Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Classe

der

k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.

1901. Heft I.

München.
Verlag der k. Akademie.
1901.

In Commission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).

Ueber ein energetisches Grundgesetz der Mechanik.

Von **A. Voss** in Würzburg.

(*Eingelaufen 16. Februar.*)

Herr C. Neumann[1]) gelangt bei einer kritischen Besprechung des Ostwald'schen Principes des grösstmöglichen Umsatzes der Energie[2]) zu folgendem Satze:

„Ein beliebigen Bedingungen unterworfenes materielles System bewege sich unter Einfluss gegebener Kräfte, die ein Potential haben. Befindet sich dieses System zu Anfang eines unendlich kleinen Zeitelementes τ in Ruhe, so wird unter allen mit jenen Bewegungen und mit der Formel des Principes der lebendigen Kraft verträglichen virtuellen Bewegungen eine vorhanden sein, deren lebendige Kraft zu Ende der gegebenen Zeit τ am grössesten ist. Diese letztere wird alsdann diejenige sein, welche unter dem Einfluss der gegebenen Kräfte während der Zeit τ in Wirklichkeit eintritt."

Wenn es sich darum handelt, diesen Satz, der übrigens mit bekannten Sätzen über die Wirkung momentaner Kräfte zusammenhängt,[3]) auf den Fall auszudehnen, wo das System sich nicht in relativer Ruhe befindet, so wird die unbestimmte

---

[1]) C. Neumann, das Ostwald'sche Axiom des Energieumsatzes, Leipz. Ber., p. 184 (1892).

[2]) W. Ostwald, Lehrbuch d. allg. Chemie, 2. Aufl., Bd. 2, p. 37 (1892).

[3]) Man vergleiche z. B. J. Routh, Dynamik der Systeme schwerer Körper, übers. v. A. Schepp, Bd. 1, p. 335 u. ff., sowie die Noten von J. Bertrand zur Mécanique analytique (Lagrange, Oeuvr. Compl. XI. p. 311).

Form, in welcher in der Mechanik von virtuellen Bewegungen und Verrückungen Gebrauch gemacht wird, hinderlich. Man versteht unter solchen bald fingirte Verschiebungen, dann wieder Geschwindigkeiten oder auch Beschleunigungen, welche den betrachteten Puncten zur Zeit t oder auch für die Lage, welche sie zur Zeit $t + dt$ einnehmen, zugeschrieben werden. Es beruhen darauf auch die Unklarheiten, welche über manche Sätze, wie z. B. über das ebenfalls mit dem obigen Theorem in engem Zusammenhange stehende Princip des kleinsten Zwanges noch gegenwärtig selbst in ausführlicheren Lehrbüchern[1]) enthalten sind.

Versucht man, dem obigen Falle, soweit er sich auf die Vorstellung einer bei einer virtuellen Bewegung erzeugten lebendigen Kraft bezieht, eine vollständig klare mechanische Bedeutung zu geben, so kommt man zu folgender Anschauung.

Werden die Coordinaten der Punkte (x_i), (y_i), (z_i) des Systems zur Zeit $t = 0$ ohne Unterschied mit x_i, ihre Massen durch m_i, die auf sie wirkenden Kraftcomponenten durch X_i bezeichnet, so dass

$$x_1 = (x_1),\quad x_2 = (y_1),\quad x_3 = (z)_1;\; x_4 = (x_2),\ \text{etc.}\ ..$$
$$m_1 = m_1,\quad m_2 = m_1,\quad m_3 = m_1\ ;\ ..$$
$$X_1 = X_1,\quad X_2 = Y_1,\quad X_3 = Z_1\ ;\ ..$$

sind, so sind die Differentialgleichungen der Bewegung[2])

$$1)\qquad m\,x_i'' = X_i + \sum_s \lambda_s \frac{\partial \varphi_s}{\partial x_i}$$

falls die Bedingungen durch die Gleichungen

$$\varphi_s = 0,\quad s = 1, 2 \ldots k$$

---

[1]) Vgl. z. B. W. Schell, Theorie der Bewegung und der Kräfte, 1880, 2. Aufl., Bd. 2, p. 502.

[2]) Die Differentialquotienten von x_i nach t sind durch nebengesetzte Striche bezeichnet, so dass $x' = \frac{dx}{dt}$, $x'' = \frac{d^2x}{dt^2}$ u. s. w.

ausgedrückt sind. Die lebendige Kraft T, nach Potenzen der Zeit t entwickelt, ist gegeben durch

$$2\,T = t^2 \sum m_i\, x''^2_i + \ldots$$

Man führe nun das System unter denselben Kräften ebenfalls aus der Ruhelage, aber unter anderen Bedingungen

$$\psi_\sigma = 0\,,\quad \sigma = 1, 2 \ldots . l,$$

welche mit der Lage der Puncte verträglich sind, und bezeichne die entstehenden Beschleunigungen durch ξ''_i, so ist

$$\text{2)} \qquad m_i\, \xi''_i = X_i + \sum \mu_\sigma \frac{\partial \psi_\sigma}{\partial x_i}$$

und die lebendige Kraft T_1 gegeben durch

$$2\,T_1 = t^2 \sum m_i\, \xi''^2_i + \ldots$$

Danach wird

$$2\,(T - T_1) = t^2 \sum m_i\,(x''_i - \xi''_i)^2 + 2\,t^2 \sum m_i\, \xi''_i\,(x''_i - \xi''_i)$$

oder, wie nach 1) und 2)

$$m_i\,(x''_i - \xi''_i) = \sum \left(\lambda_s \frac{\partial \varphi_s}{\partial x_i} - \mu_\sigma \frac{\partial \psi_\sigma}{\partial x_i}\right)$$

$$2\,(T - T_1) = t^2 \sum m_i\,(x''_i - \xi''_i)^2 + 2\,t^2 \sum \lambda_s \frac{\partial \varphi_s}{\partial x_i}\, \xi''_i \text{ [1]}.$$

Der zweite Theil auf der rechten Seite verschwindet sicher dann, wenn die virtuelle Bewegung so festgesetzt wird, dass die Bedingungen $\psi_\sigma = 0$ die Bedingungen $\varphi_s = 0$ vollständig enthalten, also z. B.[2]) aus letzteren und beliebigen weiteren ebenfalls von t unabhängigen ausgewählt wurden. Unter diesen Voraussetzungen ist daher T in der That ein Maximum.

Diese Betrachtung kommt übrigens vollständig mit der von Herrn Neumann zu Grunde gelegten Vorstellung virtueller Bewegungen überein. Dagegen brauchen die wirkenden

---

[1]) Alle $\sum$ Zeichen erstrecken sich immer auf sämmtliche mehrfach vorkommende Indices.

[2]) Die Bedingungen für ψ sind im folgenden allgemein definirt.

Kräfte keiner Bedingung irgend welcher Art zu unterliegen,[1]) während allerdings die Bedingungen von der Zeit unabhängig sein müssen.[2])

Der angegebene Satz lässt sich indessen noch erweitern. Er bleibt bestehen, wenn die ξ_i'' nur so gewählt sind, dass

$$\sum \lambda_s \frac{\partial \varphi_s}{\partial x_i} \xi_i''$$

einen positiven Werth hat. Dazu ist aber erforderlich, dass die virtuelle Arbeit der Reactionen des Systemes

---

[1]) D. h. bis auf die auch im folgenden festzuhaltende Voraussetzung, dass die Coordinaten der Systempuncte für die wirkliche und jede virtuelle Bewegung in der Form

$$x_i + A_i t + B_i t^2 + R_i t^3$$

wo R_i den Rest bezeichnet, darstellbar sind. Alsdann handelt es sich auch nicht mehr um eine unendlich kleine, sondern um eine hinreichend kleine Zeit, während der die Maximumeigenschaft besteht.

[2]) Um diesen Punct völlig sicher zu stellen, betrachte man etwa die Bewegung eines einzelnen Punctes von der Masse eins auf der Fläche $\varphi = 0$, deren Gleichung t enthält und definire die virtuelle Bewegung durch $\varphi = 0$, $\psi = 0$, wo ψ wieder t enthalten kann. Man findet dann vermöge der Gleichungen

$$x_i'' = X_i + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$$

$$\xi_i'' = X_i + \mu \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial \psi}{\partial x_i}$$

für den Ausdruck

$$\sum m_i \xi_i'' (x_i'' - \xi_i'')$$

den Werth

$$(\lambda - \mu) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \nu \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

während die Lagrange'schen Multiplicatoren λ, μ, ν die Gleichung befriedigen

$$(\lambda - \mu) \sum \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right)^2 = \nu \sum \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_i}$$

so dass der angegebene Werth nur dann verschwinden würde, wenn φ und ψ t linear enthalten. Der Satz könnte also nur dann bestehen bleiben, wenn der Begriff der virtuellen Bewegung noch weiter als nothwendig eingeschränkt wird.

bei den ξ_i'' entsprechenden virtuellen Verschiebungen, die sonst völlig beliebig sein können, einen positiven Werth besitzt.

Auf den Fall, wo das System sich bereits in einem beliebigen Bewegungszustande befindet, lässt sich dieser Satz nicht unmittelbar übertragen. Auch kann man mit virtuellen Verschiebungen, welche lebendige Kraft hervorrufen, jetzt keinen klaren Sinn mehr verbinden, und die Benutzung solcher Vorstellungen muss nothwendiger Weise zu Missverständnissen führen. Trotzdem besteht ein dem obigen Maximaltheorem ähnliches aber allgemeineres, wenn man den strengen Begriff virtueller Bewegungen festhält, der im Vorstehenden entwickelt wurde. Dies soll jetzt gezeigt werden.

Wenn die Geschwindigkeiten der Systempuncte x_i zur Zeit $t = 0$ mit a_i bezeichnet werden, so sind dieselben zur Zeit t

$$3)\qquad \frac{d x_i}{d t} = a_i + t x_i'' + \frac{t^2}{2} x'''_i + \ldots$$

also ist die lebendige Kraft gegeben durch

$$2\,T = 2\,T_0 + 2\,t \sum X_i a_i + t^2 \sum m_i (x''^2_i + a_i x'''_i) + \ldots$$

wobei $T_0 = \frac{1}{2} \sum m_i a_i^2$ und vermöge der Differentialgleichungen der Bewegung

$$\sum m_i x'''_i a_i = \sum a_i \frac{d X_i}{d t} + \sum \lambda_s \frac{\partial^2 \varphi_s}{\partial x_i \partial x_k} a_i a_k$$

bei festen Verbindungen φ_s wird.

Man kann aber auch von einer relativen lebendigen Kraft τ sprechen, welche den relativen Geschwindigkeitscomponenten $x_i' - a_i$ entspricht; diese hat den Werth

$$4)\qquad \tau = \frac{t^2}{2} \sum m_i x''^2_i + \ldots$$

so dass

$$\Omega = 2\,T - \tau = 2\,T_0 + 2\,t \sum X_i a_i$$
$$+ t^2 \sum \left(\frac{m_i x''^2_i}{2} + a_i \frac{d X_i}{d t} + \lambda_s \frac{\partial^2 \varphi_s}{\partial x_i \partial x_k} a_i a_k \right)$$

wird. Für eine virtuelle Bewegung, deren Bedingungen $\psi_\sigma = 0$ mit der Lage des Systems und jenen Geschwindigkeiten a_i verträglich sind, deren Beschleunigungen wie vorhin durch ξ_i'' bezeichnet werden, kann man daher setzen

$$\Omega' = 2T_0 + 2t\sum X_i a_i + t^2 \sum\left(\frac{m_i \xi''^2_i}{2} + \frac{dX_i}{dt} a_i + \mu_\sigma \frac{\partial \psi_\sigma a_i a_k}{\partial x_i \partial x_k}\right) + \ldots$$

Demnach wird

$$\Omega - \Omega' = \frac{t^2}{2} \sum m_i (x''^2_i - \xi''^2_i) + t^2 \sum\left(\lambda_s \frac{\partial^2 \varphi_s}{\partial x_i \partial x_k} - \mu_\sigma \frac{\partial \psi_\sigma}{\partial x_i \partial x_k}\right) a_i a_k + \ldots$$

Für die rechte Seite ergiebt sich aber weiter nach den Gleichungen 1) und 2)

$$\frac{t^2}{2} \sum m_i (x_i'' - \xi_i'')^2$$

$$+ t^2 \sum \xi_i'' \left(\lambda_s \frac{\partial \varphi_s}{\partial x_i} - \mu_\sigma \frac{\partial \psi_\sigma}{\partial x_i}\right) + \left(\lambda_s \frac{\partial^2 \varphi_s}{\partial x_i \partial x_k} - \mu_\sigma \frac{\partial^2 \psi_\sigma}{\partial x_i \partial x_k}\right) a_i a_k$$

oder wegen der bekannten Identitäten

$$\sum \xi_i'' \frac{\partial \psi_\sigma}{\partial x_i} + \sum \frac{\partial^2 \psi_\sigma}{\partial x_i \partial x_k} a_i a_k = 0$$

$$5) \quad \Omega - \Omega' = \frac{t^2}{2} \sum m_i (x_i'' - \xi_i'')^2 + t^2 \sum \lambda_s \left(\xi_i'' \frac{\partial \varphi_s}{\partial x_i} + \frac{\partial^2 \varphi_s a_i a_k}{\partial x_i \partial x_k}\right) + \ldots$$

Unter der Voraussetzung, dass die Bedingungen $\psi_\sigma = 0$ die Bedingungen $\varphi_s = 0$ vollständig unter sich enthalten oder allgemeiner k der Functionen ψ_σ in deren ersten und zweiten Differentialquotienten mit denen der Functionen φ_s beziehlich für die Lage zur Zeit $t = 0$ übereinstimmen, d. h. k der Mannigfaltigkeiten $\psi = 0$ die $\varphi = 0$ beziehlich osculiren, ist aber der zweite Theil auf der rechten Seite von 5) Null, also

$$\Omega - \Omega' = \frac{t^2}{2} \sum m_i (x_i'' - \xi_i'')^2 + \ldots$$

beständig positiv. Es ist mithin der Ueberschuss Ω der doppelten lebendigen Kraft $2T$ über die relative lebendige Kraft τ ein Maximum im Vergleich zu dem entsprechenden Ueberschuss, der für das System in derselben hinreichend kleinen Zeit bei einer virtuellen Bewegung desselben entsteht.[1])

Für die Differenz $2(\tau - \tau_1)$ findet man nach 3) unter der Voraussetzung, dass die $\psi_\sigma = 0$ die $\varphi_s = 0$ vollständig enthalten,

$$2(\tau - \tau_1) = t^2 \sum m_i (x_i'' - \xi_i'')^2 - 2t^2 \sum \left(\lambda_s \frac{\partial \varphi_s}{\partial x_i \partial x_k} - \mu_\sigma \frac{\partial \psi_\sigma}{\partial x_i \partial x_k} \right) a_i a_k;$$

dieselbe wird daher nicht, wie Herr Helm[2]) behauptet, der sich zur Ableitung einer Formel für diesen Werth virtueller Verschiebungen bedient hatte, durch den Ausdruck

$$t^2 \left(\sum m_i (x_i'' - \xi_i'')^2 - 2\, T_0 \right)$$

dargestellt.

Das angegebene Maximaltheorem kann übrigens auch noch unter der Voraussetzung erweitert werden, dass die Bedingungsgleichungen $\psi_\sigma = 0$ nur mit den bereits bestehenden Geschwindigkeiten verträglich sind, d. h. die Mannigfaltigkeiten $\psi = 0$ die $\varphi = 0$ sämmtlich für die Lage bei $t = 0$ berühren. Schreibt man nämlich den zweiten Theil von 5) (rechts) in der Gestalt

$$t^2 \sum (\xi_i'' - x_i'')\, \lambda_s \frac{\partial \varphi_s}{\partial x_i}$$

so erkennt man sofort:

Jener Ueberschuss ist auch ein Maximum gegenüber allen virtuellen Bewegungen, bei denen die Arbeit der Reactionen des Systems in Bezug auf die Abweichung $\xi_i'' - x_i''$ der Systempuncte einen positiven Werth hat.

Wir kehren jetzt zu den engeren Voraussetzungen über die $\psi_\sigma = 0$ zurück. Da die Maximumeigenschaft der Function Ω für die wirkliche Bewegung characteristisch ist, so muss

---

[1]) Bezeichnet man die Geschwindigkeiten der Punkte zur Zeit 0 und t durch v_i^0, v_i, den Winkel desselben durch ω_i, so ist

$$\Omega = T + \sum m_i v_i v_i^0 \cos \omega_i - T_0.$$

[2]) G. Helm, die Energetik in ihrer geschichtlichen Entwicklung, Leipz. 1898, p. 252.

man auch umgekehrt die Gleichungen derselben aus dieser Eigenschaft herleiten können. Wir beweisen daher den folgenden Satz:

Die Voraussetzung der Maximum-Minimumeigenschaft der Function Ω führt zu den Gleichungen der Bewegung, falls der allgemeine Satz über die Beziehung zwischen kinetischer Energie und Arbeit als gültig vorausgesetzt wird, d. h. die Bedingungen die Zeit nicht enthalten.

Entwickelt man in der Gleichung

$$T - T_0 = \int_0^t \Sigma X_i \, d x_i$$

beiderseits nach Potenzen von t, indem man für T seinen Werth aus 3) bildet, so folgt

$$t \Sigma m_i a_i x_i'' + \frac{t^2}{2} \Sigma (m_i x_i''^2 + a_i m_i x'''_i) + \ldots$$

$$= t \Sigma X_i a_i + \frac{t^2}{2} \Sigma \left(x_i'' X_i + a_i \frac{d X_i}{d t}\right) + \ldots,$$

also müssen die Gleichungen

$$\text{6)} \quad \begin{aligned} &\Sigma m_i a_i x_i'' = \Sigma X_i a_i \\ &\Sigma (m_i x_i''^2 + a_i m_i x'''_i) = \Sigma \left(x_i'' X_i + a_i \frac{d X_i}{d t}\right) \end{aligned}$$

gelten. Der Ausdruck

$$\Omega = 2 T_0 + 2 t \Sigma a_i x_i'' m_i + t^2 \Sigma \left(\frac{m_i x_i''^2}{2} + m_i a_i x'''_i\right) + \ldots$$

wird daher

$$2 T_0 + 2 t \Sigma X_i a_i + \frac{t^2}{2} \Sigma \left(x_i'' X_i + a_i \frac{d X_i}{d t} - \frac{m_i x_i''^2}{2}\right) + \ldots$$

und soll ein Max.-Min. werden, falls die Bedingungsgleichungen

$$\text{7)} \quad \begin{aligned} &\Sigma m_i a_i x_i'' = \Sigma X_i a_i \\ &\Sigma \frac{\partial \varphi_s}{\partial x_i} x_i'' + P_s = 0 \end{aligned}$$

für die x_i'' bestehen. Dies gibt

$$X_i - m_i x_i'' = \mu a_i - \lambda_s \frac{\partial \varphi_s}{\partial x_i};$$

multiplicirt man diese Gleichungen mit den a_i und summirt, so folgt nach 7) wegen

$$\sum a_i \frac{\partial \varphi_s}{\partial x_i} = 0,$$

$$\mu \sum a_i^2 = 0.$$

Entweder sind nun alle a_i gleich Null; dann befindet sich das System in relativer Ruhe. Oder das System hat einen beliebigen Bewegungszustand, dann muss $\mu = 0$ sein. In beiden Fällen ergeben sich so die Gleichungen

$$m_i x_i'' = X_i + \sum \lambda_s \frac{\partial \varphi_s}{\partial x_i}$$

wie gezeigt werden sollte.

Wir geben dem bewiesenen Satze schliesslich noch die folgende Form:

Die Bewegung eines beliebigen materiellen Systems unter dem Einflusse irgend welcher Kräfte und unter festen Verbindungen ist in jedem Augenblicke dadurch characterisirt, dass der Ueberschuss der gewöhnlichen Beschleunigung der kinetischen Energie des Systems über die Beschleunigung der halben relativen kinetischen Energie desselben für die wirklich eintretende Bewegung einen grösseren Werth hat, als für irgend eine mit den Bedingungen verträgliche virtuelle Bewegung.

Mit allgemeinen Gesichtspuncten teleologischer Art dürfte sich derselbe in ungezwungener Weise nicht in Verbindung bringen lassen.

Der Satz kann wegen seiner Beschränkung auf feste Verbindungen weder das d'Alembert'sche noch das mit letzterem für Bedingungs-Gleichungen äquivalente Gauss'sche Princip ersetzen. Für das letztere erhält man übrigens im Anschluss an die entwickelten Anschauungen eine Ausdrucksweise, die gewisse Vortheile bieten dürfte. Bewegt sich ein Punct des Systems, der zur Zeit $t = 0$ die Coordinaten x_i^0, die Geschwindigkeitscomponenten a_i hat, unter Einfluss der Kräfte X_i und der Bedingungen $\varphi_s = 0$, so sind seine Coordinaten zur Zeit t

$$x_i = x_i^0 + a_i t + x_i'' \frac{t^2}{2} + \ldots$$

und für eine virtuelle Bewegung

$$\xi_i = x_i^0 + a_i t + \xi_i'' \frac{t^2}{2} + \ldots$$

Bezeichnet man als Grösse des Zwanges den mit Hülfe der freien Bewegung jedes Punctes

$$(x_i) = x_i^0 + a_i t + \frac{X_i}{2\, m_i} t^2 + \ldots$$

gebildeten Ausdruck

$$Z = \sum m_i \left[(x_i) - x_i\right]^2$$

so ist der Zwang für die virtuelle Bewegung

$$Z_1 = \sum m_i \left[(x_i) - \xi_i\right]^2.$$

Alsdann ist, ohne dass der Begriff der virtuellen Bewegung weiter eingeschränkt zu werden braucht, als dass die ersten und zweiten Differentialquotienten nach den x_i und t von k der Functionen $\psi_\sigma = 0$ beziehlich mit denen der Functionen $\varphi_s = 0$ für $t = 0$ übereinstimmen, die Differenz $Z - Z_1$ für eine hinreichend kleine Zeit stets negativ oder die Beschleunigung dritten Grades von Z ist für die wirkliche Bewegung stets kleiner als für jede virtuelle.

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der Bayerischen Akademie der Wissenschaften München

Jahr/Year: 1901

Band/Volume: 1901

Autor(en)/Author(s): Voss Aurel Edmund

Artikel/Article: Ueber ein energetisches Grundgesetz der Mechanik 53-62