$

als den e i n z i g m ö g l i c h e n Werth von ω_3. Damit ist aber der ausgesprochene Satz bewiesen.

Zusatz. Man überzeugt sich leicht, dass der durch Gl. (6) und die Beziehung $|\omega_3| = |\omega_2|$ charakterisirte mögliche Fall auch wirklich eintreten kann. Ist $|\omega_2| = |\omega_1|$, so erscheint als Perioden-Parallelogramm mit den Ecken $0, \omega_1, \omega_3, \omega_2$ ein Rhombus, welcher durch die Diagonale $\overline{0\,\omega_3}$ in zwei gleichseitige Dreiecke zerfällt. Ist $|\omega_2| > |\omega_1|$, so besitzt das betreffende Parallelogramm nur die Eigenschaft, dass die Diagonale $\overline{0\,\omega_3}$ der grösseren Seite $\overline{0\,\omega_2}$ gleich ist. Dagegen ist dann das (gleichfalls primitive) Perioden-Parallelogramm mit den Ecken $0, \omega_3, \omega_2 + \omega_3, \omega_2$ ein rhombisches.

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der Bayerischen Akademie der Wissenschaften München

Jahr/Year: 1900

Band/Volume: 1900

Autor(en)/Author(s): Pringsheim Alfred

Artikel/Article: Ueber einen Fundamentalsatz aus der Theorie der periodischen Functionen 541-552